

MANUAIS PREPARATÓRIOS PARA OS EXAMES DE ADMISSÃO AO GINÁSIO: uma análise sobre a fração

Késia Caroline Ramires Neves¹

RESUMO

Em um primeiro trabalho, voltado à investigação de métodos utilizados pelos alunos para manipular as frações em processo de avaliação, foi identificado que diferentes significados desse saber matemático apareciam em respostas às questões de provas dos exames de admissão ao ginásio (de 1931 a 1969). Os significados de *parte-todo*, de *número* e de *operador multiplicativo* foram encontrados em soluções dadas pelos alunos em várias edições desses exames. A partir disso, a pesquisa buscou reunir indícios sobre *como era ensinada* a representação de fração em manuais preparatórios para admissão, visto que procedimentos e estratégias utilizados para o ensino de fração, daquela época, podem colaborar para o entendimento da história dos saberes escolares e propor formas diferenciadas de ensinar fração que ampliem o repertório de formação e atuação docente. Assim, ao empregar categorias de análise mobilizadas por autores da história dos saberes, foi observado que alguns recursos para ensinar fração constam nos manuais preparatórios, tais como: desenhos e estratégias para a resolução de problemas. Logo, os manuais não pareciam se restringir apenas a uma preparação técnica e memorística dos alunos, mas também procuravam explicar a fração de maneira ilustrada e detalhada, o que contribui para a compreensão do *como era ensinada* a fração em outros tempos e *como pode ser ensinada* nos dias de hoje.

Palavras-chave: Frações. Manuais preparatórios. Exames de admissão ao ginásio.

ABSTRACT

In a first study, focused on the investigation of methods used by students to manipulate the fractions in the evaluation process, was identified that different meanings of mathematical knowledge appeared in the answers to the questions of evidence of exams for admission to the gymnasium (1931 to 1969). The meanings of part-whole, number and multiplicative operators were found in solutions given by students in various editions of these exams. From this, the research sought to gather clues about how it was taught the representation of fraction in preparatory manuals for admission, since procedures and strategies used for teaching about fractions, at that time, may contribute to the understanding of the history of school knowledge and propose differentiated forms of teaching which broaden the repertoire of teacher education and action. Thus, when using categories of analysis mobilized by authors of the history of knowledge, it was observed that some resources to teach fraction are included in the preparatory manuals, such as: drawings and strategies for solving problems. Therefore, the manuals did not seem to be restricted to only technical and memoristical preparation of the students, but they also tried to explain the fraction in an illustrated and detailed way, which contributes to the understanding of how the fraction was taught in other times and how it can be taught nowadays.

Keywords: Fractions. Preparatory manuals. Exams for admission to the gymnasium.

¹ Docente da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS, Campus Ponta Porã. E-mail: kesiaramires@hotmail.com

INTRODUÇÃO

O ensino de frações, enquanto um saber a ser ensinado ou enquanto uma representação que pode estar associada a diferentes significados, é uma amálgama presente na formação e na atuação dos professores. Campos, Magina e Nunes (2006) e Magina e Campos (2008), já assinalavam para a dificuldade que os próprios professores do ensino fundamental I apresentam para compreensão dos construtos² matemáticos representados na forma de fração. Há confusão para entender que se trata de uma mesma representação que remete a significados diferentes. Para além disso, há preocupação também em como prevenir um ensino de frações que seja ministrado, desde o ensino fundamental I, sem essa confusão. Assim, neste trabalho, apontamos como as frações eram ensinadas em período passado, visto que os procedimentos que eram mobilizados podem colaborar com a prática de ensino de professores de hoje.

Acrescentamos também à nossa discussão uma reflexão quanto aos problemas que dizem incitar a compreensão sobre fração, mesmo parecendo “desconexos de tudo”. Vejamos o seguinte exemplar: “Os $\frac{3}{5}$ da idade de Sonia são iguais a 9 anos; os $\frac{5}{6}$ da idade de Sérgio são iguais a 15 anos. Quem é mais velho e qual a diferença entre as duas idades?” (Thiré; Mello e Souza, 1942, p. 142). Seria esse problema puro “algebrismo” (Tahan, 1961)? Seria uma “aberração pseudo-didática” (Lopes, 2008)? Ou uma abordagem técnica sobre frações, para treino das propriedades sobre o assunto? O que tem a ver calcular idade das pessoas dessa forma? Realmente é um problema que incita a compreensão sobre frações? Vejamos que alargar o debate sobre os problemas empregados no manejo das frações é por em xeque, também, os problemas utilizados no *como ensinar*.

Nos anos 1930, 1940, 1950, 1960 problemas como esse apareciam em provas³ dos exames de admissão ao ginásio – ao menos foi o que constatamos nas provas aplicadas na Escola Estadual de São Paulo durante 40 anos. Alguns deles, por mais “pseudo-didáticos” que parecessem, suscitavam respostas precisas dos alunos. Talvez muito treino, ou uma lógica coerente, não sabemos de fato qual meio os alunos dispunham para a solução dos

² Denominamos de construtos àqueles conceitos ou diferentes significados inerentes à fração. “Kieren (1975) foi o primeiro pesquisador a chamar a atenção da comunidade científica para o fato de que os números racionais são constituídos de vários construtos e que a compreensão da noção de número racional depende do entendimento destas diferentes interpretações” (Magina; Campos, 2008, p. 27).

³ Sempre nos referiremos às *provas* como sendo aquelas dos exames de admissão ao ginásio.

problemas, mas verificamos que respondiam aos enunciados das questões, muitos deles, com soluções corretas.

