Revista de História da Educação Matemática
HISTEMAT

ISSN: 2447-6447

Submetido: 19/06/2021
Aprovado: 12/08/2021

CLASSES DE EQUIVALÊNCIA: UMA ABORDAGEM MODERNA PARA O ENSINO DE FRAÇÕES

EQUIVALENCE CLASSES: A MODERN APPROACH TO TEACHING FRACTIONS

Julia Schaetzle Wrobel[1]
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-5089-6680

Tercio Girelli Kill[2]
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-0376-0668

RESUMO

Analisamos a importância das classes de equivalência no contexto da abordagem de frações em dois livros didáticos de inspiração modernista: um paulista, de autoria de Sangiorgi, Matemática Curso Moderno, e um capixaba, de Merigueti e D'Ávila, intitulado Coleção Matemática Orgânica. Verificamos que a obra publicada em São Paulo apresenta o conceito de fração a partir de diferentes subconstructos como parte todo, medida e classes de equivalências, sendo estas últimas localizadas exclusivamente na seção que trata de equivalência de frações. Já os autores do Espírito Santo apresentam toda a construção dos números racionais via conjuntos, relações e classes de equivalência. Tal subconstructo permeia o capítulo inteiro de números racionais, sem que outra abordagem para frações seja disponibilizada. Enquanto Sangiorgi faz uma transição suave às ideias modernistas, Merigueti e D'Ávila são mais radicais quanto ao ideário metodológico que sugestionava o vislumbre dos objetos matemáticos pelo prisma das estruturas algébricas. Dentre as rupturas e permanências históricas no currículo escolar brasileiro, identificamos a inclusão de estruturas algébricas com o advento do Movimento da Matemática Moderna e sua posterior descontinuação, possivelmente pela inadequação de uma linguagem simbólica e abstrata no ensino fundamental, não compatíveis com a matemática escolar.
Palavras-chave: Livros didáticos. Classe de equivalência. Números racionais. História da Educação Matemática. Movimento da Matemática Moderna.

ABSTRACT

We analyzed the importance of equivalence classes in the context of fraction's approach in two modernist-inspired textbooks: one from São Paulo, written by Sangiorgi, Matemática Curso Moderno, and the other from Espírito Santo, by Merigueti and D'Ávila, entitled Coleção Matemática Orgânica. We verified that the work published in São Paulo presents the concept of fraction from different subconstructs as a part-whole, measure and equivalence classes, the latter being located exclusively in the section dealing with the equivalence of fractions. The authors from Espírito Santo present the whole construction of rational numbers using sets, relations and equivalence classes. This subconstruct permeates the entire chapter of rational numbers, with no other approach to fractions being taken. While Sangiorgi presents a smooth transition to modernist ideas, Merigueti and D'Ávila are more radical regarding the methodological ideas that suggested the glimpse of mathematical objects through the prism of algebraic structures. Among the historical ruptures and permanences in the Brazilian school curriculum, we identified the inclusion of algebraic structures with the advent of the Modern Mathematics Movement and its subsequent discontinuation, possibly due to the inadequacy of a symbolic and abstract language in elementary education, not compatible with school mathematics.
Keywords: Textbooks. Equivalence classes. Rational numbers. History of Mathematics Education. Modern Mathematics Reform.

[1] Doutora em Matemática Aplicada pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Professora na Universidade Federal do Espírito Santo (UFES), Vitória, Espírito Santo, Brasil. E-mail: juliasw@gmail.com.
[2] Doutor em Educação (Linguagem Matemática) pela Universidade Federal do Espírito Santo (UFES). Professor na Universidade Federal do Espírito Santo (UFES), Vitória, Espírito Santo, Brasil. E-mail: tercio.kill@gmail.com.

Introdução

O ensino de frações é um tema bastante debatido na literatura especializada. Alguns autores tratam o assunto na perspectiva da dificuldade de aprendizagem dos alunos e como superá-las (Hope & Owens, 1987; Santos, 1997; Magina, Bezerra & Spinillo, 2009). Outros têm como foco o professor e abordam propostas e/ou obstáculos no seu ensino (Ball, 1993; Teixeira, 2008; Ripoll, Simas, Bortolossi, Rangel, Giraldo, Rezende & Quintaneiro, 2020). Há ainda diferentes pesquisadores que consideram a compreensão sobre frações crucial para a aprendizagem da Matemática, uma vez que seu conhecimento é fundamental em temas futuros como, por exemplo, a Álgebra (Kieren, 1980; Behr, Lesh & Silver, 1983; Bailey, Hoard, Nugent & Geary, 2012; Torbeyns, Schneider, Xin & Siegler, 2015).

Lopes (2008) destaca que o conceito de fração está relacionado a muitas ideias e subconstructos. Subconstructo é definido por Kieren (1980) como as diferentes interpretações de frações. Tal rol interpretativo é dinâmico, dadas as diferentes proposições e alterações sofridas ao longo dos anos. No entanto, é reconhecida a relevância dos subconstructos como base para análises conceituais sobre números racionais e a importância de diferentes abordagens para uma compreensão efetiva dos números racionais (Santos, 1997; Moreira & Ferreira, 2008).

Kieren (1976) propõe sete abordagens para os números racionais: operacional (frações podem ser comparadas, somadas etc.); fração decimal, classes de equivalência de frações, razão, operadores multiplicativos, elementos de um corpo quociente ordenado e como medida ou pontos na reta. Em trabalho posterior, Kieren (1980) destaca que o conhecimento sobre os números racionais requer uma capacidade funcional com classes de equivalência e campo quociente, mas traz uma análise onde algumas dessas interpretações são "isomorfas" do ponto de vista das estruturas matemáticas. Ele apresenta, então, uma defesa explícita de apenas cinco subconstructos básicos que representam padrões de pensamentos distintos: relação parte-todo, razão, quociente, medida e operador. Behr, Lesh & Silver (1983) afirmam que o nível de sofisticação associado ao corpo quociente[3] não é adequado a alunos do ensino fundamental por relacionar os números racionais a sistemas algébricos abstratos.

Em perspectiva histórica, Candeias & Monteiro (2020) investigaram os números racionais, em manuais de formação de professores portugueses entre 1844 e 1974, com atenção específica para a relação parte-todo. Gomes (2006), por sua vez, analisou livros didáticos brasileiros em três momentos históricos distintos, de 1900 até 1970. O estudo indicou que antes de 1930 predominava conceituação de números racionais em caráter formal, dependente de uma

[3] O conjunto das classes de equivalência pode ser chamado conjunto quociente, como veremos adiante.

noção imprecisa de grandeza e se apoiava fortemente na medição de comprimentos. Após 1930 ainda permanecia a conceituação de número racional associada à ideia de medição de grandeza e a fração era denominada como uma ou mais das partes em que se divide a unidade. No terceiro momento, já nos anos de Matemática Moderna, houve um enfraquecimento das conceituações que estavam disponíveis no segundo momento. A ideia de fração era apresentada pela forma a/b, com ênfase para o par ordenado de inteiros a e b, mas com b não nulo. A autora destaca ainda a ocorrência de abordagem dos números racionais pela via classes de equivalência no período modernista da pesquisa.

Mais recentemente, Scheffer & Powell (2019) analisaram 14 coleções brasileiras aprovadas pelo PNLD 2019 e destinadas ao ensino de Matemática. Os autores identificaram, dentre outras coisas, quatro subconstructos mais evidentes: parte-todo, razão, quociente e reta numérica, com predominância da primeira. Destaca-se que a associação entre frações e classes de equivalência, nos termos do estudo em comento, não figura nos livros hodiernos destinados à Matemática escolar.

A descontinuidade do ensino de frações na perspectiva das classes de equivalência, considerando estudos envolvendo livros didáticos modernistas e atuais, pode ser compreendida mediante uma problematização da compatibilidade de determinados conteúdos com a cultura escolar. Especificamente sobre o ensino de classes de equivalência na escola básica, Elias (2018, p.453) avalia:

> Para o matemático profissional não importa o que significa o número, importa que satisfaça a estrutura que o contém. No contexto da prática do professor de Matemática da escola básica, essa forma de compreender os números racionais enquanto classes de equivalência (ou os números reais, enquanto cortes de Dedekind) pode não fazer sentido.

Na mesma linha, Chervel (1990, p.182) indica as distâncias entre o “saber erudito” e o “saber ensinado”, mencionando que conceitos matemáticos introduzidos na escola básica, em determinado período histórico, eram substancialmente distintos dos seus “homônimos eruditos”. A não coincidência conceitual entre objetos de mesma denominação, manejados pelo matemático profissional e pelo professor que ensina Matemática, reclama reflexões necessárias envolvendo feições e abordagens dos conteúdos escolares e propósitos do processo educativo. Por exemplo, a apresentação de uma Matemática despojada de apelos intuitivos e desconexa de uma realidade vivida pelos estudantes adquire justificativa e plausibilidade, mediante a problematização de finalidades que foram confiadas à escola num dado espaço-tempo. A identificação de tais finalidades é “uma das tarefas da história das disciplinas escolares” (Chervel, 1990, p.187).

