HISTEMAT – Revista de História da Educação Matemática
Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 2447-6447

AS TRANSFORMAÇÕES DO CONCEITO DE FUNÇÕES HIPERBÓLICAS À LUZ DA TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

Aldo Peres Campos e Lopes[1]

RESUMO

Refletimos aqui como o ensino de Cálculo pode ser aprimorado, exemplificando em um conteúdo específico. Atividades que auxiliam a reflexão sobre os significados e os porquês dos conceitos ensinados e aprendidos, ajudam a pensar e resolver problemas a partir da definição do conceito. Usamos como sequência didática a História da Matemática, com o objetivo de atingir a Aprendizagem Significativa, de David Ausubel, dos conceitos estudados em Cálculo. Tal imbricação auxilia o aluno a construção do conhecimento matemático. Aqui usamos como exemplo o conteúdo de funções hiperbólicas, pois são apresentadas de uma forma sintética tanto nos atuais livros de cálculo, como pelos professores. Faremos uma análise de livros de Cálculo e verificaremos algumas mudanças no ensino dessas funções no decorrer do tempo.

Palavras-chave: História. Cálculo. Funções Hiperbólicas. Riccati. Lambert.

ABSTRACT

We reflect here how the teaching of Calculus can be improved. Activities that help the reflection on the meanings and the why of the concepts taught and learned, help to think and solve problems from the definability of the concept itself. We use as a didactic sequence the History of Mathematics, in order to achieve the Meaningful Learning, by David Ausubel, of the concepts studied in Calculus. Such imbrication assists the student in the construction of mathematical knowledge. Here we use as an example the contents of hyperbolic functions, as they are presented in a trivial way both current Calculus books as teachers. From the first systematic developments of these functions, made by Lambert and Riccati, together with old editions of Calculus books, it is possible to collect ideas for a better explanation of these functions, following the historical course and their epistemological development, confronting the past and the present.

Keywords: History. Calculus. Hyperbolic Functions. Riccati. Lambert.

[1] Docente da UNIFEI, *Campus* Itabira. E-mail: aldolopes@unifei.edu.br

INTRODUÇÃO

As dificuldades com a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral são várias (aqui usaremos apenas "disciplina de Cálculo" para referir ao *Cálculo 1* ou *Cálculo A*, ensinado nos cursos superiores, cuja base é o ensino de: limites, derivadas e integrais, de uma variável). Essas dificuldades incluem: ausência de conhecimentos prévios e falta de compreensão devido ao ritmo dado pelo professor na apresentação dos conteúdos e a não percepção do uso dos conteúdos estudados para o exercício profissional futuro (Mamona-Downs, Downs, 2008). Esse é um problema não só do Brasil, mas mundial (Souza Junior, Meyer, 2002; Nasser, 2009). Pesquisas são feitas com o objetivo de melhorar o índice de aproveitamento dos alunos em Cálculo. Um bom exemplo é a pesquisa feita por Campos e Pinto (2016).

Para obter a aprovação na disciplina, muitos alunos memorizam as informações e as retêm de maneira literal e mecânica, por um curto período de tempo. Destarte, numa fase temporal posterior, o aluno esquece o que foi aprendido, ou seja, não conseguirá evocar o conhecimento que fora "aprendido", pois não estará ancorado na estrutura cognitiva dele (Ausubel, 2002). Como o discente deslembrou o que aprendera, temos, portanto, uma evidência de que não houve uma aprendizagem significativa. Um estudante muitas vezes não consegue transferir a outras situações práticas os conceitos estudados, o que mostra que a qualidade da aprendizagem não é satisfatória e imbricada a aplicação de regras e procedimentos (Peixoto et al, 2008).

Um aluno olvidar um conteúdo aprendido em Cálculo é algo recorrente. Contudo, isso se torna mais sério quando esse aluno é um futuro professor. Algo que corrobora a baixa retenção do conhecimento aprendido em Cálculo não somente é a metodologia de ensino, mas também o tempo dedicado a cada conteúdo específico. Analisemos o caso em questão, o conteúdo de funções hiperbólicas. O ensino dessas funções, muitas vezes, é ignorado literalmente por alguns docentes (Reis, 2001). O tempo dedicado ao ensino dessas funções é, geralmente, apenas uma aula e os livros contém toda informação dessas funções em apenas uma seção.

Ao fazer uma análise cognitiva sobre as concepções de Cauchy a respeito de continuidade, Tall e Katz (2014) comentam que as idéias dele, apesar de não ser exatamente as mesmas apresentadas nos atuais livros de Cálculo, continua tendo mérito e sendo práticas. Também comentam que a evolução de ideias matemáticas não produz necessariamente melhores resultados e que nosso ponto de vista matemático atual não é o definitivo, sendo que não mais progrediremos. Pelo contrário, temos boas ideias matemáticas e podemos ter um futuro ainda melhor. Por exemplo, o modo como estudamos continuidade de funções e obtemos a função inversa não contém as sutilezas práticas de Cauchy. Esse pequeno exemplo ilustra o que acontece com o atual ensino de Cálculo. Muitos conceitos não seguem o decurso histórico de seu desenvolvimento. Um exemplo é o conteúdo de funções hiperbólicas.

Em 1569, O geográfo Gerhard Kremer (1512-1594), mais conhecido por seu nome latino, Gerhardus Mercator, fez a primeira e uma das mais importantes aplicações das funções hiperbólicas. Usando conceitos da geometria hiperbólica, ele publicou seu mapa, o qual ele é mais lembrado, de nome “Projeção de Mercator” em 18 folhas separadas, intitulado “*Nova representação e mais completa do globo terrestre devidamente adaptado para seu uso na navegação”*. A projeção resultou na elaboração de um mapa em que uma linha reta sempre faz um ângulo igual com cada meridiano. No entanto, outros pesquisadores, anos mais tarde, descobriram que as fórmulas usadas estavam ligadas às funções hiperbólicas (Vasconcelos, 2013).

Nossa revisão das pesquisas que tratam do tema, ou seja, o ensino e aprendizado do Cálculo, revelou a carência de estudos voltados a conteúdos específicos dessa disciplina, que visam a aprendizagem significativa e seguem o decurso histórico dos conceitos, apontando as dificuldades discentes (Nunes, Almouloud, Guerra, 2010). Porém, um bom estudo é o de Ferrão e Manrique (2014). Em particular, o estudo voltado a conteúdos específicos do Cálculo, como funções hiperbólicas, é pouco explorado.

Acreditamos que vários tópicos do Cálculo podem ser ensinados em uma sequência condizente com sua criação, com sua origem, e permitindo assim o aluno passar pelas etapas de desenvolvimento e de elaboração de um conhecimento matemático (Sousa, 2009). Dessa maneira, ele irá aplicar um conhecimento ativo na sua construção e não um formal, descontextualizado e já pronto.

No intento de propor um melhor ensino dos conteúdos de Cálculo visando uma aprendizagem contextualizada e significativa, mas não uma apresentação literal e formal, escolhermos a História da Matemática como estratégia de ensino, uma tendência em Educação Matemática, para alcançar tais objetivos (Roratto, Nogueira, Kato, 2011). Como o conteúdo de Cálculo é extenso, focaremos em uma parte específica. Os procedimentos usados não têm o intuito de gerar redundâncias metodológicas. Espera-se juntos possam se completar. Apresentamos aqui em particular um conteúdo do Cálculo, as funções hiperbólicas. Faremos uma análise de livros de Cálculo e verificaremos algumas mudanças no ensino dessas funções no decorrer do tempo. Seguimos de perto as notações de cada obra. Vejamos antes a base teórica.