Atentemos para o caso retirado do Exame de Admissão à 1ª Série, de 1938 (Valente, 2001⁴): “Comprei $\frac{4}{7}$ de uma peça de pano de $72\left(\frac{1}{3}\right)$ ms de comprimento, à razão de $14\$ \frac{1}{4}$ o metro; quanto gastei?”. Os tipos de soluções apresentadas pelos alunos foram:

- a) converter as partes fracionárias em números decimais, escrevendo 0,333 para $\frac{1}{3}$ e 0,25 para $\frac{1}{4}$. Logo, $72\left(\frac{1}{3}\right)$ ficou sendo 72,333... e $14\$ \frac{1}{4}$ ficou sendo 14\$25.

Depois os alunos multiplicavam tudo: $72,333 \times \frac{4}{7} \times 14,25$, e do decimal encontrado no numerador, o dividiam por 7. Essa resposta, como discutiremos mais adiante, poderia se enquadrar à manipulação de fração entendendo-a como *número*.

- b) converter apenas o $\frac{1}{4}$, colocando na forma 0,25, e depois multiplicar $\frac{217}{3}$ – que é a fração imprópria obtida de $72\left(\frac{1}{3}\right)$ – por $\frac{4}{7}$ e por 14,25, assim: $\frac{217}{3} \times \frac{4}{7} \times 14,25$.

Imaginamos que, talvez, por se tratar de “dinheiro” e pela resposta exigir o resultado em gasto/dinheiro, os alunos tivessem a preocupação de transformar o $\frac{1}{4}$ em números decimais, como no sistema monetário. Observamos também a facilidade com que muitos deles “transitavam” entre frações impróprias e números mistos, apontando o treinamento afiado para com essas transformações.

- c) converter os números mistos em frações impróprias, multiplicando todas as parcelas obtidas, da seguinte forma: $\frac{217}{3} \times \frac{4}{7} \times \frac{57}{4}$, sendo $\frac{217}{3}$ e $\frac{57}{4}$ as frações impróprias referentes, respectivamente, aos números mistos $72\left(\frac{1}{3}\right)$ e $14\left(\frac{1}{4}\right)$;
- d) a última solução que mostraremos é bem elaborada, considerando que se tratava de resposta de uma criança de 11 anos. Vamos ilustrá-la para fins didáticos:

⁴ Questão da Prova do Exame de Admissão ao Ginásio de 1938, arquivada no CD-ROM, v. 1, do Arquivo da Escola Estadual de São Paulo.

Figura 1 – Prova de Matemática de 1938 para admissão ao ginásio

(7) Solução: $\frac{4}{7} = 42 \frac{1}{3}$
 $\frac{1}{7} = \frac{3}{3}$
 $\frac{4}{7} = \frac{124}{3} = 41 \frac{1}{3} \times 14 \frac{1}{4} = \frac{124}{3} \times \frac{54}{4} = 589\#000$
 Resposta: gastei 589#000.

Fonte: Recorte da 3ª prova do Arquivo 1938_A do CD-ROM, v. 1. Arquivo da Escola Estadual de São Paulo.

No tipo de resposta (d), observamos que o aluno comparou expressões com denominadores diferentes, tratando a parcela do lado esquerdo da igualdade como significado de *parte-todo* e, ao mesmo tempo, colocando do lado direito o resultado da fração como *operador multiplicativo* sobre uma quantia. Esse procedimento do aluno, embora não apresente uma igualdade entre frações, evidencia uma correspondência entre elas e um domínio em operar com dois construtos que envolvem as frações: o de *parte-todo* e o de *operador multiplicativo*. Isso significa que os problemas dos anos 1930 em diante, ainda que muito criticados na atualidade, podiam provocar formas diferenciadas de pensamento ou de mobilização de procedimentos, o que, em certa medida, atendia ao ensino da época – os alunos acertavam os problemas e conseguiam nota para serem aprovados nos exames de admissão. Para nós, as respostas a esses problemas podem revelar formas de um ensino sobre fração que nem todos conhecemos hoje. De onde vem a ideia do aluno de operar com dois significados de fração concomitantemente? Como ele pensou nisso? Seria um raciocínio do aluno, ou se estudava tal procedimento na escola? Essas e outras questões serão discutidas ao longo desse texto, tentando elucidar possibilidades de um ensino de frações que poderia ter permitido as respostas de (a) até (d). Tencionamos entender um pouco mais sobre isso a fim de trabalhar os significados de fração com maior argumentação e exemplificações.

Assim, à vista do que vislumbramos pelas respostas ao problema anterior, é importante sopesar as críticas que realizamos sobre aqueles que parecem desconexos. Seriam mesmo desconexos? E se esses problemas instigavam um raciocínio lógico-matemático que possibilitava compreender os significados de fração, e ainda mais, mostravam que alunos entendiam a representação de fração e a utilizavam corretamente? Ademais, se as formas de ensino daquela época usavam problemas que alcançavam bons

resultados, então deviam cumprir as finalidades previstas. Portanto, por que esses tipos de problemas ainda são criticados quando aparecem nos livros didáticos?

Entendemos que essas perguntas são complexas, e mesmo que não possamos respondê-las de imediato, é preciso que as façamos, é preciso nos mantermos sempre alertas e reflexivos no sentido de colocar os “ensinos em relação as finalidades às quais eles estão designados e com os resultados concretos que eles produzem” (Chervel, 1990, p. 187). Dessa forma, as nossas considerações advertem não somente para qual *matemática a ensinar*, mas também ao conhecimento necessário *para ensinar*. *Como eram ensinadas* as frações naquela época? Que saberes os professores mobilizavam para ensiná-las? Abordavam, nos problemas, os diferentes significados de fração? As respostas a essas perguntas podem nos ajudar a ensinar frações nos dias de hoje? Resumindo, é importante que saibamos a história da matemática escolar, sobre os saberes matemáticos e os *saberes para ensinar matemática* (Bertini; Morais; Valente, 2017).

