HISTEMAT – Revista de História da Educação Matemática
Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 2447-6447

HISTÓRIA DA DISCIPLINA ÁLGEBRA LINEAR: primeiras aproximações

Eduardo Santos[1]

RESUMO

Nesse artigo são dados os primeiros passos em direção à construção de uma trajetória histórica da disciplina de Álgebra Linear (AL) no Brasil. Iniciamos essa construção observando o plano internacional, buscando compreender, por um lado, alguns contextos que ajudaram a dar uma configuração aos atuais programas e ementas das disciplinas e, por outro, como se deu a incorporação dos temas da AL nos primeiros livros didáticos estrangeiros. Num primeiro momento, descrevemos as motivações da pesquisa, bem como do tipo de fonte histórica utilizada para desenvolvê-la. Num segundo momento, fizemos um apanhado dos primeiros indícios do seu surgimento e de alguns contextos que ajudaram a constituir a AL como disciplina em outros países para, em seguida, fazermos uma análise acerca de como seus conteúdos foram se incorporando aos primeiros livros didáticos. Concluímos que inicialmente a AL estava presente em livros didáticos de Álgebra Moderna (AM) e que, paulatinamente houve um movimento de descolamento, gerando textos de AL independentes, apesar de ainda hoje, em muitos textos, persistir esse padrão. Além disso, desde seu nascedouro, a AL sempre foi frequentada por diversos tipos de profissionais, gerando assim um direcionamento com vistas a aplicações, tanto nas pesquisas nessa área, como no seu ensino, descolando-se do caráter algébrico que se orienta numa tendência estruturalista.

Palavras-chave: Álgebra Moderna. Livros Didáticos. Disciplina Acadêmica. Álgebra Linear.

ABSTRACT

In this article the first steps towards the construction of a historical trajectory of Linear Algebra (LA) in Brazil are given. We began this construction observing the international plan, trying to understand, on the one hand, some contexts that helped to give a configuration to the current programs and menus of the disciplines and, on the other hand, how was the incorporation of the themes of the LA in the first foreign didactic books. First, we describe the motivations of the research as well as the type of historical source used to develop it. In a second moment, we made a survey of the first signs of its emergence and of some contexts that helped to establish LA as a discipline in other countries, and then we did an analysis about how its contents were being incorporated into the first textbooks. We conclude that initially AL was present in textbooks of Modern Algebra (AM) and that, gradually, there was a movement of detachment, generating independent LA texts, although still today, in many texts, this pattern persists. In addition, since its inception, AL has always been frequented by several types of professionals, thus generating a direction for applications, both in research in this area and in its teaching, detaching itself from the algebraic character that is oriented in a structuralist tendency.

Keywords: Modern Algebra. Didatic books. Academic discipline. Linear Algebra.

[1] Docente da Universidade Federal da Paraíba. E-mail: edugonsan@gmail.com

CONSIDERAÇÕES INICIAIS: uma proposta de pesquisa

No ano de 2009 ao ministrar uma disciplina introdutória de Álgebra Linear (AL) para alunos de Engenharia Elétrica na Universidade Federal da Paraíba (UFPB), fomos questionados por um estudante a respeito de uma flagrante diferença entre a estrutura da disciplina que ele cursava conosco e outra de uma prestigiada universidade estadunidense à qual ele estava tendo acesso através de vídeo-aulas. Ambas versavam sobre AL, mas possuíam abordagens bastante diferentes: aquela por nós ministrada era de feição marcadamente abstrata, ao passo que na outra predominava uma abordagem mais concreta e trazendo à cena objetos mais familiares aos alunos. Aquela pergunta nos fez pensar a respeito daquele estado de coisas e decidir, anos mais tarde, tentar compreender como aquela disciplina da tal universidade era dada numa perspectiva tão diferente da sua homônima em nossa instituição. Ao fazer uma busca na rede mundial de computadores, notamos que a maciça maioria das disciplinas de AL no Brasil seguia o mesmo esquema por nós adotado, o que nos fez conjecturar que havia algo de específico no Brasil que fez com que o ensino da AL aqui tomasse um rumo diferente daquele tomado, por exemplo, nos Estados Unidos da América (EUA). Decidimos então pesquisar sobre o tema. Para nossa surpresa, a questão que se descortinava diante de nós era de uma complexidade enorme, pois nos remetia a campos que envolviam desde a configuração da Álgebra Moderna (AM), passando por um agrupamento de saberes enfeixados sob a rubrica da AL até uma paulatina separação entre AL e AM, seguida de uma prevalência da primeira sobre a segunda, principalmente em cursos cujo público-alvo não era formado por estudantes de Matemática. Além disso, seria necessário enfrentar algumas questões epistemológicas da própria constituição da AL, para, a partir de então, tentar entender, historicamente, como ela se transformou em uma disciplina acadêmica. Esse processo de transformação, bem como o entendimento sobre qual forma essa disciplina foi forjada são os temas a que nos propusemos estudar. Os resultados que ora apresentamos trazem as primeiras reflexões acerca dessas questões, numa perspectiva bastante geral, tentando observar os primeiros passos da disciplina a partir de uma fonte privilegiada: o livro didático. Como o ensino de Matemática no Brasil no nível superior sofreu desde o seu início uma forte influência estrangeira, fomos levados inicialmente a fazer uma busca a respeito da configuração que a AL adquiriu em outros países. Em seguida, fizemos uma incursão pelos primeiros livros publicados sobre AM e por aqueles onde os conceitos de AL, numa perspectiva mais próxima da atual, estavam presentes. Essa incursão teve como intenção observar o tipo de objeto que foi se incorporando aos manuais e consequentemente aos futuros programas das disciplinas. Essa observação nos proporciona não apenas um conhecimento a respeito de que tipo de conteúdo de AL foi sendo incluído nos textos, mas também a respeito do estilo de cada autor, uma vez que, em sua configuração, a AL foi frequentada por diversos tipos de usuários (Dorier, 2002). Longe de se fixar num tema específico, os primeiros livros onde os conteúdos de AL se achavam alojados encaravam-na como parte integrante de um conteúdo mais geral, a saber, a AM. A sua construção acabou por incorporar diversos elementos, notações, abordagens e conteúdos que parecem compor um quadro onde se havia um fio comum e que refletia uma nova forma de se estruturar um saber, baseada na ideia de estrutura. Interessante notar o papel do livro de Bartel van der Waerden, *Moderne Algebra*, nesse processo. Além de sua função de paradigma de uma nova concepção de AM (Corry, 2012), ele teve um papel de bastante relevo dentro da configuração da AL, uma vez que ofereceu a primeira perspectiva moderna de um programa que iria se revelar como um modelo e que, além disso, serviria de base para a constituição de capítulos de diversos textos posteriores, destacando-se aí os textos *A Survey of Modern Algebra*, de Garrett Birkhoff e Saunders Mac Lane e *Finite Dimensional Vector Spaces*, de Paul Halmos.