INSPIRAÇÕES TEÓRICAS

A Teoria da Aprendizagem significativa proposta por David Ausubel (2002) enfoca a aprendizagem no contexto escolar e busca explicar como aprendemos e retemos um conhecimento novo. É uma aprendizagem na qual o novo conhecimento é interpretado à luz do que sabemos. Essa teoria Ausubeliana deve ser vista como um processo contínuo, pessoal, intencional, ativo, dinâmico, de interação (entre o que se aprende e o que já conhece) e interativo (entre sujeitos) produzido em um momento e em um contexto particular (Lemos, 2011). Assim, o fator que mais influencia a aprendizagem do estudante é o repertório de conhecimentos do estudante.

Para a aquisição de significados claros e precisos é indispensável a organização, clareza, solidez na estrutura cognitiva do estudante. Conceitos relevantes e abrangentes disponíveis na estrutura cognitiva atuam como âncora e são denominados subsunçores. Um subsunçor pode ser compreendido como um conceito ou uma ideia já consolidado na estrutura cognitiva e serve como âncora ao novo aprendizado para, assim, adquirir significado para o indivíduo (Moreira, 2006).

Três requisitos são necessários para o aprendizado ser significativo (Ausubel, Novak, Hanesian, 1980):

- ➔ O material a ser aprendido deve ser potencialmente significativo, devem ser lógicos e se relacionar com os subsunçores;
- ➔ Existência de ideias relevantes na estrutura cognitiva do aprendiz, servindo de âncora para o novo conteúdo;
- ➔ O indivíduo deve ter motivação e intenção em aprender.

Dessas três condições para a aprendizagem significativa, a única que o professor não tem controle direto é a terceira, a disposição do estudante em aprender (Novak, Cañas, 2010). Entretanto, o docente pode encontrar um controle indireto sobre essa escolha nas estratégias de ensino e de avaliação usadas, relacionando bem os subsunçores com o novo conteúdo.

Um material de aprendizagem pode ser potencialmente significativo, ou seja, um material que relaciona de uma forma não-arbitraria e não-literal à estrutura cognitiva do aprendiz, transformando o significado lógico em psicológico (Ausubel, 2002). Assim, o processo de subsunção é aplicado, porém é mister o propósito do aluno em aprender de uma forma não mecânica e sim, significativamente.

A aprendizagem significativa é um processo complicado e exige um longo tempo para ser concluída. É com o passar do tempo que os conceitos irão se organizando, estabilizando e consolidando na estrutura cognitiva do aluno (Ausubel, 2002). Por isso, foi escolhido um tópico do Cálculo para se fazer uma abordagem histórica com o objetivo de se atingir a aprendizagem significativa, pois notamos que é algo plausível de ser feito num curso de Cálculo, sem muito dispêndio (referimos ao tempo a ser usado pelo educador para elaborar o material necessário e a adequação a ementa).

Estudar um conceito através de uma sequência didática tendo como guia a História da Matemática, pode levar à ocorrência de aprendizagem significativa (Roratto, Nogueira, Kato, 2011). Destarte, empregando a evolução histórica linear, o aluno atua semelhante um matemático e não apenas reproduz o conhecimento. Adicionalmente, o ensino fica contextualizado e é reduzido o problema de se iniciar de casos formais e abstratos. Lembrando que o processo de aprendizagem é iniciado por um contexto mais intuitivo e os níveis de abstração e formalismo vão se aumentando gradativamente, o conteudismo não é levado ao pé da letra. Nesse processo gradual de formalização do novo conhecimento, o estudante usará conhecimentos previamente aprendidos, que servirão de subsunçores, aumentando a consistência e promovendo a aprendizagem significativa.

Segundo Sousa (2009), educar "seria proporcionar ao aluno um encontro pedagógico com os conceitos; a formação de uma visão de transformação e de movimento contínuo da realidade humana".

Sabemos dos possíveis estorvos inerentes ao uso da História da Matemática nesse ângulo na sala de aula, como o tempo consumido para o ensino de um conceito. Entretanto, no caso das funções hiperbólicas, acreditamos que o ensino na perspectiva abordada terá sentido para os alunos e não será algo artificial carecendo significado. Além disso, o tempo desprendido será ligeiramente maior, não provocando prejuízo para a ementa da disciplina.

Faremos um rastreamento historiográfico dos livros de Cálculo do início do século XX até os nossos dias, visando as nuances epistemológicas das funções hiperbólicas. Entretanto, para termos uma base comparativa, voltemos à origem dessas funções.

FUNÇÕES HIPERBÓLICAS: o início

Faremos um mapeamento de informações acerca da origem das funções hiperbólicas. Focaremos nos trabalhos de Lambert e Riccati. Cruzaremos os dados obtidos e então, extraímos informações que se coadunam.

Buscando uma primeira aparição das funções hiperbólicas é natural procurar nos trabalhos de Leonhard Paul Euler. De fato, as expressões $(e^x - e^{-x})/2$ e $(e^x + e^{-x})/2$ aparecem no primeiro volume de *Introductio in analysin infinitorum* de Euler (1748). Ao se referir a essas duas $\frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2i}$, Euler não utilizou o termo "hiperbólico" ou outra nomenclatura e

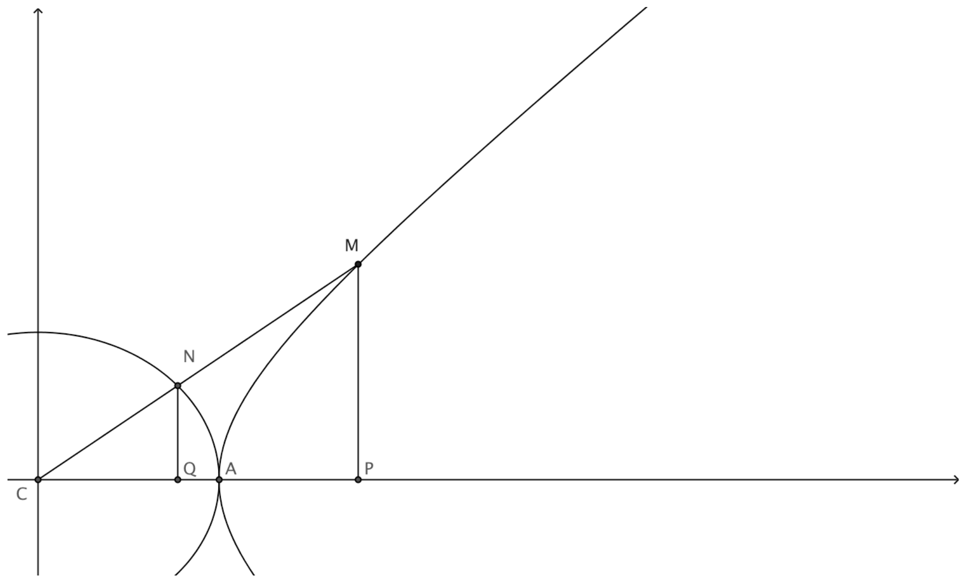
também não foi usado alguma notação específica.

Euler desenvolveu uma estratégia para encontrar uma representação de sen x e cos x por um produto de infinitos termos tomando como ponto de partida a expressão $an - zn$ (Euler, 1748, p. 119-120). Já era conhecido o seguinte fato (em que $i^2 = -1$ e usando a mesma notação dele):

$$\frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2i} = sin.z = z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \ etc$$

O próximo passo que Euler aparentemente pretendia era desenvolver essa expressão acima e encontrar um produto infinito. Na expressão $an - zn$, fazendo $n = i$, $a = 1 + x/i$ e $z = 1 - x/i$ (nesse caso, i representava uma quantidade infinita), ele deduziu que $e^x - e^{-x}$ tinha fatores a forma $2\text{-}2xx/ii - 2(1\text{-}xx/ii)cos.\ 2k\pi/n$. O resultado dos cálculos o levou a seguinte expressão:

Figura 1 – Hipérbole equilátera e círculo unitário



$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \left(1 + \frac{xx}{\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{xx}{4\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{xx}{9\pi\pi}\right) etc = 1 + \frac{x^4}{1.2.3.4.5} + \frac{x^6}{1.2 \ldots 7} + etc$$

Fonte: Artigo *"Mémoires"* (Lambert, 1761, p. 308).