Enfim, para desenvolvermos essa discussão, partimos de uma investigação histórica do período dos exames de admissão ao ginásio. Como ficamos intrigados com as respostas que os alunos apresentaram aos problemas dos exames de admissão, em específico, às repostas ao exame de 1938⁵ do Estado de São Paulo, isso nos levou a analisar materiais de ensino dessa época. Contudo, outras hipóteses justificam a nossa escolha pelo período dos exames: (a) os exames de admissão regulavam, de certo modo, o currículo escolar, ditando os saberes prioritários para os alunos prosseguirem os estudos. Esses saberes, em específico, enfatizavam a aritmética dos números inteiros e decimais, mas também a aritmética dos fracionários. “Foi identificado que fração e medidas são os saberes matemáticos que foram mais utilizados, separados ou em combinação em situações, consideradas práticas” (Santos⁶, 2017, p. 13). Logo, supusemos que as propostas de ensino dessa época, quanto às frações, colaborariam com elementos aos currículos atuais; (c) como a política avaliativa dos exames perdurou por 40 anos, entendemos a sua expressividade e o poder que deteve sobre a educação brasileira. Sendo assim, teríamos possibilidade de encontrarmos mais livros didáticos desse período; (d) professores desse tempo se dedicaram ao preparo de alunos para a realização das provas (Machado, 2002;

5 Embora façamos referência às respostas e ao problema do exame de admissão ao ginásio de 1938, analisamos todas as provas das edições de 1931 até 1969 e observamos em várias delas os mesmos tipos de respostas aos problemas que envolviam frações. As provas analisadas foram aquelas da Escola Estadual de São Paulo. O acervo encontra-se disponível no repositório <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/1769> e está facilmente acessível, por isso também a nossa escolha por essas fontes.

6 Rosemary Santos obteve seus resultados com base em pesquisa realizada sobre as mesmas provas que analisamos.

Aksenen, 2013), o que nos motivou a pensar nas formas de ensino que circularam e foram utilizadas por aqueles que seriam submetidos a tal medida avaliativa.

Para tratar de todas essas proposições, buscamos respostas em manuais de preparação aos exames de admissão. Para as análises, resgatamos um modelo utilizado pela pesquisadora Viviane Barros Maciel (2016), o qual foi inspirado em autores da história dos saberes (Rita Hofstetter e Bernard Schneuwly (2009)). Vamos expor alguns extratos desse modelo logo adiante.

Com os resultados que obtivemos, esperamos complementar discussões de pesquisas que vêm apontando para: minimizar as dificuldades encontradas pelos alunos acerca dos obstáculos epistemológicos inerentes às frações (Magina; Bezerra; Spinillo, 2009; Silva; Almouloud, 2008; Vasconcelos, 2007; Magina; Campos, 2008); pensar o papel que a fração ocupa nos currículos escolares e como tratá-la na formação de professores (Silva; Almouloud, 2008); encontrar meios para que os professores trabalhem os diferentes significados da fração (Magina; Bezerra; Spinillo, 2009; Campos; Magina; Nunes, 2006; Magina; Campos, 2008), mas, principalmente, como pesquisa de cunho histórico, esperamos caracterizar o que era ensinado antigamente para colaborar na constituição de *saberes a ensinar e para ensinar* frações (Valente, 2018).

OS MANUAIS PREPARATÓRIOS PARA OS EXAMES DE ADMISSÃO AO GINÁSIO

O período em relação ao qual nos pautamos para discutir as frações, como ressaltamos anteriormente, tem início no tempo dos exames de admissão ao ginásio. Cabe lembrar que esses exames foram instituídos, em caráter nacional, pelo Decreto Nº 19.890, de 18 de abril de 1931, perdurando até a promulgação da Lei nº 5692, de 1971. Desse modo, o ano de 1931 serviu-nos como parâmetro inicial. Porém, ao propormos uma análise a partir dos manuais preparatórios para os exames de admissão ao ginásio – uma vez que esses poderiam nos mostrar indícios de um ensino dessa época, além de nos dizer de forma mais objetiva os elementos prioritários exigidos ao fim do primário e, concomitantemente, prioritários para o início do secundário – remarcamos nosso marco temporal para os anos 1940 a 1971, visto que os manuais preparatórios, ao que tudo indica, começaram a ser

produzidos a partir da década de 1940, quando surgiram os cursos preparatórios para os exames de admissão ao ginásio (Machado, 2002).

Entre os anos 1931 a 1971, os exames de admissão passaram por mudanças quanto ao número de questões exigidas nas provas, formato das questões, prescrições sobre os conteúdos a exigir, organização das provas em duas partes (Pinto, 2005; Santos, 2017) e outras alterações. Mas um ponto a se destacar era o do elevado número de reprovados. Os motivos: ora entendiam ser a falta de preparo dos alunos do primário, ora a capacidade de composição do próprio exame, “colocando os examinadores em uma situação constrangedora” (Machado, 2002, p. 20). Desse modo, para sanar o problema do alto número de reprovações, foram criados cursos preparatórios gratuitos nos estabelecimentos oficiais de ensino – o que ocorreu “devido ao grande número de reprovados e ao fato de que nem todos alunos podiam frequentar cursos preparatórios particulares, por serem caros” (Machado, 2002, p. 53).