O livro didático de matemática é uma das fontes privilegiadas de conhecimento da História da Educação Matemática, como nos conta Silva (2015, p. 380): “Ao considerar o livro um objeto cuja existência depende da ação de um sujeito, que o cria, concebe e o torna disponível, entender-se-á que há uma relação entre objeto e sujeito e que é nessa relação que se estabelece o conhecimento histórico”. Choppin (2002) destaca que os livros didáticos nos permitem observar aparições e transformações de métodos pedagógicos e campos de conhecimento.

A potência dos estudos históricos com base na percepção das novidades e continuidades que imprimem forma ao ensino de Matemática é destacada também por Valente (2008a). O autor realça que o professor herda saberes e práticas de outras épocas, de modo que a análise histórica nos permite compreender concepções atuais sobre o ensino “amalgamados, reelaborados, descartados, transformados, eles constituem a herança através da qual é possível a produção de novos saberes e a criação de novas práticas presentes no cenário pedagógico atual” (Valente, 2008a, p. 12).

No âmbito das rupturas e permanências históricas, identifica-se a inclusão de estruturas algébricas no currículo da Matemática escolar brasileira. Nesse sentido, a investigação objetiva analisar a importância das classes de equivalência no contexto da abordagem de frações, em livros didáticos de inspiração modernista. Serão visitadas obras do professor Osvaldo Sangiorgi, em razão da reconhecida importância do autor para a difusão do Movimento da Matemática Moderna (MMM) no Brasil e, também, a *Coleção Matemática Orgânica*, que representa, em alguma medida, a materialização do ideário modernista no Estado do Espírito Santo.

1. A inclusão do estudo das classes de equivalência no currículo da escola secundária brasileira

A introdução de noções de Matemática Moderna no ensino secundário brasileiro foi cogitada ainda em 1959, ocasião do III Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática, que teve lugar no Rio de Janeiro (Valente, 2008b). Contudo, foi no IV Congresso sediado em Belém do Pará, em julho de 1962, que as propostas começam a ganhar forma e impulso, graças à liderança do professor Osvaldo Sangiorgi e demais integrantes do G.E.E.M. (Grupos de Estudos do ensino de Matemática) fundado em São Paulo no ano de 1961, como relata Sangiorgi (1965b, p. 10): “O IV Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática, realizado em julho daquele ano em Belém do Pará, tratou pela primeira vez, com objetividade de alto gabarito, o problema da introdução da Matemática Moderna no Ensino Secundário".

As articulações do grupo paulista foram decisivas para que as propostas de um ideário modernista para a Matemática secundarista alcançassem capilaridade nacional. O *lócus* para sancionar as propostas era muito adequado, uma vez que se tratava de um congresso nacional que abrigava à época sujeitos de alto credenciamento para realizar proposições sobre o ensino. Os modernos programas foram sugeridos previamente no V Encontro de Mestres, realizado ainda em junho de 1962 em São Paulo. De acordo com os anais do encontro, as propostas de cunho modernista não tinham a pretensão de instituir um programa completamente diferente daqueles já conhecidos, mas estabelecer abordagens com uma linguagem moderna que envolvia substancialmente o conceito de conjunto, operações e axiomas, com vistas a fomentar um pensamento matemático que permitiria com menos esforço um "melhor aproveitamento das estruturas mentais já existentes no aluno" (Anais do V Encontro, 1962, p. 2), ao mesmo tempo que enfatizaria o caráter modernista da Matemática. O "esquema de 24 itens sobre assuntos mínimos" (Anais do V Encontro, 1962, p. 2), acompanhado de indicações de abordagem, foi sancionado à unanimidade no IV Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática e passou a chancelar as muitas edições de manuais modernistas do professor Osvaldo Sangiorgi para os cursos ginasiais, conforme estampavam as próprias publicações.

Especificamente para o ensino de números fracionários, o programa de assuntos mínimos indicava que deveria ser ensinado as "operações fundamentais; propriedades; potenciação e radiciação". À título de sugestão: "Ressaltar com os números fracionários, a permanência das propriedades já introduzidas com os números inteiros (a estrutura contínua), fazer alusão à aproximação na extração da raiz quadrada" (Anais do V Encontro de Mestres, 1962, p. 42).

Os ares modernistas que se respiravam no IV Congresso podem ser verificados, sobretudo, pela aprovação dos ditos conteúdos mínimos. Ainda compunham o ambiente, dentre outros, uma conferência oferecida pelo Osvaldo Sangiorgi (1962), relatos de experiências modernistas comungados por professores e uma exposição realizada por Omar Catunda[4] (1906-1986) intitulada "Os Conceitos Fundamentais da Matemática: Conjuntos e Estructuras". Na

[4] Omar Catunda foi, nas palavras de Lima & Dias (2010), assistente do italiano Luigi Fantappiè (1901 - 1956) na Universidade de São Paulo (USP) da qual também foi professor, tendo se aposentado em 1962. Transferiu-se para a Universidade da Bahia (UBa) em 1963, onde tornou-se diretor do Instituto de Matemática e Física (IMF). Depois de 1968, tornou-se professor titular e coordenador do Mestrado do Instituto de Matemática (IM-UFBA), até a aposentadoria definitiva em 1976. Esteve, portanto, relacionado com a formação de matemáticos por mais de 40 anos.

palestra, Catunda acena para a necessidade de se vislumbrar conjuntos pela perspectiva estruturalista:

> Para que um conjunto possa ser tratado matematicamente, ele deve ter uma certa "estrutura". Com este termo se indica um sistema de relações fundamentais que se verificam entre seus elementos e das quais se deduzem outras relações mais complexas, que são dadas pelos teoremas (Catunda, 1962, p. 2).

A teoria dos conjuntos era o pilar do modernismo e a noção de estrutura possibilitava uma abordagem que interessava à Matemática Moderna, em razão dos resultados que se desdobravam a partir de tal a priori. A relação de equivalência era uma das estruturas que Catunda indicava para a construção dos objetos matemáticos:

> Uma relação entre os elementos de um conjunto A pode-se definir assim: consideremos o conjunto dos pares (a, b) de elementos de A, isto é, como já definimos atrás, o conjunto A^2. Um certo subconjunto $R \subset A^2$ define então uma relação ρ: dizemos que todo elemento a está na relação ρ com o elemento b, e escrevemos a ρ b, se (a, b) ϵ R. Por exemplo, entre todos os seres humanos, podemos considerar a relação t: tio – sobrinho, de modo que a expressão atb indica que o indivíduo a é tio de b, e neste caso o par (a, b) pertence a um conjunto de pares de seres humanos (Catunda, 1962, p. 4).

Em caráter complementar, Catunda anuncia que uma relação de equivalência deve contemplar as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva, quaisquer que sejam os elementos do conjunto considerado. O símbolo til (∽) era usado para indicar uma relação de equivalência e, como exemplo, indicava que, em se assumindo que as pessoas fossem irmãs delas mesmas, então, a relação "irmão", para filhos de mesmos genitores, era uma relação de equivalência. A analogia com o contexto familiar possibilitava outro vislumbre de aplicação para a propriedade.

Outra constatação, explorada por Catunda, residia no fato de que a relação de equivalência determinava uma disjunção entre os elementos de um conjunto considerado e os elementos abrigados por uma relação ρ, ditas classes de equivalência, no qual cada classe era determinada por um dos seus elementos quaisquer e todos os seus equivalentes. Assim sendo, cada classe poderia ser considerada um elemento de um novo conjunto, denominado quociente e denotado por A/ρ. Um exemplo exibido para classes de equivalências eram os dias da semana, considerando o conjunto dos dias e firmando que eram equivalentes dois elementos, cujo espaço temporal que os separava[5] era um múltiplo de 7.

Em linhas finais da seção, Catunda afirmava que uma das potencialidades das classes de equivalência estava na construção de conjuntos numéricos:

> Um dos processos mais usados atualmente para formar ou definir conjuntos consiste em construir o conjunto quociente de um conjunto conhecido por uma relação de equivalência existente neste último. Exemplos deste procedimento são as definições de números relativos e de números

[5] Contando das 12 horas de um dia às 12 horas de outro.