Nesta igualdade encontrada, Euler usou a substituição $x=zi$ para obter uma nova série para o seno que se transforma num produto de infinito de termos:

$$\boldsymbol{sin.z = z\left(1 - \frac{zz}{\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{zz}{4\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{zz}{9\pi\pi}\right)etc = z\left(1 - \frac{z}{\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{\pi}\right)\left(1 - \frac{z}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{2\pi}\right)etc}$$

Um cálculo similar foi feito para função cosseno. Enfim, Euler chega ao seu aparente objetivo: uma representação das funções seno e cosseno por produtos infinitos. Para atingir esse objetivo, as expressões (ex – e-x)/2 e (ex + e-x)/2 tiveram um importante papel. Assim, estava feito o alicerce para a construção e o início das funções hiperbólicas.

Alguns anos mais tarde, um matemático suíço se destacava. Johann Heinrich Lambert é lembrado pela prova da irracionalidade de *pi* e considerado um precursor das geometrias não-euclidianas. Porém, os trabalhos de Lambert foram em diversas áreas. Ele foi um prolífico escritor, escrevendo mais de 150 artigos para academia de Berlim. Além disso, há outros livros e artigos não publicados, escritos em Latim, Francês e Alemão. As áreas em que publicou foram: lógica, cartografia, matemática, física, astronomia, entre outras.

Em 1761, Lambert apresentou um artigo para academia de ciências de Berlim, que logou se tornou famoso: *Mémoires sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes, circulaires et logarithmiques*. Esse artigo se tornou conhecido principalmente por dar a primeira prova de que pi é irracional. Entretanto, Lambert não finalizou este artigo nesse ponto. Ele voltou a atenção para comparação das “transcendentes circulares” (sin v e cos v) com as análogas “quantidades logarítmicas transcendentes” (no original: “*quantités transcendentes logarithmique*”) que são $(e^v - e^{-v})/2$ e $(e^v + e^{-v})/2$. Ele observou o seguinte no §73 de sua obra (Lambert, 1761 p. 310). Na série de potências da transcendente circular sen v há termos com sinais positivos e negativos. Deixando todos os sinais positivos, obtêm-se a série de potências para $(e^v - e^{-v})/2$. De modo similar, da série para cos v obtêm-se a série de potências para $(e^v + e^{-v})/2$ deixando todos termos positivos.

Esse importante artigo de Lambert de 1761 levou a outros trabalhos: a demonstração de que “*e*” não satisfaz uma equação algébrica com coeficientes racionais, ou seja, é um número transcendental. Essa foi uma conjectura de Lambert que foi demonstrada por Charles Hermite em 1873. Em 1882 Lindemann provou que pi é transcendental.

Apesar de usar as expressões das quantidades logarítmicas transcendentes $(e^v - e^{-v})/2$ e $(e^v + e^{-v})/2$, Lambert não deu nenhuma notação específica até então. Por outro lado, ele observou que existia uma relação entre essas expressões e as quantidades transcendentes circulares sen v e cos v.

No §75 do artigo de 1761, Lambert continuou sua comparação entre as quantidades transcendentes circulares sen v e cos v e as quantidades logarítmicas transcendentes $(e^v - e^{-v})/2$ e $(e^v + e^{-v})/2$. Contudo, ele utilizou a hipérbole equilátera ($x^2 - y^2 = 1$) para definir as funções hiperbólicas de uma maneira análoga à definição de funções trigonométricas por meio do círculo unitário ($x^2 + y^2 = 1$). Usando relações geométricas e série de potências, ele identificou em que ponto aparece as expressões $(e^v - e^{-v})/2$ e $(e^v + e^{-v})/2$ e fez um quadro comparativos destas expressões que aparecem na hipérbole e das que aparecem no círculo.

Na Figura da hipérbole equilátera e do círculo unitário, temos que *C* é a origem do plano cartesiano, *N* é um ponto no círculo e *M* é um ponto na hipérbole. Também, *A* é o ponto (1,0) que pertence tanto ao círculo como à hipérbole. Os pontos Q e P estão no eixo x e os segmento QN e PM são perpendiculares ao eixo x. Com isso, Lambert criou uma tabela que reproduzimos aqui na Tabela 1 a maioria dos pontos importantes.

Estamos seguindo as notações do próprio Lambert. O interessante é que se trata de uma notação bem próxima ao que se é usada hoje em dia. Na tabela, "*tang*" é a notação para tangente da época, tang $\varphi^2 = (\text{tang } \varphi)^2$, u:2 é o mesmo que $u/2$ e xx é o mesmo que x^2. Essas notações antigas não interferem no entendimento, pois são de fácil compreensão.

Tabela 1 – Desenvolvimento de Lambert

pour l'hyperbole	*pour le cercle*
l'abscisse $CP = \xi$	$\mathrm{CQ} = x$
l'ordené $PM = \eta$	$\mathrm{QN} = y$
le segment AMCA = u:2	ANCA = v:2
et il fera	
tang $\varphi = \eta/\xi$	tang $\varphi = y/x$
$1 + \eta\eta = \xi\xi = \eta\eta \cot \varphi^2$	$1 - yy = xx = yy \cot \varphi^2$
$\xi\xi - 1 = \eta\eta = \xi\xi$ tang φ^2	$1\text{-}xx = yy = xx$ tang φ^2
$CM^2 = \xi^2 + \eta^2 = \xi^2(1+\text{tang } \varphi^2)$ $= ((1+\text{tang } \varphi^2)/(1- \text{tang } \varphi^2))$	$CN^2 = x^2+y^2 = x^2(1+\text{tang } \varphi^2)$ $= (1+\text{tang } \varphi^2)/(1+ \text{tang } \varphi^2) = 1$
Done	
$+ du = d\varphi \,.\, ((1+\text{tang } \varphi^2)/(1- \text{tang } \varphi^2))$ $= d \text{ tang } \varphi/(1- \text{tang } \varphi^2)$	$dv = d\varphi = d \text{ tang } \varphi/(1+ \text{tang } \varphi^2)$
$+ d\xi = (\text{tang } \varphi\ d \text{ tang } \varphi)/(1- \text{tang } \varphi^2)^{3:2}$	$- dx = (\text{tang } \varphi\ d \text{ tang } \varphi)/(1+ \text{tang } \varphi^2)^{3:2}$
$+ d\eta = d \text{ tang } \varphi/(1- \text{tang } \varphi^2)^{3:2}$	$+ dy = d \text{ tang } \varphi/(1+ \text{tang } \varphi^2)^{3:2}$
$+ d\xi : du = \eta$	$- dx : dv = y$
$+ d\eta : du = \xi$	$- dy : dv = x$
$+ d\xi = \mathrm{d}\eta \,.\, \text{tang } \varphi$	$- dx : dy = \text{tang } \varphi$

Fonte: Artigo *"Mémoires"* (Lambert, 1761, p. 309).

Usando as relações obtidas na Tabela 1, Lambert encontrou as séries de potências de ξ e de η, ambas em função de u. Tais séries são as mesmas encontradas por Euler jpara $(e^v - e^{-v})/2$ e $(e^v + e^{-v})/2$.

Em seu outro artigo, *Observations trigonometriques* de 1770, Lambert voltou sua atenção ao desenvolvimento de suas “funções logarítmicas transcendentais” e as similaridades com as funções trigonométricas circulares. Devido às similaridades das parametrizações do círculo e da hipérbole, ele mesmo disse (no §6) que não havia nada que repugna o uso original de “seno” e “cosseno” no uso dos termos “seno hiperbólico” e “cosseno hiperbólico” para denotar a abcissa e ordenada da hipérbole. Também afirmou que encontrou essas expressões num trabalho anterior de Riccati (Lambert, 1770, p. 330).