Posteriormente, em meados de 1940, os cursos preparatórios para os exames de admissão proliferaram-se. Nessa mesma década, já tínhamos, inclusive, autores de livros didáticos escrevendo os “manuais preparatórios”, sendo alguns dos autores os próprios professores de escolas que ofereciam os exames. Essa constatação nos levou a pensar em uma preocupação quanto ao nível do ensino e quanto à proposta de preparar e aprovar mais alunos nas provas, mas também levou-nos a pensar que esses livros seriam “reflexos de práticas de ensino”, ou ao menos uma indicação da concepção de ensino de matemática praticada naquela época, ou seja, os manuais preparatórios poderiam ser resultados de uma transposição didática dos professores-autores, daquilo que ensinavam, para os livros.

Dessa forma, os manuais preparatórios foram considerados objetos privilegiados para se ler o que era prioritário ao final do ensino primário e início de ensino secundário, balizados pela forma de controle dos exames de admissão. E ainda mais importante, os consideramos como objetos representativos de práticas de ensino de alguns professores daquela época. Logo, poderíamos encontrar *elementos sobre qual matemática era ensinada*, quais *recomendações eram previstas para se ensinar frações*, *como ensinar*, e talvez encontrar o *para que ensinar frações*.

Na próxima seção, vamos expor alguns elementos que conseguimos identificar nos manuais preparatórios quanto à problemática deste trabalho.

ANÁLISES SOBRE OS MANUAIS PREPARATÓRIOS AO EXAME DE ADMISSÃO AO GINÁSIO

Como foi mencionado, alguns manuais preparatórios foram escritos por professores que lecionavam em escolas que ofereciam os exames de admissão. Alguns desses professores continham vasta experiência no ensino escolar e um deles foi um renomado autor de livros didáticos e também muito influente dentro da Educação Matemática, o professor Osvaldo Sangiorgi. Desse modo, os manuais para nossas análises foram selecionados buscando reunir características, tais como: manuais destinados a preparatórios para os exames de admissão e que tivessem autoria de professores reconhecidos para aquela época. Mas antes de tratar dessas fontes, destacaremos quem foram os autores da área Matemática que ajudaram a escrevê-los:

Autores como Jacomo Stávale, Ary Quintella, Osvaldo Sangiorgi, dentre outros, participaram dessa história impressionante de expansão da Nacional e transformaram-se em best-sellers para a educação matemática brasileira. Selecionados criteriosamente pela Editora, esses professores-autores de matemática foram trazidos para a Companhia por predicados que tendiam a emprestar sucesso às suas obras. Dentre eles, é possível citar: eram professores de grandes colégios, tinham penetração nos meios educacionais e bom relacionamento com instâncias oficiais da educação.

(Valente, 2008, p. 152).

Assim, Cecil Thiré (Prof. Catedrático de Matemática do Colégio Pedro II), Ary Norton de Murat Quintella (Prof. Catedrático de Matemática do Colégio Militar do Rio de Janeiro, diretor de diversos ginásios estaduais e também Diretor da Divisão de Ensino Normal do Instituto de Educação) e Osvaldo Sangiorgi (integrante da Comissão de Tecnologia da Educação, o Grupo de Ensino de Matemática, o Centro Paulista de Rádio e Televisão Educativas e vários colegiados oficiais voltados ao aprimoramento da pedagogia da matemática) foram os professores-autores que compuseram nossa pesquisa, por serem reconhecidos entre seus pares naquela época e por contribuírem com elementos para a história da educação matemática. A seguir, apresentamos a tabela ilustrando os manuais⁷ e seus respectivos autores.

⁷ O primeiro e o terceiro manual encontram-se disponíveis no Repositório Institucional da UFSC, em Acervos, História da Educação Matemática: <<https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/1769>>. O segundo manual ainda se encontra em fase de publicação nesse acervo.

Tabela 1 – Quadro de apresentação dos manuais

Título	Autor(es)	Ano	Edição	Editora	Número de Páginas	Áreas contidas
Manual de admissão	Cecil Thiré J. B. Mello e Souza	1942	4 ^a	Livraria Francisco Alves (RJ, SP, MG)	106	* Port. * Arit. * Geo. * Hist. do Brasil * Ciênc.
Exercícios de aritmética para o curso de admissão	Ary Quintella Newton O'Reilly (colaborador)	1954	10 ^a	Companhia Editora Nacional (SP) São Paulo Editora S/A. (SP)	118	Arit.
Programa de admissão – novo, com matemática moderna	Aroldo de Azevedo Domingos Paschoal Cegalla Joaquim Silva Osvaldo Sangiorgi	1968	19 ^a	Companhia Editora Nacional (SP)	209	Port. * Mat. Hist. do Brasil Geo.

Legenda: Port. – Português; Arit. – Aritmética; Geo. – Geografia; Hist. do Brasil – História do Brasil; Ciênc. – Ciência; Mat. – Matemática.

Fontes: Dados organizados pela pesquisadora e retirados também do Repositório Institucional da UFSC, Acervo História da Educação Matemática.

Tendo exibido os professores-autores, precisamos fazer um recorte também dos construtos relacionados à fração, os quais empregaremos como categorias de análise. Vale ressaltar que esses construtos foram discutidos por pesquisadores da teoria cognitivista contemporânea, (Thomas E. Kieren, Terezinha Nunes e outros) e não necessariamente os autores dos manuais de admissão tinham a pretensão de tratar desses construtos em seus livros, talvez nem os conhecessem assim como constam na literatura atual. Portanto, esses construtos nos servirão apenas como categorias de análise para tentarmos identificar noções sobre as frações que eram mobilizadas antigamente pelos professores-autores de manuais em tempos de exame de admissão⁸.

⁸ Essa ressalva é importante para não atingirmos um anacronismo que desfavoreça a discussão deste trabalho; queremos que os leitores, como nós, questionem se, em outros tempos, os construtos eram abordados e se eram abordados de forma diferente de agora, por isso a utilização desses construtos como categorias de análise.