> racionais. Basta considerar o produto cartesiano N^2, definindo duas relações de equivalência: I) (a, b) ∽ (c, d), se a + d = b + c; II) (a, b) ∽ (c, d), se ad = bc. A relação I serve então para definir os números relativos como classes de equivalências de pares de números naturais, sendo o zero definido como a classe dos pares da forma (a, a). Da mesma maneira se definem os números racionais, como classes de equivalência correspondentes à definição II. (Catunda, 1962, p. 5)

O IV Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática inaugurou oficialmente uma nova abordagem para o ensino de frações, prescritas para a escola secundária. Em sede de ponderações, Catunda (1962) diz que era passível de lamentação o novo vocabulário e a diversidade de novos símbolos que era necessário se apropriar, mas que isso era algo que não se podia evitar e, também, não demandava muito esforço por parte dos alunos. A ampliação da linguagem simbólica potencializava o âmbito de ação da Matemática. A expectativa de Omar Catunda era de que dentre algum tempo, as ideias que caracterizavam o movimento modernista iriam se tornar "corriqueiras entre os cultores da Matemática" (Catunda, 1962, p. 8). Dotada de nova linguagem e da noção de estrutura, a "rainha das ciências ganhará enormemente em vigor e em possibilidade de aplicação e de progresso" (Catunda, 1962, p. 8).

Àquela altura, Omar Catunda era um renomado matemático e não se pode descartar a importância das suas sugestões de abordagem para os conceitos fundamentais, endereçadas para a Matemática escolar. Conformava-se, portanto, uma proposta para o ensino de frações no nível secundário, cuja explanação necessária deveria contemplar as noções de conjunto, par ordenado, relação de equivalência, até a culminância com as classes de equivalência e conjunto quociente. O paraíso dos símbolos, das definições, das propriedades, em suma, das estruturas algébricas abria espaço para outra percepção das frações, que rompia com usos vigentes à época. Resta investigar como os livros didáticos se apropriaram do ideário modernista, a partir do IV Congresso, especificamente no que diz respeito à importância das classes de equivalência no contexto da abordagem de frações.

2. Classes de Equivalência na Coleção *Matemática Curso Moderno*

Osvaldo Sangiorgi estagiou na Universidade de Kansas, EUA, de junho a agosto de 1960, segundo Valente (2008b), onde participou de oficinas de elaboração de livros didáticos. O professor voltou a São Paulo animado com as propostas estadunidenses de modificação de programas e métodos de ensino de Matemática e, já no espírito da Matemática Moderna, reformulou totalmente sua coleção de livros didáticos para o ginásio.

A coleção de Sangiorgi intitulada *Matemática Curso Moderno* teve grande inserção nas escolas básicas, atingindo a publicação de 4.332.702 exemplares, considerando as diversas edições dos 4 volumes direcionados do 5º ao 8º ano, nos anos de 1964 a 1972, segundo

Lavorente (2008). Valente (2008b) destaca que, somente em 1963, a Cia. Editora Nacional lançou no mercado, para uso no ano letivo de 1964, mais de 250 mil exemplares do volume 1, para alunos da 5ª série ginasial. Essa tiragem foi mantida pelo menos nos dois anos seguintes. Ainda de acordo com Valente (2008b), com essa publicação, Sangiorgi destacou-se como o primeiro autor a elaborar um texto didático de Matemática moderna para ser utilizado nos ginásios brasileiros, com repercussão em países como Uruguai e Argentina.

Em seu livro *Matemática para a 1ª série Ginasial*, Sangiorgi (1960) trouxe o programa de Matemática publicado pelas portarias ministeriais 966 de 2/10/51 e 1045 de 14/12/52 e dizia segui-lo estritamente. Na obra *Matemática Curso Moderno* - Volume 1 para os ginásios, Sangiorgi (1965a) realçou que os assuntos explicados no volume faziam parte dos vinte e quatro itens que compõem os "Assuntos Mínimos para um Moderno Programa de Matemática para os Ginásio, com respectivas sugestões para seu desenvolvimento" (p. ix), aprovado por unanimidade pelo IV Congresso Brasileiro do Ensino de Matemática ocorrido em Belém em 1962. As seções iniciais sobre frações em cada um dos livros encontram-se no Quadro 1.

Quadro 1 – conteúdos iniciais de frações abordados nos livros de Sangiorgi

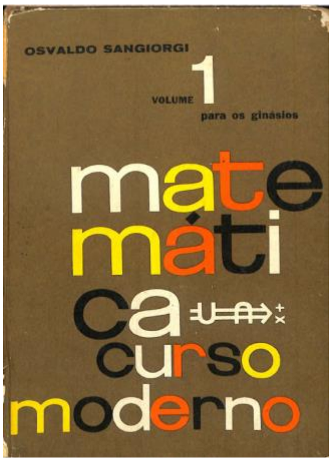
Obra de 1960	Obra de 1965
Capítulo 3: Números fracionários; operações fundamentais; métodos de resolução de problemas sobre frações; frações decimais como números decimais §1. Números fracionários: Noção intuitiva de fração. Definição. Frações próprias, impróprias e aparentes. Extração de inteiros. Números mistos. Propriedades das frações. Simplificação. Frações irredutíveis. Redução ao mesmo denominador. Redução de frações ao mínimo denominador comum. Comparação de frações. Aplicações. Exercícios sobre frações.	Capítulo 3. Números fracionários, Classes de equivalência entre frações, Estrutura de ordem com os números fracionários, Operações, propriedades estruturais, Problemas de aplicação e estrutura.

Fonte: Adaptado de Sangiorgi, (1960, p. 9; 1965a, p. x)

Ao comparar as duas propostas de ensino de Sangiorgi, percebemos a inclusão do tema frações relacionado à classe de equivalência, uma inovação do "currículo moderno". A abordagem de classe de equivalência no período modernista resultou das discussões e propostas apresentadas no IV Congresso Brasileiro do Ensino de Matemática e foi também percebida por Gomes (2006) em publicações analisadas do século XX.

O exemplar analisado é parte integrante da coleção *Matemática Curso Moderno* Volume 1, para os ginásios, Sangiorgi (1965a), destinado a alunos da 5ª série ginasial (Figura 1):

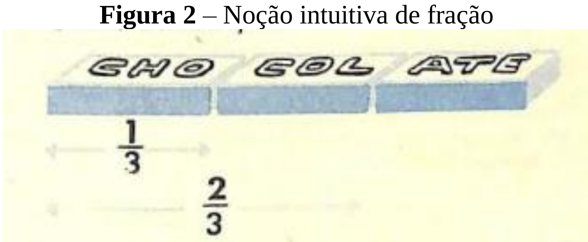
Figura 1 –Matemática Curso Moderno - volume 1 para os ginásios



Fonte: Sangiorgi (1965a).

Sangiorgi apresenta diferentes subconstructos para as frações, iniciando o capítulo com uma “noção intuitiva de frações” (p. 161), exemplificada pelo subconstructo parte-todo em conjuntos contínuos, a partir da repartição de uma barra de chocolate em partes iguais, como mostra a Figura 2:

Figura 2 – Noção intuitiva de fração



Fonte: Sangiorgi (1965a, p. 161).

A proposta de iniciar esse tema via abordagem intuitiva com o exemplo da barra de chocolate não é novidade e aparece igualmente na obra de Sangiorgi publicada em 1960. Na obra assumidamente moderna, o autor enfatiza que a fração é composta por dois números inteiros. Tais números serão considerados um par ordenado. Por hora, o autor indica então que uma nova “espécie” de número será estudada, os números fracionários, definidos na Figura 3:

Figura 3 – Noção intuitiva de fração

Nasce, portanto, uma nova *espécie* de número (lembre-se que até agora você só "trabalhou" com os números naturais e números inteiros), denominado *número fracionário*, cujo numeral — agora chamado *fração* — compõe-se de *dois números inteiros*, tomados numa certa ordem, com o segundo dêles diferente de zero, sendo ambos separados por um traço horizontal.

Fonte: Sangiorgi (1965a, p. 161).

Com os dois números inteiros 2 e 3, tem-se o número fracionário $\frac{2}{3}$. O 3 é chamado denominador e "indica em quantas partes iguais foi dividida a unidade" e o número 2 é chamado numerador e destaca "quantas dessas partes foram tomadas" (Sangiorgi, 1965a, p.161).

O autor apresenta, então, a interpretação dos números fracionários por meio de desenhos geométricos, escreve sobre frações próprias, impróprias e aparentes, traz alguns exemplos e exercícios. Uma vez que aluno já esteja "amadurecido", pode "receber uma definição geral de número fracionário". Escreve então que "em um número fracionário participam dois números inteiros: o primeiro (numerador) e o segundo (denominador)", com a ressalva de que o segundo não pode ser zero porque "é impossível dividir alguma coisa por zero" (p. 168). Essa nova definição de número fracionário enquanto par ordenado está apresentada na Figura 4:

Figura 4 – Definição geral de número fracionário

Número fracionário é um par ordenado de números inteiros, com o segundo diferente de zero.

Fonte: Sangiorgi (1965a, p. 168)

Esse par ordenado é indicado entre parêntesis, de modo que $(3,4) = \frac{3}{4}$, $(0,5) = \frac{0}{5}$ e $(5,0)$ não está definido. O autor também indica os números fracionários pelo subconstructo da divisão (Figura 5).