Lambert usou os nomenclaturas *sin hyp* e *cos hyp* para definir as expressões $(e^{v} - e^{-v})/2$ e $(e^{v} + e^{-v})/2$. A razão inicial para Lambert usar as funções hiperbólicas em 1768 era simplificar cálculos envolvendo triângulos. Ele observou que não era necessário definir novas funções para esse objetivo. Ele criou uma tábua de logaritmos de alguns valores trigonométricos que serviria para resolver o problema inicial que se encontra no §11 e no §16 (Lambert, 1768). Contudo, ele observou que era apenas um uso possível para as funções hiperbólicas na matemática. Um outro uso que ele fez das funções hiperbólicas foi na simplificação no método de solução para equações (Lambert, 1768).

Lambert citou em seu trabalho de 1768 Vincenzo de Riccati. Este era o segundo filho de Jacopo Riccati de quem foi retirado o nome para as Equações de Riccati. O filho foi jesuíta e estudou e ensinou em diversos lugares.

Riccati usou as funções hiperbólicas nos dois volumes de *Opusculorum ad res physicas, et mathematicas pertinentium* (1757-1762). Usando uma hipérbole, definou as funções “seno hiperbólico” e “cosseno hiperbólico” de uma maneira análoga às definições de “seno circular” e “cosseno circular”. Riccati não assumiu explicitamente que se tratava de um círculo unitário e de uma hipérbole equilátera. Entretanto, suas definições são análogas às de Lambert. Ele encontrou diversas identidades das funções seno e cosseno hiperbólicas e aplicou na solução de equações. Ele também encontrou a representação em séries para o seno e cosseno hiperbólicos. Esses resultados aparecem no volume 1, *Opusculorm IV*.

Num livro em dois volumes, trabalho em colaboração com Girolamo Saldini, *Institutiones analyticae* (1765-1767), Riccati aprofundou um pouco mais no estudo das funções hiperbólicas. Ele obteve outras identidades, as derivadas e relações com a função exponencial.

Algumas ideias do trabalho *Institutiones* (1765-1767), de Riccati, aparecem no artigo *Mémoire* de Lambert (1761). As anteriores publicações de Riccati sugere que este estava familiarizado com as analogias entre as funções circulares e hiperbólicas. Entretanto, ao publicar o artigo *Mémoire* em 1761, Lambert parece não estar familiarizado com os trabalhos de Riccati publicado anos antes. A motivação de cada um deles para desenvolver as funções hiperbólicas era bem diferentes. Por outro lado, num artigo posterior, de 1768, Lambert deu o crédito a Riccati pelo uso inicial dos termos "seno hiperbólico" e "cosseno hiperbólico" (Lambert, 1768, p. 330).

Apesar da aparente independência dos trabalhos de Riccati não teve prioridade na sua publicação. Ou seja, ele não é reconhecido como o originador das funções hiperbólicas, mas sim Lambert. Isso se deve a vários fatores. Os trabalhos de Lambert relacionados com as funções hiperbólicas estavam mais no centro das ideias matemáticas de seu tempo. Também, os matemáticos que o sucederam logo começaram a estudar a obra dele, principalmente aqueles voltados para a geometria não euclidiana. Um outro ponto a favor de Lambert foi a escrita. Os artigos publicados por ele são mais disponíveis e foram escritos numa língua mais acessível, com uma notação matemática mais próxima da que usamos hoje em dia. Riccati, por outro lado, usou uma notação mais antiga e escreveu em latim. Por esses fatos, é mais fácil contar a história de Lambert (Von Braunmuhl, 1903 apud Barnett, 2004).

Esse fato foi também observado por Janet H. Barnett (2004).

Analisaremos alguns textos do século passado, focalizando as nuances na parte expositiva e exploratória do conteúdo de funções hiperbólicas. Todos os textos foram, e alguns ainda são, importantes no período histórico analisado. Começamos fazendo um rastreamento historiográfico dos livros de Cálculo do início do século XX.

INÍCIO DO SÉCULO XX

Antes dos anos 1900, alguns livros importantes para a época foram utilizados para o ensino de Cálculo. O livro de Cálculo Diferencial e integral de Lacroix (1867), *Traité Élémentaire de Calcul,* talvez foi "o mais famoso e ambicioso livro no tema [cálculo] que apareceu na época" (Boyer, 1949, p.264). Esse livro foi traduzido para várias línguas ao longo do século XIX e reeditado algumas vezes. Inclusive para o português essa obra foi traduzida, em 1912, por Francisco Cordeiro da Silva Torres Alvin (1775-1856), professor da Academia Militar do Rio de Janeiro. De acordo com Silva (1996), esse livro se tornou o primeiro livro-texto de Cálculo, em língua portuguesa, a ser usado para o ensino da matemática superior no Brasil.

Entretanto, o *Traité du Calcul* de Lacroix tem algumas lacunas, como a falta de definição dos conceitos de função e de limite. Também, não apresenta as funções hiperbólicas. Podemos citar outros livros importantes da época que não contém essas funções, como o livro de Cauchy (1821), que contribuiu para o desenvolvimento do Cálculo, ou o livro de Genocchi e Peano (1884).

Os livros que continham as funções hiperbólicas eram os livros de Geometria. Um bom exemplo, é o livro *Uniplanar Algebra* de Irving Stringham (1893). Esse livro, tido como excelente (Archibald, 1935), no capítulo II, " GONIOMETRIC AND HYPERBOLIC RATIOS", a seção X "Hyperbolic Ratios" (p. 55-65) é dedicada ao estudo dessas funções. É feito uma sequência de apresentação do conteúdo bem próxima daquela feita por Lambert. É feita a construção geométrica da hipérbole equilátera e definido a área do setor hiperbólico, também é demonstrado as identidades hiperbólicas e as inversas dessas funções. O autor calcula o limite $\text{senh}(u)/u$, quanto u tende a zero. Esse limite é importante e é demonstrado também o limite de $\text{sen}(\theta)/\theta$, quando θ tende a 0. Nos dois casos, o resultado é igual a 1. No capítulo seguinte, que trata das funções complexas é feito um estudo em que relaciona as funções circulares e hiperbólicas por meio da matemática complexa (p. 102), que é um caso particular das funções cíclicas. Esse estudo relacionando os números complexos e as funções hiperbólicas foi retomado anos mais tarde por Durell (Durell, Robson, 1930), porém não tão extenso e abrangente quanto o estudo de Stringham. O livro de Stringham seria completo no quesito das funções hiperbólicas se explanasse essas funções também por séries de potências.

Na época da virada do milênio, semelhante aos livros que os precederam, os livros de cálculo em geral não continham as funções hiperbólicas. Eram raros os livros de mencionavam tais funções.

Das exceções, podemos citar o livro de Love e Rainville (1916), (esse livro teve dezenas de edições até 2013, ou seja, mais de um século de existência e de uso). Este livro, no capítulo V, com o tema "*Differentiation of Transcendental Functions*", na parte II, "*Exponential and Logarithmic Functions*", tem uma breve seção, a de número 48, dedicada às funções hiperbólicas. Essa acanhada seção, que não preenche uma página inteira, contém a definição das funções senh (x) e cosh (x) por meio da função exponencial e^x. Em seguida, é definido a função tanh (x). As outras funções hiperbólicas (cossech(x), sech(x) e coth(x)) são ditas que são definidas reciprocamente. Depois, a função hiperbólica inversa senh^{-1}(x) é apresentada, apenas simbolicamente. As demais inversas estão contidas no "*etc*" deixado pelos autores. Após essa breve explicação, sem nenhum recurso gráfico ou nenhuma informação a mais, há três exercícios: para provar identidades básicas das funções hiperbólicas e mostrar quais são as derivadas de senh (x) e cosh (x).