Para este trabalho, extraímos de Campos, Magina e Nunes (2006) e de Castro (2014) algumas explicações sobre os construtos de fração: (i) fração como uma *relação parte-todo*, em que o significado é de partição de um todo em n partes iguais, em que cada parte pode ser representada como $\frac{1}{n}$; (ii) fração como *medida* – a quantidade é medida pela relação entre duas variáveis, como o caso da probabilidade de um evento ocorrer, ou seja, ela é medida pelo quociente número de casos favoráveis dividido pelo número de casos possíveis (é uma medida intensiva, que relaciona quantidades de naturezas diferentes); ou quando, por exemplo, se busca “contar” quantas partes caberá naquilo que se quer medir, como: quantos garrações de água de $\frac{1}{3}$ litros são necessários para encher um garração de 6 litros (é uma medida extensiva, que relaciona quantidades de mesma natureza); (iii) fração como *número* – existe a forma de representação fracionária ordinária e decimal. Exemplos: quando diferenciamos as frações em menores, ou maiores, ou quando a representamos na reta numérica, etc.; (iv) fração como *quociente*, indicando uma divisão e seu resultado; há uma diferença entre o significado parte-todo e quociente, vejamos: vamos pegar uma barra de chocolate, dividir em três pedaços e consumir dois desses pedaços, ou seja, consumir $\frac{2}{3}$ dela (parte-todo). Depois, vamos pegar duas barras de chocolate e dividir entre três pessoas, ou seja, $\frac{2}{3}$ (quociente). É possível observar que as situações se referem à divisão, no entanto, a partição do significado quociente não diz respeito a um único todo; (v) fração como *operador multiplicativo* – esse significado está associado ao papel de transformação, como uma ação que se deve imprimir sobre um número, transformando o seu valor nesse processo, ou dito de outro modo, um escalar aplicado a uma unidade.

Dados os construtos (ou significados das frações), a representatividade dos manuais e a questão central que procuramos responder (como era ensinada as frações?), apontaremos os indícios que as nossas análises nos revelaram a partir dos manuais preparatórios. Destacaremos os saberes objetivados, ou seja, os saberes formalizados que, segundo Maciel (2016, p. 48), “são a condição e o resultado de um ensino que ultrapassa o *hic et nunc* e visa ao mesmo tempo uma generalidade maior e possibilidade de reflexão e escolha”⁹.

⁹ Tradução de Viviane Maciel segundo texto do livro *Savoirs en (trans)formation: Au coeur des professions de l'enseignement et de la formation*, de Hofstetter e Schneuwly, de 2009, p. 21.

Para análise dos manuais, adotamos um modelo semelhante ao de Maciel (2016). Construimos quadros-síntese sobre os indícios encontrados nas fontes, tendo como parâmetros os itens já definidos por essa autora: *indicações da capa e contra capa*, *indicações do prefácio*, *ordem de apresentação dos conteúdos*, *uso de ilustrações*, *uso de dispositivos didáticos*, *direcionamentos explícitos ao professor no corpo do texto* e *detalhamento do que é proposto a ensinar*. De nossa parte, propusemos o item *tipos de problemas*. Porém, por questão de espaço, neste trabalho vamos ilustrar, resumidamente, apenas alguns dos resultados da análise comparativa acerca dos itens “indicações da capa e contra capa”, “indicações do prefácio” e “detalhamento do que é proposto a ensinar” – esse último item sendo o que mais nos ajudou a discutir a questão da pesquisa.

Da análise comparativa, obtivemos os seguintes resultados elencados por letras alfabéticas e subitens:

(x) quanto às indicações da capa e contra capa – os três manuais declaram que atendem às prescrições dos programas para os exames de admissão de sua época.

(y) sobre as indicações do prefácio – são manuais indicados aos professores, mas não restritos a esses. O tipo de escrita imprime um linguajar que serviria tanto para professores quanto aos alunos.

(z) detalhamento do que é proposto a ensinar – vamos desenvolver a análise por partes. Destacamos que somente o primeiro manual (que fora escrito, principalmente, por Cecil Thiré) e o terceiro (parte Matemática escrita por Sangiorgi) é que propõem parte teórica para o ensino e a aprendizagem dos saberes. Logo, nosso foco voltou-se mais a esses dois manuais¹⁰. Os resultados do item (z) serão distribuídos de (z.1) até (z.5), como segue.

(z.1) Ambos os autores iniciam o estudo das frações com a ideia de *parte-todo*, assim como expusemos no tópico (i). O manual de Thiré traz a definição com exemplos descritos; o de Sangiorgi traz também com desenhos. Apresentam os termos de uma fração – numerador e denominador – e logo chegam ao tratamento das frações impróprias, próprias, aparentes e números mistos. Sangiorgi utiliza figuras como barra de chocolate, pizza e figuras geométricas quaisquer para enfatizar o significado de *parte-todo*.

(z.2) No manual de Thiré, a explicação das frações impróprias antecede a de frações próprias e, no de Sangiorgi, as duas situações são explicadas concomitantemente, sendo diferenciadas por meio de ilustrações. Sangiorgi usa adição de frações para

¹⁰ O segundo manual, que foi organizado por Ary Quintella, tratava-se de coletânea de exercícios e problemas, mas não havia recomendações sobre como ensinar frações ou qualquer outro conceito matemático.

representar aquelas que são maiores do que 1, ou menores do que 1 ou que resultam em 1, com o intuito de tornar mais compreensível. Dessa forma, ele compara as frações e a unidade, e conclui a ideia de fração como representação de um *número fracionário*, escrevendo ao leitor: “Lembrete amigo: (1o.) As frações são os numerais que representam os números fracionários; [...] (3o.) Você pode, agora, definir número fracionário como um par ordenado de números naturais, com o segundo diferente de zero” (Sangiorgi, 1968, p. 243). A partir desse “Lembrete”, verificamos que é nesse momento que Sangiorgi sugere interpretar uma fração como *número*, o que Thiré faz um pouco mais a frente, quando trata de frações comparadas a números inteiros. Nas palavras de Thiré, a fração como *número* é assim descrita: “*Observação*: Qualquer número inteiro pode ser descrito sob forma de fração” (Thiré, 1942, p. 116 – grifo do autor).