Figura 5 – Definição geral de número fracionário

Um número fracionário indica, também, a divisão entre o numerador e o denominador.

Fonte: Sangiorgi (1965a, p. 168)

Nos exercícios propostos, surgem outros subconstructos: a parte-todo em conjuntos discretos, por exemplo no exercício 5 (p. 172): "um pacote de balas foi repartido entre três meninos, cabendo ao primeiro 5 balas, ao segundo 7 e ao terceiro 4 balas. Que números fracionários traduzem as balas que cada menino recebeu?"

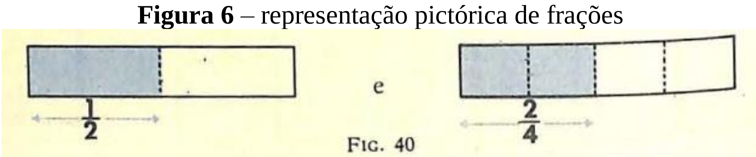
A interpretação de fração como medida também aparece no texto, especificamente nos problemas propostos no final do capítulo, "problemas de aplicação para serem resolvidos", como por exemplo no problema 10 (p. 212): "Quero atingir o cume de um morro. Percorri 2/7 do percurso e em seguida mais 3/5, faltando-me ainda 24m. Qual o percurso total em metros?"

Como podemos perceber, os cálculos e problemas não foram totalmente suprimidos como Sangiorgi anunciou na apresentação de sua coleção[6]. Nesse sentido, constata-se uma proposta de transição moderada da Matemática tradicional para a Matemática Moderna.

Em termos de interpretações para as frações, o autor apresenta alguns dos diferentes subconstructos de números racionais propostos por Kieren (1976): operacional, fração decimal (em capítulo posterior aos aqui apresentados); classes de equivalência de frações, razão, e como medida, o que já era prática comum na coleção publicada por Osvaldo Sangiorgi em 1960.

As classes de equivalência de frações mereceram uma seção especial, que inicia com o subtítulo "Frações equivalentes, frações iguais e aplicações", retomando um exercício proposto aos alunos em uma seção anterior, onde o estudante deveria correlacionar uma fração à uma representação pictórica. Diz o autor que "a noção de equivalente entre frações você *sentiu* através dos exercícios de fixação (Grupo 35) quando as frações representavam *mesmo valor* (colorido), apesar dos *termos diferentes*" (p. 174), como por exemplo as representações apresentadas na Figura 6, onde 1/2 e 2/4, que indicam as partes coloridas de retângulos iguais e, portanto, representam "o mesmo valor" (p.174).

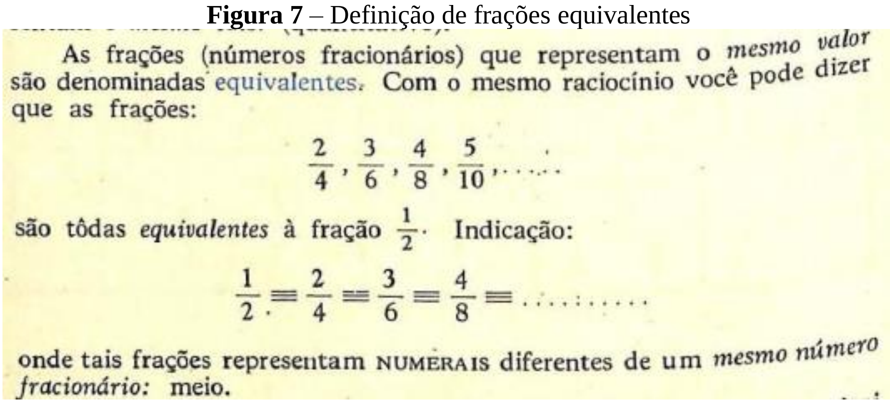
Figura 6 – representação pictórica de frações



Fonte: Sangiorgi (1965a, p. 174)

A partir dessa noção "intuitiva", o autor define o que são frações equivalentes (Figura 7):

Figura 7 – Definição de frações equivalentes



As frações (números fracionários) que representam o *mesmo valor* são denominadas equivalentes. Com o mesmo raciocínio você pode dizer que as frações:

$$\frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \ldots\ldots$$

são tôdas *equivalentes* à fração $\frac{1}{2}$. Indicação:

$$\frac{1}{2} \equiv \frac{2}{4} \equiv \frac{3}{6} \equiv \frac{4}{8} \equiv \ldots\ldots\ldots$$

onde tais frações representam NUMERAIS diferentes de um *mesmo número fracionário:* meio.

Fonte: Sangiorgi (1965a, p. 174).

A apresentação sobre o subconstructo Classe de Equivalência é feita, então, como como um conjunto de frações equivalentes (Figura 8):

[6] Na apresentação do primeiro volume de Matemática Curso Moderno, Sangiorgi (1965a) se dirige aos iniciantes do ginásio proclamando que os alunos iriam estudar uma matemática diferente daquela estudada pelos irmãos e colegas mais velhos. A velha matemática era repleta de "cálculos, problemas complicados, trabalhosos e fora da realidade, que a tornavam quase sempre um fantasma" (p. xiii). As contas deveriam ser realizadas por máquinas e os estudantes deveriam devotar o seu tempo em aprender o "verdadeiro significado e as belas estruturas da Matemática Moderna" (p.xiii).

Figura 8 – Definição de frações equivalentes

O *conjunto* das frações equivalentes a uma dada fração constitui uma classe de equivalência. A classe de equivalência, correspondente à fração $\frac{1}{2}$, pode ser escrita da seguinte maneira(*):

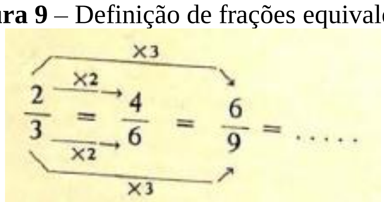
$$\boxed{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \ldots \right\} \text{(\textit{Classe de equivalência} da fração: } \tfrac{1}{2}\text{)}$$

Fonte: Sangiorgi (1965a, p. 174).

Sangiorgi (1965a) traz uma outra possibilidade de representação da classe de equivalência da fração ½, que é a fração com um traço acima: $\frac{\bar{1}}{2}$. Nesse momento, o autor faz uma ressalva de que igualdade e equivalência são conceitos distintos, sendo a noção de equivalência "mais ampla" (p. 175). Duas frações são iguais apenas quando "têm os numeradores e os denominadores respectivamente *iguais*" (p. 175). Em termos de símbolos, a equivalência é representada com três traços (≡) e a igualdade é representada com dois traços (=). Assim, diz-se que $\frac{1}{2} \equiv \frac{2}{4}$ e $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$. No entanto, costuma-se, na prática, para "facilitar os cálculos entre frações equivalentes, usar o sinal = ao invés de ≡" (p. 175).

Se a primeira subseção ensinava a reconhecer frações como equivalentes, a seguinte ensina a constituir classes de equivalência de uma determinada fração por uma "Técnica de Cálculo", que ele chama de "Regra Fundamental: multiplicando-se ou dividindo-se os dois termos de uma fração por um mesmo número natural, obtém-se uma fração equivalente à fração dada" (p. 176). A regra é representada pelo esquema da Figura 9:

Figura 9 – Definição de frações equivalentes



Fonte: Sangiorgi (1965a, p. 176).

Para verificar ou reconhecer que duas frações são equivalentes, Sangiorgi também institui uma fórmula. Diz que, nesse caso, o produto dos meios deve ser igual ao produto dos extremos (Figura 10):

Figura 10 – Reconhecimento de frações equivalentes

O reconhecimento *imediato* de que duas frações são *equivalentes* pode ser feito verificando se são *iguais* os produtos: *numerador da primeira* × *denominador da segunda* e *denominador da primeira* × *numerador da segunda*. Exemplos:

Fonte: Sangiorgi (1965a, p. 176).

A equivalência entre frações aparece ainda em outras definições, mas não mais com menção explícita às classes de equivalências. No contexto das simplificações de frações e frações irredutíveis, o autor define que “*Simplificar* uma fração é obter uma fração que lhe seja equivalente e de termos, respectivamente, *menores*” (p. 177). O autor invoca então a Regra Fundamental para mostrar como simplificar frações: basta dividir, quando possível, ambos os seus termos por um divisor comum (Figura 11):

Figura 11 – Simplificação e frações equivalentes

$$\frac{24}{36} \underset{\xrightarrow[:2]{}}{\overset{\xrightarrow{:2}}{=}} \frac{12}{18} \underset{\xrightarrow[:2]{}}{\overset{\xrightarrow{:2}}{=}} \frac{6}{9} \underset{\xrightarrow[:2]{}}{\overset{\xrightarrow{:2}}{=}} \frac{2}{3}$$

Fonte: Sangiorgi (1965a, p. 177).