ÁLGEBRA LINEAR COMO DISCIPLINA

Apesar da antiguidade dos seus conteúdos e métodos dentro da Matemática, a AL, enquanto disciplina acadêmica, tem uma história relativamente recente e ainda pouco investigada. Para alguns autores, ela não era reconhecida como tal até os anos 1930, e que de singular influência nesse processo foi o livro de van der Waerden (Aydin, 2013).

Nos EUA somente em meados do século passado é que começaram a surgir os primeiros indícios de cursos destinados exclusivamente ao seu ensino (Tucker, 1993). Esse ponto de vista é confirmado por uma informação, colhida de catálogos das universidades estadunidenses, de que um curso introdutório de AL foi oferecido pela primeira vez nos EUA em 1965, na Universidade de Indiana (Cowen, 1997). Na Itália, em semelhante época começaram a surgir os primeiros cursos de AL (Ciliberto, 1995), apesar de conteúdos de

AL já serem conhecidos pelos matemáticos italianos, ela ainda não era tratada como disciplina (Bini, 2012). Em outros países como Chile (Soto, 2014), Croácia (Drmac, 2012), Espanha (García & Hernández, 1992), Hong-Kong (Li & Tsing, 1996), Irã (Radjabalipour & Radjavi, 2009) e Portugal (Bebiano, 1998), os indícios da presença de cursos ou de publicações envolvendo AL remontam à mesma época.

Na França, por conta de fatores de isolacionismo, as novas tendências da Álgebra demoraram a se fazer presentes. Em 1935, numa série de conferências a respeito das bases Matemáticas da Mecânica Quântica, Gaston Julia abordou no início de suas palestras uma visão mais axiomatizada da AL. Entretanto, somente a partir do final dos anos 30, Henri Cartan começou a ministrar disciplinas envolvendo uma visão da nova Álgebra e, contemplando, portanto, conteúdos da AL, sendo sucedido por André Possel e posteriormente por Charles Ehresmann, este último tendo dado um curso sobre cinemática, tomando por início a axiomatização dos Espaços Vetoriais. Esse tipo de atividade ainda era pouco frequente (Dorier, 2002). Para se ter uma ideia, o grupo Bourbaki foi criado em 1934 e seu texto sobre Álgebra Linear e Multilinear só foi publicado em 1947, ano de publicação de outro texto importante que é o de Andre Lichnerowicz, *Algèbre et analyse linéaires*, publicado em 1947 e que foi utilizado como referência por alguns matemáticos brasileiros, como o professor Ubiratan D'ambrósio (D'Ambrósio, 1988). Um fato importante e que rendeu ao grupo Bourbaki uma proeminência foi o afastamento, por motivo de saúde, de Georges Valliron da École Normale Supérieure e a chegada de Gustave Choquet, ligado ao grupo Bourbaki para assumir as responsabilidades sobre o ensino de Matemática para o *licénce*[2]. Essa chegada de Choquet acaba por dar à AL um *status* bastante importante no ensino de Matemática francês (Dorier, 2002).

A partir da década de 1950, tanto os cursos de AL, quanto as publicações destinadas ao seu ensino, tornaram-se bastante frequentes. Necessidades em diversas áreas, como Economia, Física, Matemática Aplicada começaram a exigir dos futuros profissionais, o domínio do linguajar típico da AL. Além disso, a própria linguagem da Matemática necessita sobremaneira de uma abordagem linear, quer em problemas de dimensão finita, quer em dimensão infinita. Essa necessidade torna-se bastante evidente quando analisamos o aumento vertiginoso no número de publicações destinadas ao ensino da AL e à abordagem de diversos temas, sob a ótica de seus métodos, entre as décadas de 1950 e 1960 e, principalmente, quanto à formação dos autores dessas publicações.

[2] O equivalente ao Bacharelado no Brasil.

Atualmente disciplinas com temas relativos à AL se fazem presentes na maioria das estruturas curriculares dos cursos de Engenharia, Matemática, Ciências da Computação e Física de várias universidades brasileiras e estrangeiras. Alguns outros cursos como Economia, Administração e Ciências Atuariais também possuem inseridas em seus currículos disciplinas envolvendo essa temática. A sua ubiquidade dentro e fora da Matemática a coloca em uma posição de destaque nos currículos (Konyalioğlu, İpek & Işik, 2003). Em geral ela está localizada nos dois primeiros anos dos cursos, logo após uma disciplina de Geometria Analítica. No caso das engenharias brasileiras, ela se encontra alojada numa subestrutura curricular conhecida como "Ciclo Básico", que em geral, se desenvolve nos dois primeiros anos do curso, ao lado do Cálculo e da Geometria Analítica. Essa situação não é exclusiva do Brasil, uma vez que *"[...] na maioria dos países, os currículos orientados para a ciência nos dois primeiros anos na universidade consistem de cursos em duas matérias principais, a saber, cálculo e álgebra linear".3* (Dorrier, 2003, p.875) Além disso, em diversos programas de pós-graduação em Matemática, ela consta como disciplina obrigatória, além de ser utilizada em outros tantos como forma de acesso, através dos chamados Programas de Verão.

A formatação atual das disciplinas iniciais de AL segue um padrão mais ou menos definido, possuindo uma direção bastante semelhante em praticamente todos os locais: Matrizes, Sistemas de Equações Lineares, Determinantes, Espaços Vetoriais, Transformações Lineares, Diagonalização de Operadores e Espaços com Produto Interno, Formas Quadráticas (Ulus, 2013). Essa formatação pode variar para mais, ou para menos dependendo da instituição. No caso do Brasil, encontramos diversas ementas e programas de Instituições de Ensino Superior, que confirmam o formato que os cursos de AL adquiriram (Grande, 2006). A ênfase predominante na abordagem tem sido a do formalismo, a julgar pelos livros didáticos mais utilizados nas disciplinas no Brasil, fato, aliás, constatado também em outros contextos (González, 2009). Dentro dessa perspectiva, duas direções predominantes nos cursos de AL, em diversos países, são identificadas por Dorier:

> Pode-se distinguir cerca de duas tradições principais no ensino da álgebra linear: uma centra-se no estudo dos espaços vetoriais formais enquanto a outra propõe uma abordagem mais analítica baseada no estudo do Rn e do cálculo matricial. Entre estas duas orientações, existe um contínuo de projetos de ensino, em que cada pólo é mais ou menos dominante.

[3] [...] in most countries, science-orientated curricula in the first two years at university consist of courses in two main subjects, namely, calculus and linear algebra.