Vemos que as ideias de *parte-todo* e de *número*, nos dois manuais, aparecem na parte introdutória do estudo das frações. Os dois autores preparam as suas explicações com base na comparação de frações com a unidade, ou comparando frações que tenham denominador 1 ou comparando frações com números inteiros. Sangiorgi ainda trata da fração, como *número fracionário*, sendo um par ordenado de números naturais. Todavia, questionamos se isso era e é intuitivo para as crianças.

Entendemos que o momento de *ensinar fração como número* não era precoce no primário e também não é nos dias de hoje. Vejamos que ao fazer ilustrações, Sangiorgi evidencia quando um número inteiro, representado na forma de fração, pode ter valor igual ao de um número fracionário. Isso pode facilitar a compreensão da relação entre número fracionário e número inteiro, ideia na qual ele acreditasse ser adequada para ensinar alunos de menor idade. Corroboramos com essa recomendação de Sangiorgi para ensinar um dos significados de fração. Por outro lado, a sua outra forma de ensinar, destacada no “Lembrete amigo”, parece-nos complicada pelo linguajar: fração como números racionais compostos por um par ordenado de naturais, com o denominador diferente de zero.

Fossemos nós o autor, talvez destacássemos mais a comparação de fração com a unidade (ainda que para os pequeninos, números entre 0 e 1 pareçam abstratos), introduzindo um raciocínio breve sobre os racionais, qual seja: de que existe “quantidades” menores que 1. Quem seriam elas? Também compararíamos as frações com os naturais, por exemplo: quanto vale $\frac{12}{3}$? Esse valor pode ser escrito de outra forma?

Porém, se a explicação de fração de Sangiorgi era “rebuscada” em certo momento, era por desenhos em outro, ou por comparações e escrita simples, talvez as escolhas de Sangiorgi fossem essas justamente por ele entender a importância de abordar as frações pelas suas diferenciadas representações e significados.

(z.3) No próximo tópico do estudo das frações, tanto o primeiro manual quanto o terceiro, tratam de simplificação de frações e de frações irredutíveis, e Sangiorgi menciona também as frações equivalentes. Tratam desse tópico antes de fazer comparação de frações. Recomendam reduzi-las aos mesmos denominadores para depois compará-las. Quando as frações têm mesmos numeradores, mas denominadores diferentes, as “maiores frações” são aquelas com menor denominador (comentário breve de Thiré). Sangiorgi, por sua vez, ilustra com desenhos todos os casos de comparação, o que supomos ter facilitado a compreensão sobre isso aos alunos da época.

(z.4) Quanto às operações fundamentais com os números fracionários, os dois autores fazem-nas priorizando as técnicas clássicas empregadas até os dias de hoje. Como muitos professores de hoje, nenhum dos autores explica o porquê de simplificar os numeradores com os denominadores na multiplicação de frações (Sangiorgi faz apenas um breve comentário); não explicam porque se multiplica a primeira fração pela inversa da segunda quando tem que se fazer a operação de divisão; tampouco destacam, na multiplicação de uma fração por um inteiro, que se está “transformando esse inteiro”. Sobre esse último ponto, somente Sangiorgi o explora melhor, quando passa a discutir sobre o que é *um singular e um plural no conjunto dos números fracionários*:

Singular ou unidade fracionária é uma fração da unidade considerada. Exemplo: $\frac{1}{3}$ é um singular. *Plural* é a soma de diversas unidades fracionárias, cada uma representando o singular em relação à unidade considerada. Exemplo: $\frac{2}{3}$ é um plural. É óbvio que o *inteiro* (representado por um número natural) é, por sua vez, um *plural*. Aplicações: 1^a.) O preço de um objeto é NCr\$1.800,00. Quanto custa $\frac{1}{3}$ desse objeto?

(Sangiorgi, 1968, p. 267 – grifos do autor).

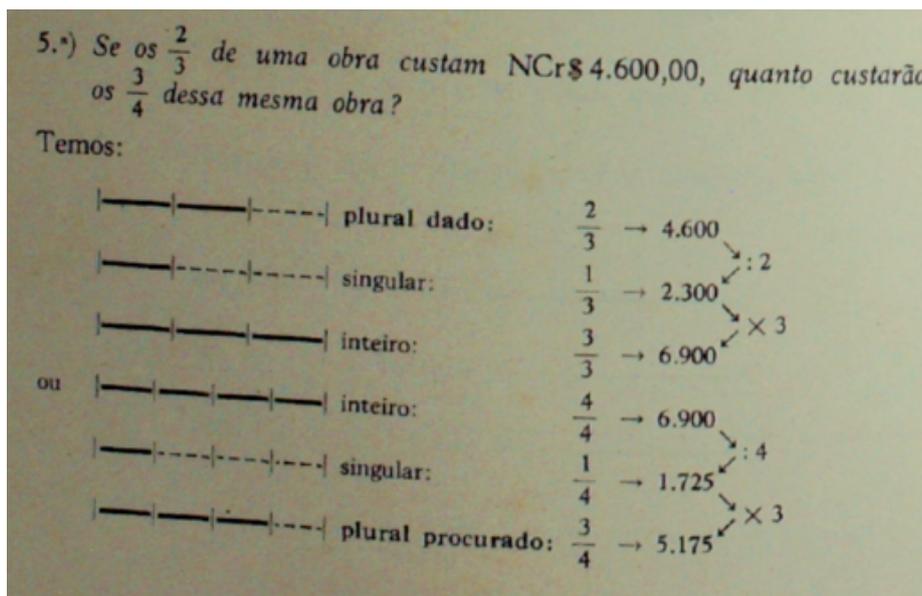
Esse conceito de singular e plural não aparece nos outros manuais das nossas análises. Para nós, parece explorar uma forma diferente entre a ideia de *parte-todo* junto a de *operador multiplicativo*, pois ao mesmo tempo mostra o que é uma parte da unidade e quanto resulta quando calculamos uma fração qualquer de uma quantia. Esses dois