Na primeira metade do século XX havia uma distinta diferença de conteúdos matemáticos, em comparação com os atuais cursos superiores. O Cálculo era separado da Geometria, esta continha as funções hiperbólicas, com boas explanações, e aquele continha o conteúdo de limite, derivadas (inclusive as parciais), séries e integrais.

DÉCADA DE 1930: Durell

O livro *Advance Trigonometry* de Clement Vavasor Durell e Alan Robson tem dezenas de edições publicadas entre 1930 e 2012. É um bom texto de referência para professores que ensinam geometria nos cursos superiores, bom também para um estudo pessoal. O texto oferece uma apresentação lógica e clara dos tópicos que envolvem triângulos, quadriláteros, ângulos, funções logarítmicas, exponenciais, complexas e outros.

O livro de Durell e Robson (1930) usa as notações sh(x) para senh(x) e ch(x) para cosh(x). Aqui seguiremos as tradicionais notações atuais em português.

O capítulo VI tem o tema "*The Special Hyperbolic Functions*" . A primeira seção começa apresentando as as séries de potências de e^x e e^{-x}. Em seguida apresenta as séries da metade da soma e diferença dessas funções e diz: compare com as séries apresentadas anteriormente de sen(x) e cos(x). E completa: como o resultado apresenta semelhanças da função cos(x) e $(e^x + e^{-x})/2$ e da função sen(x) com $(e^x - e^{-x})/2$, definimos essas novas funções por cosseno hiperbólico e seno hiperbólico. Ressaltamos que esse modo de introduzir as funções hiperbólicas segue o decurso histórico de Lambert.

Na seção seguinte, Durell e Robson (1930) apresenta as derivadas e integrais das funções senh(x) e cosh(x). Em seguida, resolve dois exemplos de derivação e integração envolvendo essas funções. Um fato interessante dessa seção é a apresentação de uma equação diferencial simples $d^2y/dx^2 = y$ cuja resolução envolve as funções senh(x) e cosh(x), ou seja, a solução é da forma: y=A cosh(x)+B senh(x). Eles comparam com a solução de $d^2y/dx^2 = y$ que é y = A cos(x)+B sen(x), nos dois casos A e B são constantes arbitrárias. Assim, os autores seguem a metodologia de Lambert de sempre fazer uma analogia com as funções circulares, algo importante para uma aprendizagem significativa.

O enfoque da próxima seção são as funções inversas hiperbólicas. É demonstrado como se chega à expressão da função hiperbólica inversa usando logaritmo. A seção finaliza mostrando, por exemplos, técnicas de integração que envolvem essas funções.

No Capítulo X, de tema “*One-Valued Functions of a Complex Variable*”, na seção de tema “*The Generalised Hyperbolic Functions*”, é feito algo singular. As funções hiperbólicas são relacionadas aos números complexos, por isso o nome funções hiperbólicas generalizadas. Seguindo a linha histórica, os autores apresentam as séries de potências de cosh(z) e de senh(z), sendo z um número complexo. Até esse ponto não há muita novidade, mas os autores começam a apresentar e demonstrar as identidades:

$$\cos(iz) = \cosh(z), \ \mathrm{sen}(iz) = i\,\mathrm{senh}(z)$$

Essas identidades acima implicam na demonstração de

$$\mathrm{senh}(A+B) = \mathrm{senh}(A)\cosh(B)+\cosh(A)\,\mathrm{senh}(B)$$

e de

$$\cosh(z+2n\pi i) = \cosh(z), \ \mathrm{senh}(z+2n\pi i) = \mathrm{senh}(z) \ \text{ e } \ \tanh(z+n\pi i) = \tanh(z),$$

Essas últimas identidades mostram que as funções hiperbólicas generalizadas são periódicas. Outras identidades são demonstradas como as seguintes:

$$\cos(x+iy) = \cos(x)\cosh(y) - i\,\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{senh}(y)$$

$$\mathrm{sen}(x+iy) = \mathrm{sen}(x)\cosh(y) + i\cos(x)\,\mathrm{senh}(y)$$

Essas identidades anteriores podem ser usadas para demonstrar identidades ou resultados de somas que não envolvam diretamente números complexos.

Em suma, esse livro é bem completo e segue a linha histórica do descobrimento das funções hiperbólicas. Além disso, é um dos poucos livros a apresentar as funções hiperbólicas generalizadas. Porém, assim como consta nos escritos de Lambert (1761), faltou apresentar o significado da variável x em senh(x) e relacioná-la com a hipérbole. Além disso, dessemelhante de Lambert novamente, nenhuma figura que ajude o entendimento dessas funções há no livro de Durell e Robson (1930).

DÉCADA DE 1940: Whyburn

O livro *First year college mathematics with applications* de Paul Harold Daus e William Marvin Whyburn teve duas edições publicadas em 1949. A *Mathematical Association of America* (*MMA*) disse o seguinte sobre o livro:

> This text is design for students who have had a minimum of trinning in mathematics, who do not expect to specialize in mathematics or science, but who want a firmer grounding in what useful mathematics they have had, and such additional training as they may find interesting and useful in later life.
>
> (College Text Books, 1955).

Whyburn estava interessado no ensino de todos os níveis. Ele atendia bem desde alunos de graduação até alunos de pós-graduação. Um dos seus preceitos nas salas de aulas era: dar ao aluno algo que ele possa fazer. Ele se mostrava sinceramente preocupado com o progresso acadêmico e bem-estar dos alunos. Além de várias contribuições à Matemática, por dois anos foi o presidente da *MMA* (Reid, 1973).

Fazendo uma comparação com o atual ensino de Matemática Superior, esse livro de Daus e Whyburn (1949) é uma união dos conteúdos de um pré-Cálculo e Geometria Analítica. No capítulo 8, "*Exponential and Logarithmic Functions*", as seções 44.2 e 44.3 são dedicadas ao estudo das funções hiperbólicas.

O livro começa a seção 44.2 definindo as funções hiperbólicas senh(x), cosh(x) e tanh(x) por meio da função exponencial. Há quatro subseções curtas. Na primeira, intitulada "*Graphs*", é apresentado os gráficos dessas três funções numa mesma figura. Na segunda, "*Identities*", as identidades básicas envolvendo senh(u) e cosh(u) são demonstradas. Nessa seção, uma observação importante é feita: o parâmetro u em (x = senh u, y = cosh u) está relacionado à area de um setor hiperbólico, mas mais detalhes será dado num curso de Cálculo. As duas últimas subseções são aplicações que envolvem essas funções: catenária e crescimento populacional.

A seção seguinte, 44.3, é dedicada a explicar as inversas das funções hiperbólicas senh(x), cosh(x) e tanh(x). Os exercícios dessa parte são divididos em "*Oral*" e "*Written*" e contêm algumas aplicações essas funções, como crescimento populacional e resistência do ar na queda de um objeto, que são os exercícios 5, 13 e 14.

Então, concluímos que as funções hiperbólicas foram incorporadas aos livros de Cálculo com mais de um século e meio após a descoberta dessas funções.

MEADOS DO SÉCULO XX

Por volta dos anos 1950 e 1960 surgiram livros de Cálculo com conteúdo ligeiramente diferente daqueles que os antecederam. Muitos fizeram sucesso na época e depois foram substituídos por outros livros. Outros livros por outro lado, continuam sendo usados ou servindo de referências.