(Dorier, 2003, p. 875)[4]

Baseado em uma análise de 32 livros didáticos publicados em países como EUA, França e Israel, durante os anos 1960 e 1970, Harel nos exibe dois padrões dos cursos de AL desenvolvidos e que ainda se mantém atuais:

> Foram observadas duas abordagens para sequenciar o conteúdo de álgebra linear. Em uma abordagem, as técnicas computacionais aparecem antes de idéias abstratas (abordagem computação-para-abstração). A outra abordagem é o inverso: as idéias abstratas aparecem antes das técnicas computacionais (abordagem abstração-computação) Frequentemente, a abordagem anterior é usada por livros didáticos elementares, enquanto a última abordagem é usada pelos livros didáticos mais avançados.
>
> (Harel, 1987, p. 29)[5]

Como as diretrizes para os cursos superiores no Brasil não impõem programas para as disciplinas, cada universidade tem a autonomia para constituir seus próprios programas. Outra vez, um fenômeno não exclusivo do Brasil (Aydin, 2009). Conclui-se a partir dessa argumentação, no que se refere aos cursos de AL, que seu papel deve ser encarado de acordo com os interesses locais onde eles estejam inseridos. Ainda segundo o mesmo autor:

> A álgebra linear é ensinada a diferentes alunos de diferentes faculdades. Essas faculdades esperam que o curso de álgebra linear desempenhe seus papéis adequados em seu currículo; As faculdades de educação esperam que contribua com o pensamento abstrato de seus candidatos a professores. As faculdades de engenharia esperam que ele faça ênfase em aplicações de ciência física e experiências computacionais. Talvez alguns programas pretendam ensinar álgebra linear no nível secundário.
>
> (Aydin, 2009, p. 1550)[6]

Diversos pesquisadores concordam que, em seus respectivos contextos, existe certa liberdade de escolha das universidades em relação ao seu primeiro curso de AL. Além disso, esperam que o primeiro curso possa desempenhar diferentes papéis nas

---

[4] One can distinguish roughly two main traditions in the teaching of linear algebra: one focuses on the study of formal vector spaces while the other proposes a more analytical approach based on the study of R^n and matrix calculus. Between these two orientations, there exist a continuum of teaching designs, in which each pole is more or less dominant.

[5] Two approaches to sequencing linear algebra content were observed. In one approach, computational techniques appear before abstract ideas (computation-to-abstraction approach). The other approach is the reverse: abstract ideas appear before computational techniques (abstraction-to-computation approach) Frequently, the former approach is used by elementary textbooks, whereas the latter approach is used by the more advanced textbooks.

[6] Linear algebra is taught to different students from different faculties. These faculties expect linear algebra course to play its proper roles in their curriculum; Education faculties expect it to contributing the abstract thinking of their teacher candidates. Engineering faculties expect it to make emphasis on physical science applications and computer experiences. Maybe some programs intend to teach linear algebra at the secondary level.

ISSN 2447-6447

estruturas curriculares, dependendo do público a que se destina tal curso. Para Day e Kalman:

> As instituições diferentes têm audiências bastante diferentes para a álgebra linear e esperam que o primeiro curso de álgebra linear desempenhe diferentes papéis no currículo maior. Alguns têm uma grande população de estudantes de engenharia, com ênfase em aplicações de ciência física, nomeadamente equações diferenciais e processamento de sinais. Em outras escolas, uma grande proporção dos estudantes de álgebra linear são alunos de matemática, muitos dos quais pretendem ensinar no nível secundário. Algumas faculdades ensinam álgebra linear como um subconjunto de um curso de equações diferenciais.
> (Day & Kalman, 1999, p. 3)[7]

No decorrer do tempo, diversas culturas acadêmicas moldaram o tipo de curso de AL proposto pelos professores ou autores de livros didáticos. Para Tomei:

> Em um certo momento, a álgebra linear tornou-se paradigmática do modo profissional de fazer Matemática, devido a sua axiomatização muito simples. Os cursos se tornaram mais abstratos, com ênfase em aspectos algébricos, e as motivações iniciais foram sendo esquecidas [...].
> (Tomei, 1999, p. 5)

Uma cultura acadêmica instituída considera a AL como um lugar privilegiado para uma espécie de iniciação à Matemática Abstrata ou à Demonstração em Matemática (Uhlig, 2002). Tendo em mente que a AL possui características de axiomatização que permitem ao estudante o acesso ao complexo universo de provas, demonstrações e contraexemplos, o autor a compara ao cálculo e às equações diferenciais, entendendo que esses cursos não se prestam, a ser um tipo de "proving course" (Uhlig, 2002), uma vez que, são cursos onde predominam fórmulas, procedimentos e métodos, e onde o rigor necessário nas demonstrações formais transcende o respectivo contexto. Outra cultura, frequentemente detectada é a de que um curso de AL propicia ao estudante um contato com uma Matemática mais avançada. A opinião de Ulus é emblemática nesse sentido:

> Os cursos de álgebra linear ocupam uma posição dominante no currículo geral de matemática de graduação. Os conceitos ensinados nesses cursos se prestam à compreensão de cursos de matemática mais avançados. Isso se estende até a maximização dessas teorias como conhecimento

[7] Diferent institutions have quite diferent audiences for linear algebra, and they expect the first linear algebra course to play diferent roles in the larger curriculum. Some have a large population of engineering students, with an emphasis on physical science applications, notably differential equations and signal processing. At other schools a large proportion of the linear algebra students are mathematics majors, many of whom intend to teach at the secondary level. Some colleges teach linear algebra as a subset of a differential equations course.

> transferível para cursos de engenharia, economia, ciências físicas e química e estatística.
>
> (Ulus, 2013, p. 119)[8]

Lançando mão implicitamente de um contexto estruturalista no qual o Grupo Bourbaki estava inserido, e corroborando com o autor anterior, Tucker reforça a visão propugnada por esse grupo quando diz que:

> Na década de 1960, a álgebra linear foi posicionada para ser o primeiro curso de matemática real no currículo de matemática de graduação, em parte porque sua teoria é tão bem estruturada e abrangente, mas exige pré-requisitos matemáticos limitados. É essencial um domínio de espaços vetoriais finitos, transformações lineares e suas extensões em espaços de função.
>
> (Tucker, 1993, p. 3)[9]

A discussão a respeito das reais necessidades que se impõem para que seja incluída uma disciplina de AL nos currículos em comparação com outras disciplinas iniciais de Matemática é bastante intensa e está longe de um consenso. Matemáticos e Educadores Matemáticos parecem ter uma visão diferente a respeito dos reais objetivos de um curso de AL. Uma opinião diz respeito ao fato de que a AL serviria como uma espécie transição da Matemática praticada na escola para a Matemática dita superior. Sustentando as virtudes da AL em relação a outras disciplinas, Klapsinou e Gray afirmam que:

> A álgebra linear é um dos primeiros cursos de matemática avançada em nível universitário. Juntamente com a Análise, pretende mudar o modo de pensar dos alunos da matemática escolar para o pensamento matemático avançado. [...] Além disso, a Algebra Linear reúne métodos e idéias de geometria e álgebra e sua ampla gama de aplicações tanto na As ciências físicas naturais e a matemática moderna tornam-no um componente essencial de todos os cursos científicos.
>
> (Klapsinou & Gray, p. 425)[10]

Por outro lado, amparado numa perspectiva bastante internalista, Laugwitz afirma que:

---

[8] Linear Algebra courses occupy a dominant position in the overall undergraduate mathematics curriculum. The concepts taught within these courses lend themselves to the understanding of more advanced mathematics courses. This further extends to the maximization of these theories as transferable knowledge to courses in engineering, economics, physical and chemical sciences, and statistics.