construtos, sendo explorados juntos, apresentam a mesma lógica de raciocínio da resposta do aluno (d) do problema de 1938. Todavia, o manual que analisamos é de 1968, exatamente 30 anos depois. Então, haveria relação entre a resposta do aluno e o que fora ensinado 30 anos mais tarde? Será que já ensinavam em meados de 1930 algo próximo à relação entre parte-todo e operador multiplicativo, ou melhor situando, algo próximo à ideia do “par singular-plural”?

Podemos dizer que ou o aluno (da resposta (d) ao problema de 1938) teve aulas com a lógica do singular-plural em meados de 1930 ou estabeleceu um entendimento sobre isso por dedução própria. Basta compararmos a Figura 2, que demonstra como era explicada essa ideia no manual de 1968, escrito por Sangiorgi, e como se assemelha à resposta do aluno.

Para além dessas comparações entre a proposta de Sangiorgi sobre o singular-plural e a resposta do aluno, também cabe ressaltar na Figura 2 o ensino por meio de gráficos, setas, desenhos, esquemas¹¹, ou seja, evidências de um possível caminho para ensinar a resolver os problemas.

Figura 2 – Explicação sobre um singular e um plural



Fonte: recorte do manual Programa de admissão, 1968, p. 267.

Vale destacar que esse significado de operador multiplicativo é muitas vezes incompreendido pelos alunos de hoje (Magina; Campos, 2008), ainda mais quando se tem

¹¹ Não temos espaço para ilustrar outros esquemas de Sangiorgi.

que operar fração de uma fração, como os casos de problemas com porcentagem sobre porcentagem. Recentemente, nas aulas da graduação¹² em Matemática, os alunos não souberam calcular os $\frac{4}{5}$ de uma peça de pano que mede $72\left(\frac{1}{3}\right)$ ms – problema do início do nosso texto. Não compreenderam que deveriam operar os $\frac{4}{5}$ sobre o todo – os $72\left(\frac{1}{3}\right)$ ms – para encontrar o resultado que queriam.

(z.5) Caminhando para as últimas discussões sobre frações, os autores tratam de frações e números decimais. Primeiro, mostram as *frações decimais* relacionadas aos números decimais, depois, as *frações ordinárias* relacionadas aos números decimais. Para o primeiro caso, decompõem o numerador e denominador em adição de frações com mesmo denominador. Verifica-se qual das frações dá parte inteira e quais não. O resultado da parte inteira é o algarismo a ficar antes da vírgula, o resultado das demais frações compõem os algarismos após a vírgula conforme a ordem das classes, se décimos, se centésimos, se milésimos e assim por diante. Conclui-se que com isso obtém-se um número decimal. Para o segundo caso, usam a divisão simples de numerador pelo denominador, observando o número obtido e sua dízima. Não vimos explicações, nos manuais, sobre porque colocar zeros no dividendo, inserir também zero no quociente e a vírgula logo depois (quando isso é necessário). Por fim, priorizam a abordagem das técnicas de deslocamentos da vírgula quando números decimais são multiplicados ou divididos por potência de 10. Da nossa avaliação, não terem explicitado os porquês das técnicas, tenha levado muitos alunos ao erro, assim como vemos hoje.

Portanto, o que podemos concluir das nossas análises sobre os manuais é que os autores se concentram em uma *forma de ensinar* bastante voltada às técnicas de ensino, mas nem sempre limitadas a isso. Sangiorgi dá-nos exemplos claros de que ilustrar com desenhos pode colaborar no ensino e no entendimento de frações e de alguns de seus diferentes significados. Também nos dá subsídios sobre esquemas/resolução de problemas que podem contribuir no ensino de hoje. Além disso, quando olhamos as respostas dos alunos daquela época às questões dos exames de admissão e vemos algumas soluções corretas e precisas, retomamos a pergunta: seriam aqueles problemas “pseudo-didáticos”? Talvez, dependendo da forma de ensiná-los, fossem produtivos.

¹² Aulas ministradas por mim na UFMS.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante um trabalho inicial com as provas dos exames de admissão ao ginásio da Escola Estadual de São Paulo (de 1931 a 1969), ao observar respostas dos alunos às questões matemáticas envolvendo frações e identificar a manipulação de diferentes significados desse conceito, procuramos investigar *como era ensinada* as frações nesse período. As soluções empregadas pelos alunos nos pareceram muito precisas e nos levantaram a curiosidade sobre os processos mobilizados, naquela época, para ensinar fração.

Assim, buscamos em manuais preparatórios de admissão ao ginásio possíveis indícios acerca dos processos de ensino sobre frações. Das análises sobre esses manuais, observamos que as respostas dos alunos às provas dos exames assemelham-se a um tipo de ensino registrado nessas fontes e que, possivelmente, era um tipo de ensino empregado pelos professores, visto que alguns deles eram os próprios autores dos manuais e lecionavam em escolas que aplicavam os exames.