Quando uma fração não pode mais ser simplificada, diz Sangiorgi (1965a), ela é “irredutível ou que está reduzida à sua expressão mais simples” (p. 177). Nesse caso, realça o autor, numerador e denominador devem ser primos entre si. Uma maneira de se chegar rapidamente à expressão mais simples é dividindo ambos os termos da fração pelo maior divisor comum entre eles.

Sobre frações de mesmo denominador, novamente o conceito de equivalência é evidenciado: “Reduzir frações ao *mesmo denominador* é transformá-las respectivamente em frações *equivalentes* de mesmo denominador” (Sangiorgi, 1965a, p. 178) e, para evitar termos muito grandes, procura-se usar o *menor denominador possível*. Nesse caso, dizemos que a fração foi reduzida ao *menor denominador comum*. Chama-nos atenção a maneira como o autor ensina a reduzir frações ao mesmo denominador: “a) Determina-se o menor denominador comum (operação de MMC nos denominadores); b) Calcula-se o quociente do menor denominador comum pelo denominador de cada fração e multiplica o numerador respectivo por esse número” (Sangiorgi, 1965a, p. 179). Sangiorgi, embora admitisse no prefácio que a nova matemática não enfatizaria operações aritméticas, ou contas, mas sim as belas estruturas da Matemática, opta por um processo transitório brando. Ao abordar as estruturas de classe de equivalência, indica exemplos numéricos e, na conclusão da seção realiza um encaminhamento para fixação do algoritmo para operar frações, em perspectiva mais aritmética do que algébrica ou lógico-dedutiva.

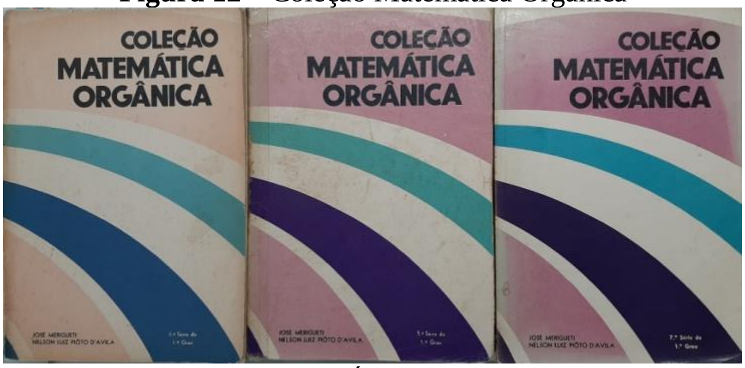
3. Classes de Equivalência na *Coleção Matemática Orgânica*

Na década de 1960, acordos firmados entre o Ministério da Educação e Cultura (MEC) a *United State agency for international development* (USAID) asseguraram recursos para a definição de uma nova política educacional brasileira. Kill (2004) destaca que, nessa época, o MEC instituiu uma força tarefa para as escolas primárias e secundárias com o objetivo de "planejar, reestruturar e adaptar o currículo às novas exigências de um modelo industrial que se desenvolvia às custas do capital externo" (p. 103). Como resultado, criou-se um arquétipo escolar que alterava o caráter acadêmico-intelectual da educação, introduzindo os estudantes rapidamente no mercado de trabalho. Tal mister caberia aos chamados Ginásios Polivalente

A formação para professores lecionarem Matemática nos Ginásios Polivalentes Capixabas era ofertada pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade Federal do Espírito Santo (UFES), por meio dos chamados *Cursos do PREMEN* (Programa de Melhoria e expansão do ensino) e sob a coordenação do professor Nelson Luiz Piôto D'Ávila. O curso apresentava programas modernistas instituídos pelo próprio projeto e trazia a coleção *Mathematique Moderne*, do matemático belga Georges Papy, como referência principal em Matemática. Um dos professores do programa era José Merigueti, que, em co-autoria com Nelson Luiz Piôto D'Ávila escreveu a *Coleção Matemática Orgânica.*

A produção capixaba inspirada em Papy, *Coleção Matemática Orgânica*, escrita por José Merigueti e Nelson Luiz Piôto D'Ávila apresenta 3 volumes indicados para o ginasial: 5ª série, publicado em 1974, 6ª série, de 1975 e 7ª série, de 1976 (Figura 12). O Volume 4, referente à 8ª série, não chegou a ser publicado (Kill, 2004). A indicação desses volumes equivale hoje ao 6º, 7º e 8º anos do ensino fundamental, ou seja, alunos na faixa etária regular entre 11 e 13 anos.

Figura 12 – Coleção Matemática Orgânica



Fonte: Merigueti; D'Ávila (1974, 1975, 1976).

Diferente do manual de Sangiorgi (1965a), as classes de equivalência aparecem fortemente na apresentação dos números racionais da *Coleção Matemática Orgânica* (CMO).

No volume destinado à 5ª série Merigueti e D'Ávila (1974) tratam de conjuntos e funções, números naturais e números inteiros. A noção de conjuntos e suas operações, bem como as ideias de relações e funções são necessárias para a apresentação dos demais objetos matemáticos da obra, figurando em mais de 130 páginas.

Merigueti e D'Ávila (1975) iniciam o volume proposto para a 6ª série com o estudo do conjunto dos números racionais. A abordagem não apresenta outro subconstructo que não a classe de equivalência, uma vez que a própria ideia de fração é expressa como um tipo especial de estrutura algébrica. Não há uma seção específica para a apresentação de classe de equivalência, haja vista que o conceito permeia todo o capítulo. O índice do livro (Figura 13) indica a opção dos autores no que se refere à ordenação dos temas:

Figura 13 – CMO Volume 2: Índice

ÍNDICE

Fonte: Merigueti & D'Ávila, 1975 (p. 13-14).

O livro se inicia postulando que "no conjunto $\mathbb{Z}$ vale a lei do cancelamento para a multiplicação" (p.18) ou seja, que "se $a, b, c, \in \mathbb{Z}$ e $c \neq 0$, então: $ac = bc \Rightarrow a = b$" (p.18). Na sequência, define o conjunto dos inteiros não nulos, denotando-o por $\mathbb{Z}_0$ e mencionando a ideia de produto cartesiano. Os autores definem então $\mathbb{Z}\, x\, \mathbb{Z}_0$ por "compreensão", $\mathbb{Z}\, x\, \mathbb{Z}_0 = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{Z}\; e\; b \in \mathbb{Z}_0\}$ e por gráfico. Nesse conjunto, os autores definem a relação $\mathbb{Q}$ mostrada na Figura 14:

Figura 14 – A relação $\mathbb{Q}$

$$(a,b),\ (c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_0 \text{ então } (a,b)\ Q\ (c,d) \Leftrightarrow a\,.\,d = b\,.\,c$$

Fonte: Merigueti & D'Ávila (1975, p. 19).

São apresentados alguns exemplos numéricos dessa relação e um gráfico com pares relacionados com (2,3) via $\mathbb{Q}$. Embora os elementos do conjunto domínio sejam de natureza discreta, formado por pares ordenados inteiros, os autores representaram graficamente a situação com uma reta, ou seja, objeto matemático contínuo por construção. É verdade que os pares de (2,3) estão suportados nessa reta, mas isso não fica explícito na Figura 15, que deveria apresentar apenas um conjunto discreto de pontos.

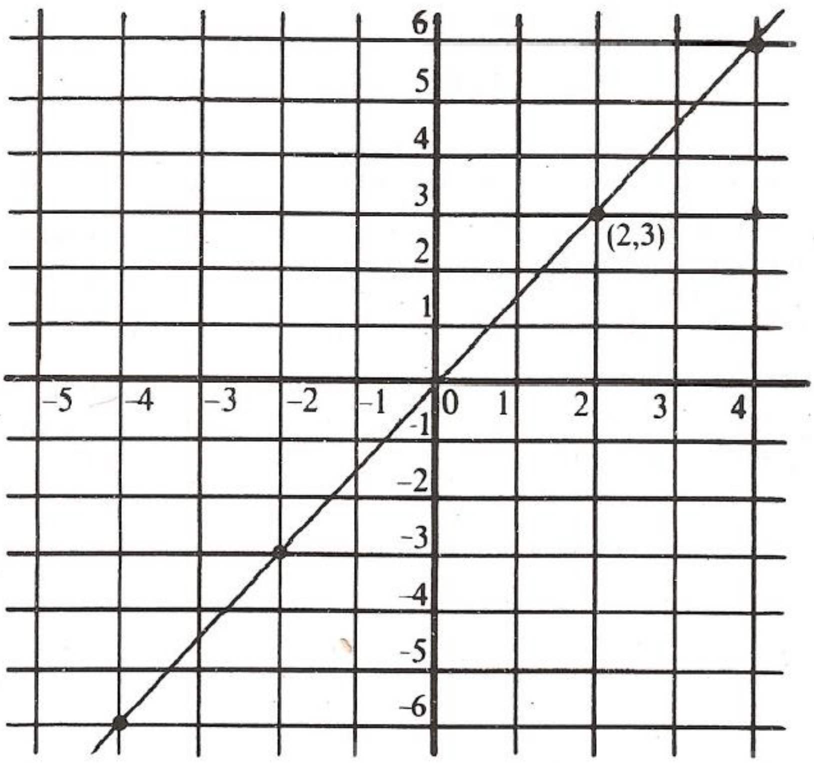
Figura 15 – Pares relacionados a (2,3) por $\mathbb{Q}$

Exemplos:

1 — $(2,3)\ Q\ (4,6)$ pois $2.6 = 12 = 3.4$

2 — $(-3,5)\ Q\ (6,-10)$ pois $(-3)\ (-10) = 30 = 5.6$

3 — $(1,9)\ \not{Q}\ (4,35)$ pois $1.35 = 35 \neq 36 = 9.4$



Fonte: Merigueti & D'Ávila (1975, p. 19).