Num antigo livro tradicional de Cálculo, Piskunov (1969) fala das funções hiperbólicas apenas no capítulo de derivadas. Porém, faz uma comparação com as funções trigonométricas e apresenta o significado de x tanto em senh(x) como em sen(x). Como feito por Lambert, x representa o dobro de uma área (veja a região *ACM* da Figura 1). Esse importante conceito não tem sido mais apresentado na maioria dos livros de cálculo ao definir as funções hiperbólicas.

O CÁLCULO DE THOMAS

Um bom exemplo para o conteúdo de funções hiperbólicas é a primeira edição do livro de Cálculo de George Brinton Thomas (1968). O conteúdo é apresentado de uma forma direta, mas contendo os detalhes necessários para uma aprendizagem significativa. O livro que precedeu a este é o Cálculo com Geometria Analítica do mesmo autor (Thomas, 1952), que recebeu o seguinte comentário da *Mathematical Association of America*:

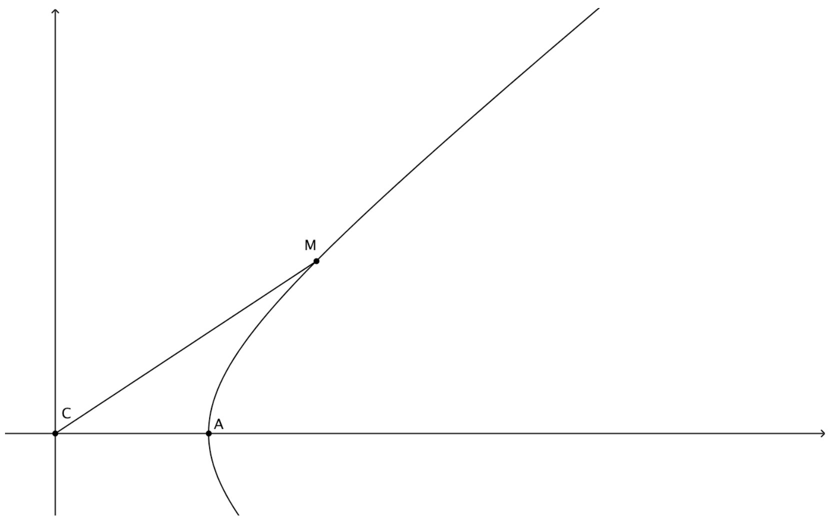
> *This is a complete basic textbook for the full-year course for engineers and science majors. It is so designed that a sequence of material appears for those needing a review of trigonometry and analytic geometry as well as a sequence for those note needing this review.*
> (College Text Books, 1955).

O livro de Cálculo com Geometria Analítica de Thomas foi traduzido para o português e foi bem utilizado até o início da década de 1990. A última edição de 1988 ainda pode ser vista em algumas bibliotecas do país e ainda é citado como livro texto de referência para cursos de Cálculo ou de Geometria Analítica.

A definição das funções hiperbólicas podem ser dadas por meio da função exponencial: $senh(x) = (e^x - e^{-x})/2$ e $cosh(x)= (e^x + e^{-x})/2$.

A variável x representa o dobro da área da região ACM (Figura 2). Os pontos A e M pertencem a hipérbole equilátera $x2 - y2 = 1$ e C é a origem do plano cartesiano (0,0). O ponto A está no eixo x, logo é o ponto (1,0). O ponto M varia na hipérbole e denotado por $(x0, y0)$.

Figura 2 – Hipérbole



Fonte: Adaptado de Thomas (1968, p. 496).

A parte 2 da primeira edição do livro de Thomas (1968) inicia com um capítulo sobre as funções hiperbólicas. Nesse capítulo, há uma seção com o tema “Significado geométrico do radiano hiperbólico”. É feito um estudo da variável u nas funções $x = \text{senh}(u)$ e $y = \cosh(u)$ usando a hipérbole equilátera $x^2 - y^2 = 1$ (veja Figura 2). Comparativamente, é apresentado um estudo similar para as funções trigonométricas $x = \cos(\theta)$ e $y = \text{sen}(\theta)$ no círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$. Há uma figura, a Figura 2, similar a Figura 1 acima feita por Lambert, em que auxilia a destacar semelhanças e diferenças entre as funções circulares e hiperbólicas. Esse estudo ocupa apenas duas páginas (Thomas, 1968, p. 506-507). Essa seção, juntamente com a seção “O cabo suspenso” (Thomas, 1968, p. 516), que mostra uma típica aplicação envolvendo as funções hiperbólicas e ocupa duas páginas e meia, são as duas únicas seções do volume que contém a seguinte observação do autor: “pode ser suprimida sem prejuízo de continuidade”. Fiel a essa observação, edições posteriores desse livro de Cálculo não contém essas duas seções (Thomas, Weir, Hass, 2012, p. 424). Essa omissão é prejudicial para os alunos, pois muitos não entendem as diferenças entre "*u*" em senh(*u*) e "θ" em sen(θ). Não é raro encontrar alunos dizendo que esse "*u*" é um ângulo do ciclo trigonométrico.

Um livro bastante usado atualmente nos cursos de ciências exatas é o volume 1 do livro de Cálculo de Thomas, Weir e Hass (2012). Este livro que se encontra em sua décima segunda edição contém diferenças em relação à primeira edição. Neste livro mais moderno é apresentado as funções hiperbólicas numa seção a parte (p. 424), começando com a definição de $senh(x) = (e^{x} - e^{-x})/2$ e de $cosh(x) = (e^{x} + e^{-x})/2$ e das outras funções hiperbólicas. Em seguida, há quatro tabelas sobre essas funções: a primeira com os gráficos, a segunda com as identidades hiperbólicas, a terceira com as derivadas e a quarta com as integrais. A seção continua e explica as funções hiperbólicas inversas e, de modo similar ao início da seção, é apresentado os gráficos, as identidades, as derivadas e integrais das funções hiperbólicas inversas. Todo esse conteúdo é desenvolvido em apenas uma seção! Infelizmente, esse modo de apresentar as funções hiperbólicas e suas inversas é costumeiro nos atuais livros de cálculo.

OS HODIERNOS LIVROS DE CÁLCULO

O livro de Thomas, Weir e Hass (2012) contém uma seção a parte em que se dedica exclusivamente às funções hiperbólicas. Nessa seção há toda a explicação das funções hiperbólicas: definição por meio da função exponencial, identidades, gráficos, derivadas e integrais e, por último, as funções hiperbólicas inversas e suas propriedades (gráficos, derivadas e integrais). É muito conteúdo para uma seção apenas. Além disso esse modo de apresentar essas funções não segue o decurso histórico, por não apresentar a definição dessas funções usando a hipérbole e não fazer um paralelo com as funções circulares.

Tabela 2 – Identidades trigonométricas

Trigonometria Circular	Trigonometria Hiperbólica
$\cos^2(x)+\mathrm{sen}^2(x) = 1$	$\cosh^2(x) - \mathrm{senh}^2(x) = 1$
sen(-x) = sen(x)	senh(-x) = - senh(x)
cos(-x) = cos(x)	cosh(-x) = cosh(x)
cos(x+y) = cos(x)cos(y)-sen(x)sen(y)	cosh(x+y) = cosh(x)cosh(y)+senh(x)senh(y)
sen(x+y) = sen(x)cos(y)+cos(x)sen(y)	senh(x+y) = senh(x)cosh(y)+cosh(x)senh(h)

Fonte: O próprio Autor.

As colunas da tabela 2 é apresentada nos atuais livros de Cálculo. Porém uma diferença é a seguintes: as colunas dessa tabela são apresentadas em momentos diferentes, em diferentes seções.