[9] In the 1960s, linear algebra was positioned to be the first real mathematics course in the undergraduate mathematics curriculum in part because its theory is so well structured and comprehensive, yet requires limited mathematical prerequisites. A mastery of finite vector spaces, linear transformations, and their extensions to function spaces is essential.

[10] Linear Algebra is one of the first courses of advanced mathematics at University level. Along with Analysis, it is intended to shift the students' way of thinking from school mathematics towards advanced mathematical thinking.[…] In addition, Linear Algebra brings together methods and insights of geometry and algebra, and its wide range of applications in both the natural physical sciences and modern mathematics make it an essential component of all scientific courses.

> A motivação essencial para aprender a álgebra linear é global: o campo é um pré-requisito necessário para outros campos matemáticos e para aplicações importantes; e a motivação para a álgebra linear genuína (isto é, sem coordenadas) é principalmente uma matemática interna, o uso em quase todas as aplicações (salvar a mecânica quântica) fornece coordenadas "naturais".
>
> (Laugwitz, 1973, p. 244)[11]

Seguindo em uma direção semelhante, isto é, reforçando as virtudes da AL, Tucker justifica seus pontos de vista dando inclusive uma idéia a respeito da sua prevalência em relação à AA:

> As virtudes pedagógicas de um curso introdutório de álgebra linear são tão impressionantes quanto a utilidade do sujeito e papel central na análise mais ampla. A álgebra linear fornece uma estrutura formal para geometria analítica e soluções para sistemas 2 x 2 e 3x3 de equações lineares aprendidas no ensino médio. Um espaço vetorial é a escolha natural para um primeiro sistema algébrico para que os alunos possam estudar formalmente porque suas propriedades fazem parte do conhecimento dos alunos sobre a geometria analítica. Ao contrário de grupos e corpos, pode-se desenhar imagens perspicazes de elementos em espaços vetoriais. As transformações lineares em espaços vetoriais (dimensão finita) também possuem descrições concretas com matrizes.
>
> (Tucker, 1993, p. 4)[12]

UM CONTEÚDO E SUA PRESENÇA NOS PRIMEIROS LIVROS DIDÁTICOS

Os objetos hoje enfeixados sob a rubrica de AL já existiam mesmo antes de ela se configurar como um saber a ser ensinado. Matrizes, Determinantes e Sistemas lineares possuem uma história bastante antiga dentro da Matemática. Outros objetos como Vetores, Espaços Vetoriais, Transformações Lineares, Auto-valores, Auto-vetores, Formas Bilineares e Quadráticas, achavam-se dispersos em outras teorias ou ainda não eram vistos como parte de uma teoria mais ampla, (Kleiner 2007). Juntemos a isso o fato de que a filiação de muitos temas da AL é bastante diversa: Geometria, Teoria dos Números, Teoria

[11] The essential motivation for learning Linear Algebra is a global one: The field is a necessary pre-requisite for other mathematical fields and for important applications; and the motivation for genuine(i.e. coordinate-free) Linear Algebra is mostly an inner-mathematical one, its use in almost all applications (save quantum mechanics) provides 'natural' coordinates.

[12] The pedagogical virtues of an introductory linear algebra course are just as impressive as the subject's usefulness and central role in higher analysis. Linear algebra gives a formal structure to analytic geometry and solutions to 2 X 2 and 3x3 systems of linear equations learned in high school. A vector space is the natural choice for a first algebraic system for students to study formally because its properties are all part of students' knowledge of analytic geometry. Unlike groups and fields, one can draw insightful pictures of elements in vector spaces. Linear transformations on (finite-dimensional) vector spaces also have concrete descriptions with matrices.

dos Grupos, Teoria dos Módulos, Análise Funcional, dentre outras fornecem métodos, abordagens e questões que, não raro, acabam por constituir um corpo de conhecimentos que se submeterá a um processo de escolarização, (Dorrier 2002).

No que se refere à sua presença nos livros didáticos, a AL passou por um longo processo até adquirir certa independência da Álgebra Moderna (AM). Num primeiro momento, até por volta do ano de 1907, os manuais enfeixavam os conteúdos de AL de forma relativamente isolada. Um exemplo disso são os manuais *An Elementary Treatise on Determinants: With Their Application to Simultaneous Linear Equations and Algebraical Geometry*, de Lewis Carrol, publicado em 1867, *Éléments de la théorie des determinants*, de George Dostor, publicado em 1877, *Éléments de la théorie des déterminants avec de nombreux exercices*, de Paul Mansion, publicado em 1883, *Algebra: An elementary text-book for the higher classes of secondary schools and for colleges*, de George Chrystal, publicado também em 1886 e *A short course in the theory of determinants*, de Laenas Gifford Weld, publicado em 1893.

A tendência axiomática, no que diz respeito à AL, levada a cabo por Peano em 1888, ainda demoraria a adentrar nos livros-texto de Álgebra, o que só ocorreu nos anos 1930 com os manuais de Herman Weyl, *Raum-Zeitt-Matterie*, de 1918, Gaston Julia, *Introduction Mathématique aux Théories Quantiques,* de 1938, *Moderne Algebra, de* Bartel van der Waerden, publicado em 1931, *Mathematische grundlagen der quantenmechanik* de John von Neumann; publicado em 1932, e *Théorie des opérations linéaires*, de Stephan Banach, publicado também em 1932. O termo “vector” sequer aparecia nos livros mais usados antes de van der Waerden (Ky Fan, 1992).