A seção seguinte trata das propriedades de $\mathbb{Q}$, todas elas mostradas passo a passo via linguagem essencialmente simbólica e implicações lógicas. Verifica-se que $\mathbb{Q}$ é reflexiva, simétrica e transitiva. A transitividade está mostrada na Figura 16. Essas três propriedades permitem afirmar que $\mathbb{Q}$ é uma relação de equivalência, conforme sugestão de Catunda (1962).

Figura 16 – $\mathbb{Q}$ é transitiva

$(a,b)\ Q\ (c,d) \Rightarrow a.d = b.c$
$(c,d)\ Q\ (e,f) \Rightarrow c.f = d.e$

Acompanhe o que está feito a seguir, lembrando que em $\mathbb{Z}$, a multiplicação é comutativa e vale a lei do cancelamento (postulado do §1).

$$\left.\begin{matrix} ad = bc \\ e \\ cf = de \end{matrix}\right\} \Rightarrow adcf = bcde \Rightarrow afdc = bcde \Rightarrow af = be \Rightarrow (a,b)\ Q\ (e,f)$$

Portanto:

$(a,b)\ Q\ (c,d)$ e $(c,d)\ Q\ (e,f) \Rightarrow (a,b)\ Q\ (e,f)$

Podemos, pois, afirmar:

$\forall\ (a,b), (c,d), (e,f) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_0$
$(a,b)\ Q\ (c,d)$ e $(c,d)\ Q\ (e,f) \Rightarrow (a,b)\ Q\ (e,f)$

ou

Q é transitiva

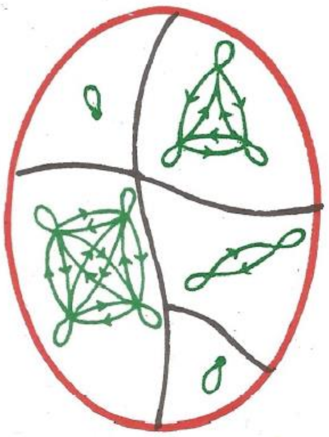
Fonte: Merigueti & D'Ávila (1975, p. 22).

No volume anterior, destinado a alunos da 5ª série, Merigueti e D'Ávila (1974) apresentaram uma definição de partição de um conjunto, no capítulo sobre operações com conjuntos e, também, a definição de relação de equivalência, no capítulo de relações. Esses conceitos apareceram ainda na definição de números inteiros e voltam a aparecer no contexto dos números racionais, como mostra a Figura 17:

Figura 17 – Partição ou classes de um conjunto

Exemplo:

Seja **E** um conjunto e **R** uma relação em **E**



R é reflexiva, simétrica e transitiva

$\Downarrow$

R é uma equivalência

$\Downarrow$

R determina uma partição $\mathscr{P}$ no conjunto
Os elementos do conjunto $\mathscr{P}$ (partição) são as classes desta partição.

Fonte: Merigueti & D'Ávila (1975, p. 23).

A partir daí, há uma sequência de implicações lógicas (Figura 18), que definem $\mathbb{Q}$ como o conjunto das classes de equivalências:

Figura 18 – Caracterização de $\mathbb{Q}$ via classe de equivalência

Q é reflexiva, simétrica e transitiva

$\Downarrow$

Q é uma equivalência

$\Downarrow$

Q determina uma partição no conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_0$

Os elementos do conjunto $\mathscr{P}$ são as classes desta partição.

Chamemos de $\mathbb{Q}$ o conjunto das classes da partição

portanto

$\mathbb{Q}$ é um conjunto de classes de equivalência.

Fonte: Merigueti & D'Ávila (1975, p. 23).

Destacamos que os símbolos de equivalência variam conforme o autor. Para representar a equivalência entre 2/3 e 4/6, Catunda (1962) utiliza (2,3) ∼ (4,6), Sangiorgi (1965a) denota a mesma situação por $\frac{2}{3} \equiv \frac{4}{6}$ e o CMO como (2,3) $\mathbb{Q}$ (4,6). Para as classes de equivalência, Sangiorgi (1965a) utiliza as notações $\frac{\overline{a}}{b}$ ou $\boxed{\frac{a}{b}}$ enquanto Merigueti e D'Ávila (1975) utilizam $\frac{a}{b}$ ou $[a, b]$, conforme Figura 19.

Figura 19 – Elementos de $\mathbb{Q}$

As classes serão anotadas por $[a,b]$ ou $\frac{a}{b}$

Logo:

$$\mathbb{Q} = \{[a,b] \mid a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}_0\}$$

ou também:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}_0\right\}$$

Fonte: Merigueti & D'Ávila (1975, p. 24).

De acordo com a *Coleção Matemática Orgânica*, se um elemento pertence a $\mathbb{Q}$ então ele é uma classe de equivalência. Na sequência, indicam um exemplo numérico e uma caracterização algébrica via linguagem simbólica (Figura 20):

Figura 20 – As classes de $\mathbb{Q}$

$$\frac{2}{3} = [2,3] = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_0 \mid (a,b)\ Q\ (2,3)\}$$

Assim $\frac{2}{3} = \{\dots\ (-8,-12),\ (-6,-9),\ (-4,-6),\ (-2,-3),\ (2,3),\ (4,6)\ \dots\}$

Se a classe $[a,b] \in \mathbb{Q}$

$$[a,b] = \frac{a}{b} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_0 \mid (x,y)\ Q\ (a,b)\}$$

Fonte: Merigueti & D'Ávila (1975, p. 25).

Por fim, Merigueti e D'Ávila definem que o conjunto de todas as classes de equivalência determinadas por $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{Z}\, x\, \mathbb{Z}_0$ é denominado conjunto dos números racionais (Figura 21) e cada classe é um *número racional*.

Figura 21 – Conjunto dos Números Racionais

$$\mathbb{Q} = \{[a,b] \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}_0\} = \left\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}_0\right\}$$

é o CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS

Fonte: Merigueti & D'Ávila (1975, p. 25).

Para caracterizar ainda mais a abordagem algébrica abstrata dos autores, retrataremos também as operações no conjunto dos números racionais. Na Figura 22, consta a definição da adição no conjunto $\mathbb{Q}$:

Figura 22 – Adição em $\mathbb{Q}$

$$\left.\begin{array}{c} (a,b)\ Q\ (e,f) \\ \text{e} \\ (c,d)\ Q\ (g,h) \end{array}\right\} \Rightarrow (ad + bc,\ bd)\ Q\ (eh + fg,\ fh)$$

Chamaremos o par $(ad + bc,\ bd)$ de soma dos pares (a,b) e (c,d).
Assim

$$(a,b) + (c,d) = (ad + bc,\ bd)$$

Fonte: Merigueti & D'Ávila (1975, p. 27).

As propriedades da adição são verificadas no texto e estão reunidas na Figura 23, o que permite aos autores concluir que o conjunto dos números racionais, munido dessa operação de adição, é um grupo comutativo:

Figura 23 – $\mathbb{Q}$, + é um Grupo Comutativo

As propriedades da adição do conjunto $\mathbb{Q}$

A adição é uma função $+: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$

$\forall\ [a,b],\ [c,d] \in \mathbb{Q};\ [a,b] + [c,d] = [c,d] + [a,b]$ (comutativa)

$\forall\ [a,b],\ [c,d],\ [e,f] \in \mathbb{Q}$
$([a,b] + [c,d]) + [e,f] = [a,b] + ([c,d] + [e,f])$ (associativa)

$\forall\ [a,b] \in \mathbb{Q}\ [a,b] + [0,m] = [a,b]$ (Existência do elemento
$[0,m] = 0$ neutro $0 = [0,m]$)

$\forall\ [a,b] \in \mathbb{Q},\ \exists\ [a,-b]$ tal que:
$[a,b] + [a,-b] = 0$
(Todo elemento de $\mathbb{Q}$ possui um simétrico)

Reunimos as propriedades acima dizendo simplesmente:

$\mathbb{Q}$, + é um grupo comutativo.