O atual ensino de matemática superior é compartimentado e observamos isso, particularmente, no caso das funções hiperbólicas. Os Livros de Geometria Analítica ensinam sobre a hipérbole, mas não fazem uma conexão com as funções hiperbólicas. Atuais livros de Cálculo, quando contém as funções hiperbólicas, não relacionam a definição dessas funções com a hipérbole. Além disso, as funções hiperbólicas raramente são comparadas às funções circulares seja em relação à definição, às identidades ou as séries de potências. Assim, os livros de cálculo, em sua maioria, não seguem o desenvolvimento histórico dessas funções e contém basicamente as mesmas informações sobre essas funções.

Tomando o livro de Thomas, Weir e Hass (2012) como base, pois é um livro que contém informações consideráveis sobre as funções hiperbólicas, os demais livros de Cálculo ou apresentam as mesmas informações ou retiram algumas dessas informações, por exemplo, alguns livros não contém as funções hiperbólicas inversas ou não mostram os gráficos. Assim não delongaremos nos atuais livros de Cálculo (Freitas, 2015).

Basta fazermos uma breve pesquisa nos planos de ensino de Cálculo de algumas instituições de Ensino Superior para verificar alguns dados interessantes. No conteúdo programático da disciplina de Cálculo, muitas vezes, há o detalhamento das funções a serem estudada. Por exemplo, em algumas instituições (como UTFPR e UFRJ) é detalhado quais funções serão abordadas, o que inclui as funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas. Mas não aparece as funções hiperbólicas. Por outro lado, em outras instituições (como UNB, UFMG e UFJF) é citado tais funções na ementa. Porém, mesmo assim, observamos que o ensino dessas funções é limitado a apenas uma aula. Desse modo, uma aprendizagem significativa dessas funções fica praticamente impossível.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Lambert (1761), assim como Riccati (1757-1762), fez comparações entre as funções circulares e as hiperbólicas. Outros autores, com o passar dos anos, também incluiram comparações das propriedades dessas funções, como Stringham (1893), Durell e Robson (1930) e Thomas (1968). Essas propriedades incluem: séries de potências, identidades trigonométricas, gráficos, diferenciação e integração.

Epistemologicamente há um extenso caminho entre a intuição de um matemático até a formalização de uma teoria em sua exposição final, formal e abstrata. O formalismo e a abstração não são desenvolvidos imediatamente pelos estudantes. Apresentar o conteúdo em sua forma abstrata gera dificuldades para os estudantes como não conseguir relacionar com algum conhecimento prévio já existente em sua estrutura cognitiva. Portanto, há uma diferença entre a sequência de desenvolvimento epistemológico do conhecimento científico e a do desenvolvimento pedagógico. Essa diferença, muitas vezes, resulta em dificuldades no aprendizado, o que ocorre com os conteúdos da disciplina de Cálculo, em particular, com as funções hiperbólicas.

Vemos a necessidade de buscar maneiras de se apresentar uma Matemática contextualizada e desatadas de estratégias mecânicas de aprendizagem. Para tal, a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel (2002) foi usada. O aluno liga o ensinamento novo ao conhecimento já existente em sua estrutura cognitiva.

O ensino atual das funções hiperbólicas não segue o mesmo percurso de sua descoberta. Por exemplo, a expressão para $senh(x) = (e^x - e^{-x})/2$ foi obtida por meio de séries de potências e através da geometria da hipérbole. Também, desde o início, Lambert observou que a série de potências de $senh(x)$ e de $sen(x)$ diferem uma da outra apenas pelos sinais dos termos. De um modo geral, esses detalhes não são percebidos e não são enfatizados para um aluno de um curso de cálculo. Provavelmente muito professores de matemática não tenham notado essas semelhanças.

Propomos uma sequência didática que inicia o estudo das funções hiperbólicas por conceitos que contribuíram para sua formalização ao longo da história. Nessa ordem, como ocorreu epistemologicamente, os conceitos que servem como âncoras ou subsunçores devem ser revisados e ensinados, como a função exponencial e a hipérbole. Em seguida, a formalização das funções hiperbólicas e suas propriedades são demonstradas. O que escapa a essa sequência é o ensino das funções hiperbólicas usando séries de potências, pois, geralmente, as funções hiperbólicas e séries de potências são estudadas em disciplinas diferentes e, por isso, em momentos diferentes. Diante disse, cabe ao educador fazer uma conexão com as séries de potências e as funções hiperbólicas, aproveitando para mostrar a sutil semelhanças com as séries das funções circulares.

Destacamos o que seria um bom começo: seguir a trajetória feita por Lambert, destacando a relação das funções hiperbólicas com a hipérbole. Em seguida, no instante em que as funções circulares são apresentadas para calcular limites, derivadas, integrais e séries, as funções hiperbólicas poderiam ser apresentadas logo em seguida, para cada um desses conteúdos, e exibidas as diferenças e semelhanças.

Resgatando o objetivo geral deste artigo, ou seja, lançar um novo olhar para um conteúdo de Cálculo, aqui em particular as funções hiperbólicas, remontando à origem dessas funções, explorou-se, satisfatoriamente, o que era necessário para proporcionar o entendimento da origem dessas funções e o percurso histórico delas. Assim, a origem, independente, dessas funções, por Lambert e Riccati, se revela como auxílio para o entendimento. Mais ainda, os livros de Cálculo de meados do século passado servem de uma boa base para esse propósito. Por exemplo, a primeira edição do livro de Thomas (1968) explica brevemente essas funções e as compara com as funções circulares (o que difere das atuais edições desse livro). Esse livro serve como exemplo para orientar o aprendizado das funções hiperbólicas por meio da História.

Considerando o objetivo principal deste artigo, comparar o modo usual em que se apresenta ao aluno um conceito de Cálculo, no caso aqui abordado as funções hiperbólicas com a origem dessas funções, destacam-se alguns pontos: os atuais textos de Cálculo não seguem o desenvolvimento histórico, porém livros antigos abordam essas funções de uma maneira satisfatória. Assim, os alunos podem ser beneficiados pela abordagem feita desses livros antigos.

Os pressupostos básicos da teoria da Aprendizagem Significativa regulados por uma sequência didática histórica possuem um custo. Por exemplo, o material didático a ser utilizado deve estar adaptado e o professor, disponível. Para o caso particular considerado, conjecturamos que o ensino das funções hiperbólicas por meio da perspectiva histórica e visando uma aprendizagem significativa não causa um demasiado trabalho para o educador. Pelo contrário, basta seguir o desenvolvimento dessas funções feitas no início, como feito por Lambert ou, como era feito nos antigos livros de cálculo que precedem os atuais, como o livro de Thomas (1968).

A História da Matemática não é a única estratégia para se alcançar a aprendizagem significativa. Entretanto, postulamos que com tal abordagem é possível atingir uma aprendizagem condicente com a teoria proposta por Ausubel. Esperamos incitar mais pesquisas, seja em relação à outras estratégias para um aprendizado significativo relacionados aos tópicos de Cálculo. Estudos que explorem os benefícios do uso da História no ensino de Cálculo pode ser um bom viés.

Gusdorf (1970), citando Kant em seu livro "Professores para que? Para uma Pedagogia da Pedagogia", no Capítulo VII que tem o tema " A Condição do Discípulo", contém a seguinte afirmação sobre o estudante: "não deve aprender pensamentos, deve aprender a pensar; é preciso não transportar, mas guiá-lo, se quisermos que, no futuro, seja capaz de se dirigir pelos seus próprios meios". Feito isso, ao terminar a disciplina de Cálculo, com o auxílio do professor, o aluno reterá informações significativas em sua estrutura cognitiva, usando-as em aplicações e onde for necessário. Assim reduzirá o baixo rendimento e o índice de aprovação será satisfatório.

Finalizamos com o mesmo sentimento de Meneghetti e Bicudo (2002): "esse trabalho aponta para a necessidade de se conceber filosofia, história, matemática e educação matemática como fazendo parte de um mesmo processo, influenciando-se umas às outras, no desenvolvimento do saber".