De acordo com nossos levantamentos, as primeiras abordagens de temas relativos à AL numa forma mais próxima da que encontramos hoje aparecem no livro *Introduction do Higher Algebra* de autoria do matemático estadunidense Maxime Bôcher, publicado em 1907. Nesse livro, geralmente pouco lembrado nas referências a respeito do histórico da disciplina AL, encontramos no capítulo II, um esboço da teoria dos determinantes, no capítulo III, a teoria da dependência linear, no capítulo IV, equações lineares. O capítulo V versa sobre o posto de uma matriz e o capítulo VI, sobre transformações lineares. O livro de Bôcher, apesar de aparentemente não ter tido um grande impacto na configuração da AM, merece atenção por dois motivos. Em primeiro lugar, ele foi referenciado pelo clássico livro de van der Waerden – ao lado do livro de Leonard Eugene Dickson, *Modern Algebraic Theories,* publicado em 1926 – como fonte de pré-requisitos necessários para a

AL. Esse é um fato de bastante relevo, tomando por base a envergadura do texto de van der Waerden e a sua representatividade como fundador de uma nova imagem da AM. Além disso, dentre a produção didática alemã da época, a menção de van der Waerden, no que se refere à AL, a dois autores que não eram de origem alemã, no caso, Bôcher e Dickson, era bastante emblemática, mesmo com uma considerável produção da escola alemã relativa à AM (Corry,1991). Apesar de não apresentar a Álgebra Linear no esquema moderno proposto por van der Waerden, o livro de Bôcher traz os primeiros elementos indicadores desse esquema já anunciando algo próximo de uma futura configuração da AL que viria a ser definida nos manuais posteriores. Parte desse trabalho será feito no livro do próprio van der Waerden. Um segundo motivo para dar relevo ao livro de Bôcher é o fato de que, no contexto dos EUA, dois importantes autores referem-se a ele como texto de AL. Um deles é Paul Halmos. Ao fazer um apanhado sobre os livros antigos de Matemática com os quais travou contato em sua época de estudante, inclui o de Bôcher entre os citados (Halmos, 1988, p.141). Apesar das críticas, o livro é colocado como trazendo elementos de AL. Uma menção de Halmos, mesmo que não tão elogiosa, é importante, tendo em vista que ele é autor daquele que é considerado por alguns como sendo o primeiro livro-texto de AL publicado (Dorrier, 2002). Outra importante menção ao livro de Bôcher é feita por outro autor pioneiro que é Garrett Birkhoff. Segundo ele,

> O componente algébrico deste curso amadureceu no livro de Bocher, Introdução à Álgebra Superior (1907), no qual o §26 sobre ‘conjuntos, sistemas e grupos’ expressa idéias algébricas modernas. Este livro apresentaria uma geração de estudantes americanos a álgebra linear, álgebra polinomial e a teoria dos divisores elementares.
>
> (Birkhoff, 1989, p. 18)[13]

Outro livro que não é tão lembrado é o *Modern Algebraic Theories*, de Leonard Eugene Dickson, publicado em 1926. Havia uma disputa, pelo menos nos EUA, no sentido de saber qual dos dois livros era o mais adotado nos programas de pós-graduação em Matemática: o de Dickson ou o de van der Waerden. De acordo com Halmos:

> Nas universidades que conheci na década de 1930, os dois concorrentes principais para o texto oficial de um curso de graduação em álgebra eram van der Waerden e Dickson, e Dickson não estava em alemão. Eu sabia

[13] The algebraic component of this course matured into Bocher's book, Introduction to Higher Algebra (1907), in which §26 on "sets, systems, and groups" expresses modern algebraic ideas. This book would introduce a generation of American students to linear algebra, polynomial algebra, and the theory of elementary divisors.

> sobre van der Waerden, mas o curso que fiz exame usou Dickson, e foi o que eu comprei (de segunda mão) em agosto de 1935.
> (Halmos, 1988, p. 143)[14]

Apesar dessa disputa e de ter sido traduzido para o alemão, o livro de Dickson difere muito do livro de van der Waerden, principalmente no aspecto de que a ideia de estrutura ainda não está presente no texto de forma definitiva (Corry, 2012). O livro, apesar de trazer elementos modernos da Álgebra, não menciona a AL no espírito do esquema axiomático. Ele possui um grupo de capítulos dedicados à AL, nomeadamente: III. Matrizes, Formas Bilineares e Equações Lineares, IV. Formas Quadráticas e Hermitianas, Formas Bilineares Hermitianas e Simétricas, V. Teoria das Transformações Lineares, Fatores Invariantes e Divisores Elementares e VI. Pares de Formas Quadráticas, Bilineares e Hermitianas. Esses capítulos, a despeito de não contemplarem a noção abstrata de Espaço Vetorial, tratam de objetos tipicamente enquadrados sob a rubrica da AL.

Na sequência surge o *Modern Higher Algebra* de Adrian Albert, publicado em 1937. Em seus capítulos, estão dedicados à AL encontramos: III. Matrizes, IV. Semelhança de Matrizes Quadradas, V. Matrizes Simétricas e "Skew" e X. Álgebra de Matrizes. Destacamos que, no capítulo II, no parágrafo 11, temos a definição de *Conjunto Linear sobre um corpo F*, que vem a ser para nós a definição de Espaço Vetorial sobre um corpo. Apesar disso, o texto não se aprofunda na discussão sobre esse tema, dando mais ênfase às Matrizes.

Na Alemanha em 1931 é publicado o *Einführung in die analytische Geometrie und Algebra* de Otto Schreier e Emmanuel Sperner, trazendo as notas de aula do primeiro autor dadas em Hamburgo. Esse livro já traz elementos de AL, procurando estabelecer uma conexão entre Álgebra e Geometria. Entretanto, também não aborda a AL do ponto de vista axiomático. Sua tradução para o inglês se deu apenas em 1951.

O principal direcionamento viria com a publicação, também em 1931, do clássico *Moderne Algebra* de autoria do matemático holandês Bartel Leedert van der Waerden, traduzido para o inglês em 1941. Os livros anteriormente publicados não tiveram o impacto do livro de van der Waerden. De acordo com Corry:

> No entanto, foi o livro de van der Waerden que se transformou no novo texto clássico da álgebra, enquanto simultaneamente a álgebra se tornou a

[14] At the universities that I knew about in the 1930s the two main competitors for the official text of a graduate course in algebra were van der Waerden and Dickson, and Dickson wasn't in German. I knew about van der Waerden, but the course I took used Dickson, and that's what I bought (secondhand) in August 1935.

> disciplina apresentada no livro de van der Waerden. O livro foi traduzido em muitas línguas, sendo amplamente utilizado em universidades em todo o mundo. O sucesso de Moderne Algebra foi responsável pela absorção generalizada da idéia de "estrutura algébrica". Também foi provavelmente responsável pela adoção da idéia de que o surgimento deste conceito era um resultado natural e inevitável do crescimento da álgebra. Um exame dos conteúdos de Moderne Algebra na seção atual nos dará uma melhor compreensão do significado de seu caráter "estrutural".
>
> (Corry, 2012, p. 44)[15]

Reforçando esse posicionamento, Halmos atesta que:

> Todo programa de doutorado respeitável incluiu pelo menos um curso de álgebra, e o livro de van der Warden teve uma competição muito pequena quando se tratou de escolher o texto. Se fosse sua vez de ensinar esse curso, e se você não pensasse que seus alunos pudessem lidar com um bom curso, então você pode ter se voltado para Dickson, ou para uma das exposições turvas de Albert - mas no nível de pós-graduação foi van der Waerden nove vezes em dez.
>
> (Halmos, 1988, p. 145)[16]