Fonte: Merigueti & D'Ávila (1975, p. 33).

Todo o encadeamento teórico objetiva concluir que o conjunto dos números racionais, quando munido das operações de adição e produto definidas, estrutura-se como um corpo (Figura 24):

Figura 24 – $\mathbb{Q}$, + , · é um Corpo

$\mathbb{Q}$, + é um grupo comutativo

$\mathbb{Q} - \{0\}$, . é um grupo comutativo

Em $\mathbb{Q}$, é distributiva com relação a +

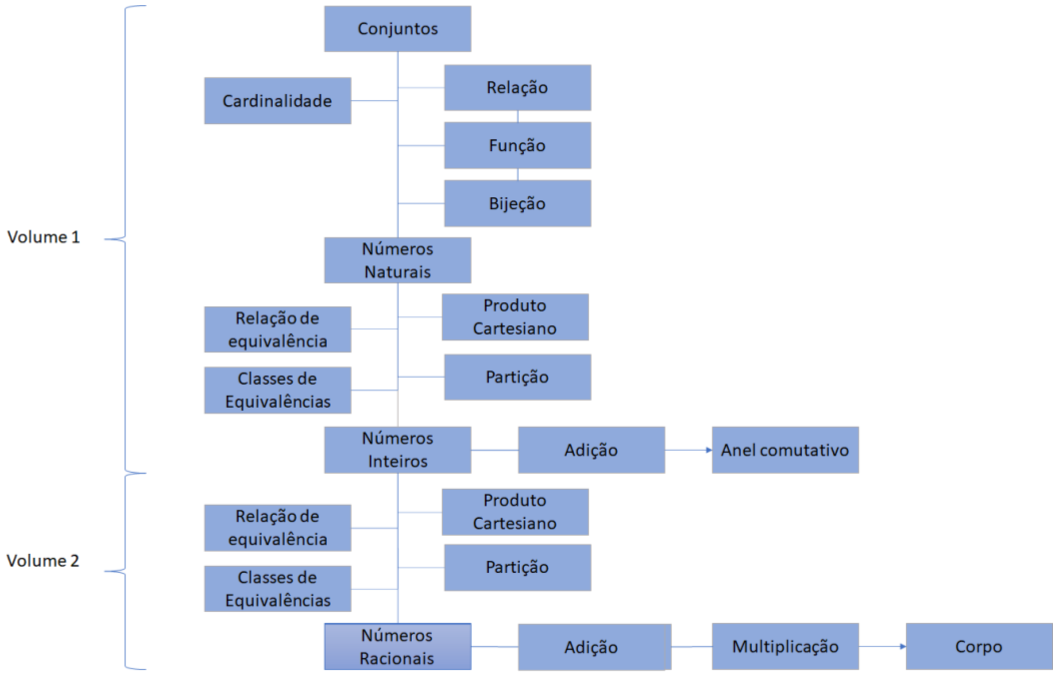
As três propriedades acima podem ser resumidas como segue:

$\mathbb{Q}$, +, . é um corpo

Fonte: Merigueti & D'Ávila (1975, p. 53).

A Figura 25 representa um esquema para a construção do conjunto dos números racionais via classes de equivalência, um recorte de acordo com as intenções do trabalho, conforme a proposta do CMO.

Figura 25 – Esquema do CMO para o conjunto dos números racionais



Fonte: Elaboração baseada em Merigueti & D'Ávila (1974. 1975).

O encadeamento de ideias, seguindo um caminho metodológico peculiar, é o que se percebe desde o primeiro volume da coleção. Primeiro, os autores apresentam definições e operações em conjuntos, cardinalidade, relação, função e bijeção. A partir de uma relação de bijeção com a cardinalidade de determinados conjuntos, apresentam a definição do conjunto dos números naturais. No produto cartesiano do conjunto dos naturais, mostram as definições das operações de adição e multiplicação, ordem, divisibilidade e subtração. Ainda no volume 1, em um produto cartesiano dos naturais, apresentam uma relação $\mathbb{Z}$, em que mostram ser uma relação de equivalência. Os autores então apresentam definições de adição, mostram propriedades e classificam o conjunto $\mathbb{Z}$, munido da operação de adição, como um grupo comutativo. Na sequência apresentam subtração, equações, multiplicação, valor absoluto e finalizam o volume 1 asseverando que o conjunto dos números inteiros, munido das operações de adição e multiplicação é um anel comutativo.

Merigueti & D'Ávila (1975) apresentam, na coleção, conceitos imbricados, com ponto de partida na teoria dos conjuntos e desdobramentos em estruturas algébricas. A via de constituição dos conjuntos numéricos, na perspectiva acadêmica/modernista, também se constituía como caminho metodológico adequado para o seu ensino.

Não foi possível perceber a mobilização do recurso à intuição, para a abordagem dos capítulos visitados, conforme os autores anunciaram na apresentação da coleção[7]. As estruturas algébricas exibidas eram dotadas de abstração e simbologia, cuja percepção e apreensão não eram evidentes e nem imediatas. Não há contextualização em nenhum momento, mantendo-se o tempo todo uma valorização da Matemática em seus aspectos lógico-dedutivos e formais.

Muito embora seja possível constatar a menção as classes de equivalência em livros didáticos publicados em meados da década de 1990 (Silveira & Marques, 1995), numa espécie de "espasmo" do movimento modernista, a investigação realizada coloca em causa uma pretensa interface amigável entre abordagens cientificistas e propósitos típicos da cultura escolar.

Considerações Finais

As análises sugerem que Sangiorgi, embora seja reconhecido como uma referência na divulgação do movimento modernista no Brasil, opta por uma transição suave quando do advento da nova Matemática. O professor paulistano incluiu, em seus livros didáticos, o tópico classe de equivalências em meio à sua proposta para o estudo sobre frações. Contudo, destoa do ideário metodológico de linha mais ferrenha, ou radical, que sugestionava o vislumbre dos objetos matemáticos pelo prisma das estruturas algébricas. Tal fato se comprova nos usos restritos para a classe de equivalência enquanto denominação do conjunto de todas as frações equivalentes a uma fração dada.

A *Coleção Matemática Orgânica* apresenta o conjunto dos números racionais utilizando o mesmo viés de exposição disponível no volume 1, quando da apresentação de outros conjuntos numéricos. O itinerário pode ser assim descrito: substrato teórico nas noções de conjunto; menção do par ordenado como elemento do conjunto referido; propriedades da relação de equivalência em questão, até a culminância com as classes de equivalência grupo aditivo e o conjunto dos números racionais, munido das operações de adição e produto, constituindo um corpo. Merigueti e D'Ávila, foram, portanto, mais radicais ao apresentar o conjunto dos números racionais pelo prisma dos conjuntos e suas estruturas algébricas, estritamente.

Uma análise comparativa das abordagens nas obras visitadas revela usos mais explícitos da intuição, quando da abordagem de frações, no livro proposto por Sangiorgi. O exemplo da

[7] Escrevem os autores no prefácio do livro: "Não pretendemos, com a nossa publicação, criar nenhum tipo de ilusão para os nossos alunos, pois, *apesar de haver explorado o aspecto intuitivo*, reconhecemos que, objetivamente, os caminhos da matemática são árduos e, consequentemente, requerem esforço pessoal" (Merigueti & D'Ávila, 1975, p. 11, grifo nosso).

barra de chocolate ilustrando o subconstructo parte-todo denota que o professor paulista concebia, especificamente nesse contexto, que outras possibilidades conceituais de exposição eram pertinentes, mesmo em um livro didático assumidamente modernista. No CMO a forte ênfase na teoria dos conjuntos, o recurso à lógica e à dedução, bem como a construção da ideia de fração enquanto uma estrutura algébrica, eram endereçadas à cultura escolar. Não restou explícito o manejo da intuição para a constituição da ideia de fração, conforme assumido pelos autores quando da apresentação da obra.

Dentre as rupturas e permanências históricas no currículo escolar brasileiro, identificamos a inclusão de estruturas algébricas com o advento do Movimento da Matemática Moderna e sua posterior descontinuação. Ainda que verifiquemos espasmos da apresentação de classes de equivalência em livros da década de 1990 (Silveira & Marques, 1995), os currículos nacionais prescritos posteriores ao MMM, Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998) e Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2017) não incluem classes de equivalência, enquanto conteúdo para a Educação Básica. Scheffer & Powell (2019) também não encontraram registros do subconstructo em obras recentemente analisadas.