REFERÊNCIAS

Archibald, R.C. (1935). American Mathematics Before 1900. *Bull. Amer. Math. Soc*. 41, 603–606.

Ausubel, D. P.; Novak, J. D., & Hanessian, H. (1980). *Psicologia educacional*. 2a ed. Rio de Janeiro: Interamericana.

Ausubel, D. P. (2002). *Aquisição e retenção de conhecimentos: uma perspectiva cognitiva*. Lisboa: Plátano.

Barnett, J. H. (2004). Enter, Stage Center: The Early Drama of the Hyperbolic Functions. *Mathematics Magazine*. Pueblo, p. 15-30.

Boyer, C. B. (1949). *The History of the Calculus and its Conceptual Development*. Nova Iorque: Dover Publications.

Campos, D. F.; Pinto, M. M. F. (2016). Mathematics teachers' conceptions and constraints for changing teaching practices in Brazilian higher education: an analysis through activity theory. *International Journal Of Mathematical Education In Science And Technology*, [s.l.], v. 47, n. 8, p.1179-1205.

Cauchy, A. L. (1821). *Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique*. [A course in analysis for the royal polytechnic school]. Paris: Imprimérie Royale.

College text books. 1955. The American Mathematical Monthly 62, no. 4: 265-88.

Daus, P.H.; Whyburn, W.M. (1949). *First Year College Mathematics with Applications*. Macmillan Company, New York.

Durell, C.V.; Robson, A. (1930). *Advanced Trigonometry*, G. Bell and Sons, LTD. London.

Euler, L.(1748). *Introductio in analysin infinitorum*. Lausannae: Apud Marcum-michaelem Bousquet & Socies. 1 v. (Tomus primus).

Ferrão, N. S. ; Manrique, A. L. (2014). O uso de mapas conceituais como elemento sinalizador da aprendizagem significativa em cálculo. *Investigações Em Ensino de Ciências*, 19(1), 193–216.

Freitas, M. do B. C. da S. B. (2015). *As Funções Hiperbólicas e suas Aplicações*. 61f. (Dissertação de Mestrado). UFPB – Universidade Federal da Paraiba, João Pessoa.

Genocchi, A.; Peano, G., (1884). *Calculo differenziale e principii di calculo integrale*. Fratelli Bocca, Torino.

Gusdorf, G. (1970). *Professores para quê? Para uma Pedagogia da Pedagogia*. Lisboa: Moraes Editores.

Lacroix, S. F. (1867). *Traité élémentaire de calcul différentiel e de calcul integral.* Paris: Gauthier-Villars.

Lambert, J. H.. (1761/1768). Mémoires sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes, circulaires et logarithmiques. *Mémoires de L'académie Royale Des Sciences de Berlin* v. 17, Berlim, p.265-322.

Lambert, J. H. (1770). Observations Trigonométriques. *Mémoires de L'académie Royale Des Sciences de Berlin*, Berlim, v. 24, p.327-354.

Lemos , E. S. (2011). A teoria da aprendizagem significativa e sua relação com o ensino e com a pesquisa sobre o ensino. *Aprendizagem Significativa em Revista*, vol. 1, p.47-52.

Love, C.E.; Rainville, E.D. (1916). *Differential and Integral Calculus*. Macmillan.

Mamona-Downs, J. ; Downs, M. L. N. (2008). Advanced mathematical thinking and the role of mathematical structure. In: English, L. D. *Handbook of International Research in Mathematics Education*. 2. ed. New York: Routledge, pp.154-172.

Meneghetti, R. C. G., & Bicudo, I. (2002). O que a história do desenvolvimento do cálculo pode nos ensinar quando questionamos o saber matemático, seu ensino e seus fundamentos. *RBHM: Revista Brasileira de História da Matemática* , 2(3), 103–118.

Moreira, M. A. (2006). *A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula.* Brasília, Editora da UnB.

Nasser, L. (2009). Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de cálculo no traçado de gráficos. In: Frota, M. C. R. e Nasser, L. (org.). *Educação Matemática no Ensino Superior. Pesquisas e Debates*. Recife: SBEM, p. 43-58.

Novak, J. D.; Cañas, A. J. (2010). *A teoria subjacente aos mapas conceituais e como elaborá-los e usá-los*. Práxis Educativa. Ponta Grossa, vol.5, n.1, p. 9-29, jan.-jun.

Nunes, J. M. V.; Almouloud, S. A.; Guerra, R. B. (2010). O Contexto da História da Matemática como Organizador Prévio. *Bolema: Boletim de Educação Matemática,* 23(35B), 537–562.

Peixoto, J. L. B, et al. (2008). Análise da aprendizagem conceitual de derivada através das respostas dos alunos que cursaram a Disciplina Cálculo I. In: II *Fórum da Sociedade Brasileira de Educação Matemática*, SBEM-BA, Bahia.

Piskunov, N. (1969). *Cálculo Diferencial e Integral, tomo I.* Moscou: Mir Publishers. 451 p. Tradução do Russo para o Inglês por G. Yankovsky.

Reid, W. T. & Whyburn, W. M. (1973). 1901–1972. *Bull. Amer. Math. Soc.* 79, 1174–1182.

Reis, F. S. (2001). *A Tensão entre Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise: A Visão de Professores-Pesquisadores e Autores de Livros Didáticos*. 302f. (Tese de Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação, UNICAMP – Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Riccati, V. (1757-1762). *Opusculorum ad res physicas, et Mathematica pertinentium I*, IV. Bononiae: Apud Laelium A Vulpe Instituti Scientiarum Typographum. 173 p.

Riccati, V.; Saladini, G. (1765-1767). *Institutiones Analyticae*. Bononiae: Apud Laelium A Vulpe Instituti Scientiarum Typographum, 3 v.

Roratto, C.; Nogueira, C. M. I., & Kato, L. (2011). A. Ensino De Matemática, História Da Matemática E Aprendizagem Significativa: Uma Combinação Possível. *Investigações Em Ensino de Ciências*, 16(1), 117–142.

Silva, C. M. (1996). O conceito de derivada no ensino da matemática no Brasil do século XIX. In: ICME-8 Satellite Meeting HPM, 1996, Braga. *Anais. Braga : Grafis, Coop. de Artes Gráficas*. v. 1. p. 80-87.

Sousa, M. do C. de. (2009). Quando professores têm a oportunidade de elaborar atividades de ensino de Matemática na perspectiva lógico-histórica. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, (23), 83–99.

Souza Junior, A. J. ; Meyer, J. F. (2002). A utilização do computador no processo de ensinar a prender Cálculo: a constituição de grupos de ensino com pesquisa no interior da universidade. *Zetetike*, Campinas, v. 10, n.17/18, p. 113-148.

Stringham, I. (1893). *Uniplanar algebra - being part I of a propædeutic to the higher mathematical analysis*. San Francisco : The Berkeley press.

Tall, D.; Katz, M. (2014) A cognitive analysis of Cauchy's conceptions of function, continuity, limit and infinitesimal, with implications for teaching the calculus. *Educational Studies In Mathematics,* v. 86, n. 1, p.97-124.

Thomas, G. B. (1968). *Cálculo, parte 2*. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico. 918 p.

Thomas, G. B.; Finney, R. L. (1952). *Calculus and Analytic Geometry* . Addison-Wesley Pub. Co.

Thomas, G. B.; Weir, M. D.; Hass, J. (2012). *Cálculo, vol 2*. 12. ed. São Paulo: Pearson. 548 p.

Vasconcelos, J. G. S. F. (2013). *Funções Hiperbólicas: História, Conceito e Aplicação*. 74f. (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal do Amazonas, Manaus.

Von Braunmuhl, A. (1903). *Vorlesungen uber geschicten der trigonometrie*. Leipzig: Druckund Verlag von B. G. Teubneri.