No que diz respeito à AL, van der Waerden a trata no segundo volume, no capítulo XV, dividido nos seguintes parágrafos: 106. Modules. Linear Forms. Vectors. Matrices, 107. Modules with Respect to a Skew Field. Linear Equations, 108. Modules in Euclidean Rings. Elementary Divisors, 109. The Fundamental Theorem of Abelian Groups, 110. Representations and Representation Modules, 111. Normal Forms of a Matrix in a Commutative Field, 112. Elementary Divisors and Characteristic Function, 113. Quadratic and Hermitian Forms. A exposição é feita dentro do contexto da Teoria dos Módulos, buscando toda a generalidade e unificação da AM produzida até então. As principais influências de van der Waerden foram os cursos tomados em Hamburgo com Emil Artin e em Göttingen com Emmy Noether. No caso da AL, como ele próprio afirma, foi fortemente influenciado por diversas fontes:

---

[15] It was, however, van der Waerden's book that turned into the new classical text of algebra, while simultaneously algebra became the discipline presented in van der Waerden's book. The book was translated into many languages, being widely used in universities all around the world. The success of Moderne Algebra was responsible for the widespread absorption of the idea of "algebraic structure." It was also probably responsible for the adoption of the idea that the rise of this concept was a natural, unavoidable outcome of the growth of algebra. An examination of the contents of Moderne Algebra in the present section will give us a better understanding of the meaning of its "structural" character.

[16] Every respectable Ph.D. program included at least one algebra course, and van der Warden's book had very little competition when it came to choosing the text. If it was your turn to teach such a course, and if you didn't think that your students could cope with a good course, then you might have turned to Dickson, or to one of Albert's cloudy expositions — but on the graduate level it was van der Waerden nine times out of ten.

> Os conteúdos do Capítulo 15 ('Algebra Linear') foram geralmente conhecidos em 1924. Para o §06, usei (e citei) um livro de A. Châtelet: *Leçons sur la théorie des noms* (1913), ao qual Emmy Noether chamou minha atenção . A seção 107 foi influenciada por Otto Schreier em Hamburgo, que era especialista em álgebra linear e teoria de grupos. A seção 108 foi extraída do artigo de Emmy Noether em Mathemtische Zeitschrift 30 (1929), p. 641 e §ll0 foi fortemente influenciado pelos artigos clássicos de Frobenius sobre divisores elementares.
>
> (Van Der Waerden, 1975, p. 34)[17]

O que se percebe é que van der Waerden, pelo menos no caso da AL, buscou generalizar e agrupar alguma configuração desse conteúdo que estava dispersa em alguns textos e artigos de modo a constituir sua visão daquilo que seria a AL numa perspectiva moderna. Apesar dessa busca de generalidade, van der Waerden em edições subseqüentes de seu livro acabaria por incluir um capítulo sobre espaços vetoriais em seu texto.

Em 1940, o matemático estadunidense Cyrus Colton Mac Duffee publica o seu *Introduction do Abstract Algebra*. Seguindo a linha dos livros de Bôcher, Dickson e Albert, o autor dá seu depoimento a respeito daquilo que seria um curso inicial de AM para estudantes de pós-graduação em Matemática das universidades norte-americanas. No que diz respeito à AL, encontramos apenas um capítulo versando sobre matrizes.

A perspectiva aberta por van der Waerden causou uma mudança de posição na forma de se abordar a AM nos livros didáticos. Essa mudança acabaria por influenciar dois jovens matemáticos estadunidenses a eles próprios constituírem o seu depoimento acerca de um moderno curso de AM para os estudantes daquele país. Referimo-nos aos matemáticos Garrett Birkhoff e Saunders Maclane, e o livro, o já septuagenário, *A Survey of Modern Algebra*, publicado em 1941. De acordo com os autores:

> Nosso livro, publicado pela primeira vez há 50 anos, teve como objetivo apresentar esta nova visão empolgante da álgebra para alunos de pós-graduação e de graduação americanos. Nós experimentamos nossas idéias algo diferentes sobre como isso deve ser feito em um curso em Harvard por três anos sucessivos, antes de reorganizá-los e apresentá-los em forma de livro de texto.
>
> (Birkhoff; & Mac Lane, 1992, p. 26)[18]

---

[17] The contents of Chapter 15 ("Lineare Algebra") were generally known in 1924. For §l06 I used (and cited) a book of A. Châtelet: Leçons sur la théorie des nombres (1913), to which Emmy Noether drew my attention. Section 107 was influenced by Otto Schreier in Hamburg, who was a specialist in linear algebra and theory of groups. Section 108 was drawn from Emmy Noether's paper in Mathemtische Zeitschrift 30 (1929), p. 641,and §ll0 was strongly influenced by the classical papers of Frobenius on elementary divisors.

[18] Our book, first published 50 years ago, was intended to present this exciting new view of algebra to American undergraduate and beginning graduate students. We had tried out our somewhat differing ideas of how this should be done in a course at Harvard for three successive years, before reorganizing and presenting them in textbook form.

Fruto de vivências pessoais em visitas dos autores à Europa e diversos contatos com uma então nascente nova imagem da AM, esse livro tem um caráter bastante orgânico, uma vez que refletiu essas experiências. No período de 1937-1938, Birkhoff em Harvard propôs uma nova versão para os cursos de Álgebra em nível de graduação naquela universidade (a disciplina era Math 6). Esses cursos, talvez tenham sido o embrião daquilo que viriam a se tornar os futuros cursos de AM e, mais especificamente, os cursos de AL. Foi produzido um conjunto de notas para o curso. No segundo semestre de curso eram abordados os espaços vetoriais e as transformações lineares, bem como os determinantes: *"O segundo semestre começou com um tratamento axiomático de espaços vetoriais em corpos gerais, o que facilitou a definição de números algébricos e funções algébricas"* (Birkhoff, G & Mac Lane, G. 1992, p. 29)[19]. Mais adiante, *"[...] as matrizes foram introduzidas como operadores lineares em espaços vetoriais de dimensões finitas, várias formas canônicas de matrizes derivadas e determinantes reais interpretados como volumes"* (Birkhoff, G & Mac Lane, S. 1992, p. 29)[20]. Por outro lado, Mac Lane trabalhava em outras duas universidades estadunidenses e ministrava seus cursos de Álgebra na pós-graduação baseados no livro de Bôcher (em Cornell) nos anos de 1936-1937 e no livro de Adrian Albert (em Chicago) em 1937-1938. Em seguida, passou a trabalhar, a partir de 1938 também em Harvard onde escreveu um conjunto de notas sobre Álgebra Moderna. A junção desses dois conjuntos de notas deu origem ao texto final publicado e que teve quatro edições. Esse texto influenciou uma geração de matemáticos em todo o mundo. De acordo com Moore:

> Não demorou muito para a abordagem de van der Waerden para chegar aos Estados Unidos. Em 1937, A. A. Albert publicou seu livro de texto, *Modern Higher Algebra*, no qual ele também começou com grupos e anéis. Ele apresentou o que ele chamou de "conjunto linear", ou seja, a noção de um módulo sobre um anel, no início do livro [...]. Mas o livro americano mais influente para tratar a álgebra moderna durante esse período foi *A Survey of Modern Algebra* de Birkhoff e Mac Lane (1941).
> (Moore, 1995, p. 294)[21]

---

19 "The second semester began with an axiomatic treatment of vector spaces over general fields, which made it easy to define algebraic numbers and algebraic functions."