Chervel (1990) ensina que a escola não é definida por uma "transmissão de saberes" ou "iniciação às ciências de referência", mas se pauta por temas criados historicamente "pela escola, na escola e para a escola" (p.180). Uma proposta curricular e metodológica alienígena à cultura escolar, quando confrontadas com reflexões de Chervel, fornecem elementos para compreender o declínio do movimento modernista. Especificamente sobre a descontinuação da abordagem de frações via classes de equivalências, nas prescrições curriculares e nos livros didáticos mais recentes, Behr, Lesh & Silver (1983) afirmam que a relação de números racionais com estruturas algébricas, dados os seus níveis de abstração e sofisticação, não é adequada a alunos do Ensino Fundamental. Moreira e David (2018) alertam que o professor da escola básica, e da mesma maneira os livros didáticos, precisam trabalhar com os significados concretos das frações e outros subconstructo, antes que o aluno possa alcançar a ideia abstrata de número racional. Uma outra questão levantada por esses autores diz respeito às definições formais das operações enquanto meros algoritmos para cálculos, mostrando-se pouco (ou nada) claros em termos de compreensão de significados e reduzindo-se a um formalismo, ou seja, um mero conjunto de regras. Nesse sentido, os Moreira e David (2018) defendem que a Matemática científica difere da Matemática escolar. Enquanto a primeira expressa significados relevantes que estão "impressos nas suas propriedades estruturais, postuladas ou deduzidas das definições formais de operação" (p. 68), na matemática escolar o conceito é "uma construção em processo, e não um alvo dado e estático a ser necessária e explicitamente atingido" (p. 67). A matemática acadêmica se mantém rígida e aderente aos seus métodos que lhe concedem cientificidade, enquanto no âmbito escolar outras possibilidades amplas de construção, constituição e entendimento de objetos matemáticos são validados, inclusive com recurso à intuição, independente de rigor ou formalismo.

Chervel (1990, p. 182) nos alerta que "quando a escola recusa, ou expulsa, depois de uma rodada", uma abordagem meramente científica, "não é pela incapacidade dos mestres em se adaptar", mas porque a escola tem outros propósitos e que o compromisso com a replicação dos "saberes eruditos" poderia comprometer seus desígnios. O contexto e as fontes visitadas comprovam que, mesmo entre obras e autores assumidamente modernistas, não havia consenso. Livros escolares e tratados científicos possuem objetivos distintos e isso conforma ou deforma objetos matemáticos, considerando as teleologias de cada publicação. Uma exposição de frações, enquanto classes de equivalência, pode ser vista como elegante e sofisticada em perspectiva científica. Contudo, pode não ensejar, junto aos estudantes, diálogos com o mundo vivido, um dos propósitos da escola.

Referências

Anais do V Encontro de Mestres (1962) São Paulo. [Dvd produzido pelo Ghemat/Capes em 2019]. Recuperado de https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/201461.

Bailey, D. H., Hoard, M. K., Nugent, L., & Geary, D. C. (2012). Competence with fractions predicts gains in mathematics achievement. *Journal of experimental child psychology*, *113*(3), 447-455.

Ball, D. L. (1993). Halves, pieces, and twoths: Constructing and using representational contexts in teaching fractions. In T. P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.). *Rational numbers: An integration of research* (pp. 157-196). New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates.

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. In Lesh, R., Lesh, R. A., & Landau, M. (Eds.). *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 91-125).

Brasil (1998). *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática*. Brasília: Ministério da educação e cultura/ Secretaria de Educação Fundamental.

Brasil (2017). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: Ministério da educação e cultura.

Candeias, R. P., & Monteiro, C. (2020). A unidade de referência no ensino dos números racionais: um olhar sobre manuais da formação de professores do ensino primário em Portugal (1844-1974). *HISTEMAT*, 6(3), 174-191.

Catunda, O. (1962) Os conceitos fundamentais da matemática: conjuntos e estruturas. In: *Anais do IV Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática*. Belém, Pará. [Dvd produzido pelo Ghemat/Capes em 2019]. Recuperado de https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/201461.

Chervel, A. (1990). História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. *Teoria & educação*, 2(2), 177-229.

Choppin, A. (2002). O historiador e o livro escolar. *Revista História da Educação*, 6(11), 5-24.

Elias, H. R. (2018). Os números racionais na matemática acadêmica: uma discussão visando à formação matemática de professores. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 32(61), 439-458.

Gomes, M. L. M. (2006). Os números racionais em três momentos da história da matemática escolar brasileira. *Boletim de Educação Matemática*, *19*(25), 17-44.

Hope, J. A., & Owens, D. T. (1987). An Analysis of the Difficulty of Learning Fractions. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *9*(4), 25-40.

Kieren, T. E. (1976) On the mathematical, cognitive and instructional. In: Richard A. Lesh (Ed). *Number and measurement* (pp. 101-144). Columbus, Ohio: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education.

Kieren, T. E. (1980) The rational number construct – its elements and mechanisms. In: T. E. Kieren (ed.) *Recent Research on Number Learning* (pp.125-150). Columbus: Eric/Smeac.

Kill, T. G. (2004). *O Estudo de Funções à luz das Reformas Curriculares: reflexos em livros-didáticos* (Dissertação de mestrado em Educação). Universidade Federal do Espírito Santo, Espírito Santo.

Lavorente, C. R. (2008). *A Matemática Moderna nos livros de Osvaldo Sangiorgi*. (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Lima, E. B. & Dias, A. L. M. (2010). A análise matemática no ensino universitário brasileiro: a contribuição de Omar Catunda. *Boletim de Educação Matemática*, 23(35A), 453-476.

Lopes, A. J. (2008). O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. *Boletim de Educação Matemática*, *21*(31), 1-22.

Magina, S., Bezerra, F., & Spinillo, A. (2009). Como desenvolver a compreensão da criança sobre fração? Uma experiência de ensino. *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos*, *90*(225).

Merigueti, J. & D'Ávila, N. L. P. *Coleção Matemática Orgânica*. Vitória: Brasília Editora S/A, 1974. 1v.

Merigueti, J. & D'Ávila, N. L. P. *Coleção Matemática Orgânica*. Vitória: Brasília Editora S/A, 1975. 2v.

Merigueti, J. & D'Ávila, N. L. P. *Coleção Matemática Orgânica*. Vitória: Brasília Editora S/A, 1976. 3v.

Moreira, P. C. & David, M. M. M. (2018). 2ed. *Formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar*. Autêntica.

Moreira, P. C. & Ferreira, M. C. C. (2008). A teoria dos subconstrutos e o número racional como operador: das estruturas algébricas às cognitivas. *Boletim de Educação Matemática*, *21*(31), 103-127.

Ripoll, C. C., Simas, F., Bortolossi, H., Rangel, L., Giraldo, V., Rezende, W., & Quintaneiro, W. (2020) *Frações no ensino fundamental*. Rio de Janeiro: Associação Livro Aberto. Recuperado de https://umlivroaberto.org/wp-content/uploads/2019/10/livro_professor_impressao.pdf

Sangiorgi, O. (1960) *Matemática para a 1ª série ginasial*. 70 ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional. Recuperado de https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/221455.

Sangiorgi, O. (1962) Introdução da matemática moderna no ensino secundário. In: *Anais do IV Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática*. Belém, Pará. [Dvd produzido pelo Ghemat/Capes em 2019]. Recuperado de https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/201461.

Sangiorgi, O. (1965a) *Matemática curso moderno – Volume 1 para os ginásios.* 5. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1 v. Recuperado de https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/221459.

Sangiorgi, O. (1965b). Introdução à matemática moderna no ensino secundário. In IV Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática. Belém, Pará. [Dvd produzido pelo Ghemat/Capes em 2019]. Recuperado de https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/201461.

Santos, V. D. (1997). *Avaliação de aprendizagem e raciocínio em matemática: métodos alternativos*. Rio de Janeiro: Projeto Fundão, Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Scheffer, N. F., & Powell, A. B. (2019). Frações nos livros brasileiros do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). *Revemop*, *1*(3), 476-503.

Silva, C. M. S. (2015). Livro aberto: uma análise histórica. *Perspectivas da Educação Matemática*, 8(18).

Silva, V. D. (2007). *Osvaldo Sangiorgi e "O fracasso da matemática moderna" no Brasil* (Dissertação de Mestrado em Educação). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Silveira, E. & Marques, M. (1995). *Matemática – 5ª série*. São Paulo, Moderna.

Teixeira, A. M. (2008) *O professor, o ensino de fração e o livro didático: um estudo* *investigativo* (Dissertação de mestrado profissional em ensino de matemática). Pontifícia Universidade Católica do São Paulo. São Paulo.

Torbeyns, J., Schneider, M., Xin, Z., & Siegler, R. S. (2015). Bridging the gap: Fraction understanding is central to mathematics achievement in students from three different continents. *Learning and Instruction*, *37*, 5-13.

Valente, W. R. (2008a). Quem somos nós, professores de matemática? *Cadernos Cedes*, 28(74), 11-23.

Valente, W. R. (2008b). Osvaldo Sangiorgi e o movimento da matemática moderna no Brasil. *Revista Diálogo Educacional*, v. 8, n. 25, p. 583-613, 2008.