Sobre o *como ensinar* os diferentes significados da fração, os manuais revelaram que o construto de parte-todo era explicado com desenhos, ilustrações. Já o significado de operador multiplicativo, foi discutido apenas no manual que teve a colaboração de Sangiorgi, quando era abordada a ideia de um singular e um plural no conjunto dos números fracionários.

Quanto à fração como número, os autores dos dois manuais analisados nos mostraram formas de ensinar diferentes. Thiré comparou as frações com números inteiros usando apenas a representação de fração na forma $\frac{n}{m}$. Já Sangiorgi apelou ao recurso pictórico, o que do nosso ponto de vista pode ter ajudado os alunos da época a compreender fração como número. Os construtos de medida e de fração como quociente não foram explorados nos manuais analisados.

Percebemos que o *como ensinar* frações, entre os dois manuais analisados, seguiram caminhos distintos. Quando cotejamos as apresentações do conceito fração feita por ambos, fica evidente que ilustrações pictóricas de Sangiorgi e esquemas de resolução de problemas buscaram contribuir para a compreensão do que era proposto. No entanto, vemos que nem tudo Sangiorgi pôde representar na forma de desenhos ou esquemas e,

nesse caso, supomos que os professores da época precisavam buscar outros recursos para ensinar, tais como, manipular objetos concretos ou simular situações práticas.

Para nós, a investida histórica sobre o *como era ensinado* frações revelou-nos indícios importantes para práticas de ensino de hoje, pois reiterou o argumento de que ensinar apenas por meio de técnicas não é, e não era – como verificamos pelo manual de Sangiorgi – suficiente.

REFERÊNCIAS

Bertini, L. F.; Morais, R. S.; Valente, W. R. (2017). *A Matemática a ensinar e a Matemática para ensinar: novos estudos sobre a formação de professores*. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física.

Campos, T. M. M.; Magina, S.; Nunes, T. (2006). O professor polivalente e a fração: conceitos e estratégias de ensino. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo (SP), v. 8, n. 1, p. 125-136.

Castro, F. C. C. (2014). *Quantidades intensivas: análise de uma intervenção com alunos do 5º ano do ensino fundamental*. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis (SC).

Chervel, A. (1990). História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. *Revista Teoria e Educação*. Porto Alegre: Panonica, n. 2, p. 177-229.

Hofstetter, R.; Schneuwly, B. (2009). Savoirs en (trans)formation: Au coeur des professions de l'enseignement et de la formation. In: Rita Hofstetter et al. *Savoirs en (trans) formation*. Bruxelles: Éditions de Boeck Université, de Boeck Supérieur. Raisons éducatives.

Kieren, T. (1975). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In Lesh, R. (Ed.) *Number and measurement: Paper from a research workshop*. Columbus, Ohio: ERIC/MEAC, p.101-144.

Machado, R. C. G. (2002). *Uma análise dos exames de admissão ao secundário (1930-1970): subsídios para a história da educação matemática*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC – SP, São Paulo (SP).

Maciel, V. B. (2016). Caracterizando saberes para ensinar *aritmética* no curso primário em manuais pedagógicos. *Caminhos da Educação Matemática em Revista* (online), Sergipe, v. 6, n. 1, p. 45-56.

Magina, S.; Campos, T. M. M. (2008). A Fração nas Perspectivas do Professor e do Aluno dos dois primeiros ciclos do Ensino Fundamental. *Bolema*, Rio Claro (SP), ano 21, n. 31, p. 23-40.

Magina, S.; Bezerra, F. B.; Spinillo, A. (2009). Como desenvolver a compreensão da criança sobre fração? Uma experiência de ensino. *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos*, Brasília (DF), v. 90, n. 225, p. 411-432.

Lopes, A. J. (2008). O que Nossos Alunos Podem Estar Deixando de Aprender sobre Frações, quando Tentamos lhes Ensinar Frações. *Bolema*, Rio Claro (SP), ano 21, n. 31, p. 1-20.

Pinto, N. B. (2005). Cultura escolar e práticas avaliativas: uma análise das provas de matemática do exame de admissão ao ginásio. In: VALENTE, W. R. (org.) *Avaliação em Matemática: histórias e perspectivas atuais*. Campinas (SP): Editora Papirus.

Sangiorgi, O. (1968). Matemática. In: Azevedo, A.; Cegalla, D. P.; Silva, J.; SANGIORGI, O. *Programa de admissão, nôvo, com matemática moderna*. 19. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, p. 149-357.

Santos, R. (2017). *Saberes matemáticos identificados em provas do exame de admissão ao ginásio do Colégio São Paulo (1931-1969)*. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática), Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão (SE).

Silva, M. J. F. da.; Almouloud, S. A. (2008). As operações com números racionais e seus significados a partir da concepção parte-todo. *Bolema*, Rio Claro (SP), ano 21, n. 31, p. 55-78.

Tahan, M. (1961). *Didática da Matemática, 1º volume*. São Paulo: Saraiva.

Thiré, C. (1942). Aritmética. In: Thiré, C.; Mello e Souza, J. B. *Manual de Admissão*. 4. ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves.

Thiré, C.; Mello e Souza, J. B. (1942). *Manual de Admissão*. 4. ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves.

Valente, W. R. (2008). Livro didático e educação matemática: uma história inseparável. *Zetetiké*, Campinas (SP), v. 16, n. 30, p. 139-162.

Valente, W. R. (Org.). *Os Exames de Admissão ao Ginásio*. Arquivo da Escola Estadual de São Paulo. São Paulo: GHEMAT, 2001, CD-ROM. v. 1, 2 e 3.

Vasconcelos, I. C. P. (2007). *Números fracionários: a construção dos diferentes significados por alunos de 4ª à 8ª séries de uma escola do ensino fundamental*. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre (RS).