20 "[…] matrices were introduced as linear operators on finite-dimensional vector spaces, various canonical forms of matrices derived, and real determinants interpreted as volumes."

21 It did not take long for van der Waerden's approach to reach the United States. In 1937 A. A. Albert published his textbook, Modern Higher Algebra, in which he too began with groups and rings. He introduced what he called a "linear set," i.e., the notion of a module over a ring, early in the book [1, 16]. But the most influential American book to treat modern algebra during this period was A Survey of Modern Algebra by Birkhoff and Mac Lane (1941).

No caso específico do Brasil, sua influência foi muito grande, principalmente no então Distrito Federal, quando, em 1947, Adrian Albert ministrou um curso sobre Álgebra Moderna tendo utilizado o livro de Birkhoff e Mac Lane. Diversos matemáticos como Elon Lages Lima e Manfredo Perdigão do Carmo, também mencionam em suas memórias que os primeiros passos na AM foram dados pelo caminho traçado por esses autores.

Em 1942, fortemente influenciado pelas aulas de "Anéis de Operadores" de von Neumann, o matemático húngaro-americano Paul Halmos lança o seu texto *Finite Dimensional Vector Spaces*. Fazendo reverência ao seu convívio com o matemático húngaro-americano John Von Neumann, ele afirma que *"[...] assim como o livro de van der Waerden foi baseado nas palestras de Artin, meu livro foi baseado nas palestras de von Neumann e completamente inspirado por ele."* (Halmos, 1991, p.10)22. Para Halmos, seu livro tinha um objetivo claro, definido:

> Eu estava objetivando uma coisa – que a teoria das matrizes é a teoria do operadores no caso especial mais importante e mais translúcido. Cada passo e, em particular, cada exercício (não eram diferentes de qualquer outro passo), foi projetado para lançar luz sobre esse fim.
> (Halmos, 1991, p. 11)[23]

Percebe-se nessa fala de Halmos a organicidade que ele imprimiu a seu texto. Tratava-se de um depoimento, um depoimento que via a teoria das matrizes e a teoria dos operadores em dimensão finita em uma perspectiva de unificação. Que, além disso, a AL possuía uma finalidade "*Eu gosto da álgebra linear porque (ela) me deu uma motivação para o estudo dos operadores no espaço de Hilbert e porque me deu uma visão do esqueleto algébrico da teoria dos operadores, o que facilitou esse estudo." (Halmos, 1970, p.457).* 24 Com esse depoimento, Halmos produziu um dos textos mais influentes de AL até hoje publicados. Em que medida essa influência pode ser medida, é algo difícil de responder. Ela é sentida. Afinal, o seu livro pouco foi utilizado em cursos regulares no Brasil, apesar de ter merecido uma tradução para nossa língua. Possivelmente o livro de Halmos se prestou mais como um livro de consulta do que um livro de texto para um curso regular. Outro fator que pode ter prejudicado sua adoção em cursos regulares, foi a

---

[22] "[…] And just as van der Waerden's book was based on Artin's lectures, my book was based on von Neumann's lectures and inspired completely by him."

[23] "I was driving at one thing - that matrix theory is operator theory in the most important and the most translucent special case. Every single step, and in particular every exercise (they were not different from any other step), was designed to shed light on that end.

[24] "I used to like linear algebra because it gave me a motivation for the study of operators on Hilbert space and because it gave me insight into the algebraic skeleton of operator theory, which made that study easier".

concorrência com o livro de Birkhoff e Mac Lane. Um outro fator que pode não ter feito do livro de Halmos um livro tão influente é apontado por Lima:

> Há uma grande preocupação em dar definições e demonstrações sem utilizar coordenadas. Isto é feito com o propósito admitido de preparar a caminho para os espaços de dimensão infinita, estudados em Análise Funcional. Só que muitas vezes esse purismo se torna artificial. Além disso, com vistas a diversas aplicações, a familiaridade do estudante com bases e coordenadas seria de grande utilidade.
>
> (Lima, 2009, p. 337)

Semelhante ponto de vista é partilhado em uma resenha do livro, feita por Mark Kac: *"No entanto, o revisor duvida que este livro possa ser usado com sucesso em um curso sobre matrizes e equações lineares. A apresentação é definitivamente a de um analista e o ponto de vista 'algébrico' é propositalmente evitado. "*(Kac, 1943, p.350)[25] De qualquer modo, foi o primeiro livro de AL publicado com fins didáticos e tratando-a numa perspectiva moderna.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como pudemos ver, a AL e a AM possuem histórias bastante atreladas. Entretanto, no decorrer do tempo, essa história acabou se bifurcando: a AM entrou numa fase em que buscava incorporar cada vez mais a visão estruturalista do seu fazer matemático. Tratando seus objetos de maneira cada vez mais generalizada, ela os engendra numa teia complexa de busca de maior abstração: Espaços Vetoriais são casos particulares de Módulos sobre Anéis, Transformações Lineares, da mesma forma, generalizam-se em Endomorfismos de Módulos. A perspectiva da AL é outra. Os matemáticos aplicados, os físicos, analistas, geômetras – esses últimos, profissionais mais ligados à própria Matemática – tendem a ver a AL dentro de uma perspectiva que se encaixa em seus respectivos contextos, sem as necessidades de generalização buscadas pela AM, principalmente após a ascensão do modo de fazer Matemática do grupo francês Bourbaki. É nesse caldo de visões diferentes de um mesmo conjunto de objetos que se dão alguns fenômenos: a organização de um saber a ser ensinado, uma posterior emancipação e

[25] "However, the reviewer doubts whether this book could be used successfully in a course on matrices and linear equations. The presentation is definitely that of an analyst and the "algebraic" point of view is purposely avoided."

elevação de status desse saber. Para acompanharmos e até mesmo visualizarmos a materialização desses fenômenos, dentro da cultura escolar, nos valemos desse importante artefato que é o livro didático. Tivemos a oportunidade de perceber pelo acompanhamento da produção livresca até o ano de 1942, alguns movimentos que culminaram com o surgimento de uma nova disciplina acadêmica: a Álgebra Linear. A partir da década de 1950, a produção de manuais didáticos de AL teve um vertiginoso crescimento. Em diversas partes do mundo começam a surgir textos específicos de AL dentro da perspectiva formativa de seus autores. No nosso caso, vamos utilizar essa contextualização em trabalhos futuros a fim de buscarmos entender em que circunstâncias se insere o ensino da AM no Brasil e, como, a partir dele, se institucionaliza a AL como disciplina escolar. De papel fundamental na nossa construção será a produção de livros didáticos nacionais e a memória de alguns atores que vivenciaram esse período.

REFERÊNCIAS

Aydin, S. (2013). Some analysis on a first course in linear algebra. *Turkish Online Journal of Science & Technology*, 3(1), 139-144.

Aydin, S. (2009). The factors effecting teaching Linear Algebra. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 1(1), 1549-1553.

Banach, S. (1932). *Théorie des opérations linéaires*. Warszawa: Z Subwencji funduszu kultury Narodowej.

Bebiano, N. (1998). The development of Linear Algebra In Portugal. *IMAGE,* 21*,* 3-5.

Bini, D. A. (2012). Linear Algebra in Italy: Before and after computers. *IMAGE*, 49, 11-16.

Birkhoff, G. (1989). *Mathematics at Harvard, 1836–1944*. In: P.L. Duren, R. Askey & U. C. Merzbach (Eds). *A century of mathematics in America. Part II.* (pp.3-58). American Mathematical Society.

Birkhoff, G. & Maclane, S. (1992). A survey of modern algebra: The fiftieth anniversary of its publication. *Mathematical Intelligencer*, 14(1), 26-31.

Carroll, L. (1867). *An Elementary Treatise on Determinants: With Their Application to Simultaneous Linear Equations and Algebraical Geometry*. London: Macmillan.

Ciliberto, C. (1995). *Italian algebraic geometry between the two world wars*. Kingston, Ontário: Queen's University.

Chrystal, G. (1886). *Algebra: An elementary text-book for the higher classes of secondary schools and for colleges.* Edimburgh: Adam and Charles Black.

Corry, L. (1991). Estructuras algebraicas y textos algebraicos del siglo XIX. *Llull: Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, 14(26), 7-30.

Corry, L. (2012). *Modern algebra and the Rise of Mathematical Structures*. Basel-Boston-Berlim: Birkhäuser-Verlag.

Cowen, C. C. (1997). On the centrality of linear algebra in the curriculum. Disponível em: <http://www.maa.org/centrality-of-linear-algebra>.

D'Ambrosio, U. (1988*). Reminiscências do meu tempo de estudante na Maria Antônia*,". In Santos, M. C. L. dos. *Maria Antonia, uma rua na contramão*. Studio Nobel.

Day, J. M & Kalman, D. (1999). Teaching linear algebra: What are the questions. Department of Mathematics at American University in Washington DC, p. 1-16.

Dorier, J. (2002). *On the Teaching of Linear Algebra*. Mathematics Education Library. Netherlands: Springer.

Dorier, J. (2003) Teaching linear algebra at university. arXiv preprint math/0305018.

Dostor, G. (1877). *Éléments de la théorie des determinants*. Paris: Gauthier-Villars.

Drmac, Z. (2012). Linear Algebra in Croatia: S*piritus movens* and curious events. IMAGE, 49, 6-10.

Ewing, J. H. & Gehring, F. W. (Eds.). (2012). *Paul Halmos celebrating 50 years of mathematics*. Springer Science & Business Media.

Fan, K. (1992). Some aspects of the development of linear algebra in the last sixty years. *Linear algebra and its applications*, 162, 15-22.

González, M. P. (2009). *Evolución Cognitiva del Concepto de Espacio Vectorial*. (Tesis de doctorado no publicada). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Gracia, J. M. & Hernández, V. (1992). Linear Algebra in Spain. *IMAGE*, 8, 6-8.

Grande, A. L. (2006). *O conceito de independência e dependência linear e os registros de representação semiótica nos livros didáticos de Álgebra Linear*. (Dissertação deMestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

Halmos, P. R. (1970). Finite-dimensional Hilbert spaces. *The American Mathematical Monthly*, 77(5), 457-464.

Halmos, P. R. (1988). Some books of auld lang syne. In: Duren, P. L., R. Askey &U. C. Merzbach (Eds.). *A century of mathematics in America*. Part I (pp.131-174). American Mathematical Soc. Press.

Harel, G. (1987). Variations in linear algebra content presentations. *For the learning of mathematics*, 7(3), 29-32.

Julia, G. (1938). *Introduction mathématique aux théories quantiques*. Paris: Gauthier-Villars.

Julia, G. (1927). *Cours de cinématique*. Paris: Gauthier-Villars.

Kac, M. (1943). Review: Paul R. Halmos, Finite dimensional vector spaces. *Bull. Amer. Math. Soc*. 49(5), 349-350.

Klapsinou, A. & Gray, E. (s.d.). Definitions and Processes: two Contrasting Approaches to the teaching And Learning Of Linear Algebra. Disponível em: <http://www.clab.edc.uoc.gr/aestit/4th/PDF/425.pdf>.

Klapsinou, A. & Gray, E. (1999). The intricate balance between abstract and concrete in linear algebra. In: PME CONFERENCE. p. 3-153.

Kleiner, I. (2007). *A History of Abstract Algebra*. New York: Springer Science & Business Media.

Konyalioğlu, A. C., İpek, A. S. & Işik, A. (2003). On the teaching linear algebra at the university level: the role of visualization in the teaching vector spaces. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education. Series D: Research in Mathematical Education*, 7(1), 59-67.

Li, C., Tsing, N. (1996). Linear Algebra in Hong-Kong. *IMAGE,* 17, 14-16.

Lima, E.L. (1996). *Algebra Linear*. (2ª. ed.). Rio de Janeiro: IMPA.

Mansion, P. (1883). *Éléments de la théorie des déterminants avec de nombreux exercices*. Paris: Gauthier-Villars.

Moore, G. H. (1995). The axiomatization of linear algebra: 1875-1940. *Historia Mathematica*, 22(3), 262-303.

Radjabalipour, M. & Radjavi, H. (2009). Linear Algebra in Iran. *IMAGE,* v. 42, 20-21.

Soto, R. L. (2014). The Development of Linear Algebra Research in Chile. *IMAGE*, 53, 13-16.

Tomei, C. (1999). Dois semestres de algebra linear básica. *Anais do XXII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*. Santos

Tucker, A. (1993). The Growing Importance of Linear Algebra in Undergraduate Mathematics. College Mathematics Journal, 24(1), 3-9.

Uhlig, F. (2002). The role of proof in comprehending and teaching elementary linear algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 50(3), 335-346.

Ulus, A.Y. (2013). Teaching the diagonalization concept in linear algebra with technology: a case study at galatasaray university. *TOJET: The Turkish Online Journal of Educational Technology*, 12(1).

Van der Waerden, B. L. (1975). On the sources of my book Moderne Algebra. *Historia mathematica*, 2(1), 31-40.

Von Neumann, J. (1932). *Mathematische grundlagen der quantenmechanik*. Berlin: Verlag von Julius Springer.

Weld, L.G. (1893) *A short course in the theory of determinants.* New York: Macmillan.