HISTEMAT – Revista de História da Educação Matemática
Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 2447-6447

ENSINO DE FUNÇÕES E AS METARREGRAS DO DISCURSO:
refletindo sobre a definição atual de função a partir de algumas definições históricas

Leandro André Barrada Benedito[1]
Aline Bernardes[2]

RESUMO
Apresentamos uma proposta para o ensino de funções, utilizando a história da matemática, baseada em uma pesquisa de mestrado já concluída. A proposta foi inspirada no trabalho desenvolvido por Tinne Hoff Kjeldsen e Pernille Hviid Petersen, que articulam história da matemática com o ensino de matemática, a partir da teoria da *commognition* de Anna Sfard. De acordo com Sfard, a matemática é um tipo de discurso moldado por dois tipos de regras: as regras no nível do objeto e as regras metadiscursivas, ou seja, as metarregras. As metarregras têm impacto na forma como os objetos matemáticos são definidos e utilizados. O foco do artigo será descrever como o referencial teórico foi utilizado para desenvolver um material de ensino. Três roteiros foram elaborados, nos quais alguns momentos históricos do desenvolvimento do conceito de função foram explorados, incluindo as contribuições dos matemáticos Euler, Fourier e Dirichlet. Realizamos um estudo de campo com estudantes do terceiro ano do ensino médio, com o objetivo de investigar o impacto de um experimento com fontes históricas, governadas por diferentes metarregras, na aprendizagem de função dos estudantes. Relataremos como foi a aplicação desses roteiros, trazendo alguns dados do estudo de campo, com o objetivo de ilustrar nossas interpretações sobre as reações do grupo ao material e à proposta.

Palavras-chave: Função. História da matemática. Ensino de funções. *Commognition*. Metarregras.

ABSTRACT
We present a proposal for the teaching of functions, using the history of mathematics, based on an already completed master's research. The proposal was inspired by Tinne Hoff Kjeldsen and Pernille Hviid Petersen’s work, who articulate the history of mathematics with the teaching of mathematics, from Anna Sfard’s theory of commognition. According to Sfard, mathematics is a type of discourse shaped by two types of rules: object-level rules and metadiscursive rules or metarules. The metarules have an impact on how mathematical objects are defined and used. The focus of the article will be to describe how the theoretical framework was used to develop a teaching material. Three teaching scripts were elaborated, in which some historical episodes of the development of the concept of function were explored, including the contributions of the mathematicians Euler, Fourier and Dirichlet. We conducted a field study with students of high school level, in order to investigate the impact of an experiment with historical sources, governed by different metarules, in the students’ learning of function. We will report on the application of these teaching scripts, bringing some data from the field study, in order to illustrate our interpretations about the reactions of the group to the material and the proposal.

Keywords: Function. History of Mathematics. Teaching of Functions. Commognition. Metarules.

1Mestre pelo PROFMAT na Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro - UNIRIO. E-mail: lbarrada@yahoo.com.br
2 Docente do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro - UNIRIO. E-mail: aline.bernardes@uniriotec.br.

INTRODUÇÃO

O conceito de função tem um papel essencial na Matemática. A sua utilização para a construção de modelos de fenômenos naturais e sociais marca a importância desse conceito nas relações da Matemática com as outras ciências. Nos currículos da Educação Básica, o tema funções recebe bastante atenção. Noções de correspondência são trabalhadas desde o sexto ano do Ensino Fundamental, quando grandezas como preço e peso, capacidade e volume, entre outras, são associadas.

Pela Base Nacional Curricular Comum (BNCC), o tema relações entre grandezas é deve ser estudado no 7º ano do Ensino Fundamental, na discussão sobre a diferença entre incógnita e variável. O conceito de função é introduzido no nono ano, esperando alcançar as seguintes habilidades:

> Compreender as funções como relações de dependência unívocas entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.
>
> (Brasil, 2017, p. 269).

Em geral, no 9º do Ensino Fundamental são apresentadas as funções afim e quadrática. No Ensino Médio, funções são estudadas em todos os anos, de forma mais intensa no 1º ano. Os guias de livros didáticos do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) mostram que os livros didáticos do 1º ano dedicam muitas páginas ao tema (e.g. Brasil, 2017)

Palis (2013) aponta algumas dificuldades no ensino deste tema. Segundo ela, muitos estudantes acreditam que todas as funções podem ser definidas por uma fórmula algébrica, o que faz bastante sentido, pois grande parte do currículo voltado para o estudo de funções dedica-se aos tipos de funções: função afim, quadrática, exponencial, logarítmica, modular, trigonométrica e outras. E os tipos de funções são caracterizados pela sua representação algébrica, mais do que por suas propriedades. Palis (2013) também aponta que a concepção citada acima é acompanhada da dificuldade em diferenciar variável de incógnita e função de equação.

Certamente, a representação algébrica tem a sua importância, no entanto, enxergar a função como uma fórmula algébrica é bastante restritivo, pois uma função que não esteja (ou até mesmo não possa ser) expressa por uma fórmula algébrica poderá não ser reconhecida como função pelos estudantes.

Acreditar que toda função pode ser definida por uma fórmula algébrica remete-nos a um momento do desenvolvimento histórico desse conceito, em que funções eram entendidas como expressões analíticas. Falamos, mais especificamente, da definição apresentada por Euler em 1748, na qual o conceito de função era identificado a sua representação algébrica.

Apesar das primeiras definições de função levarem a sua associação com a representação algébrica, o conceito de função mudou algumas vezes ao longo do tempo. Temos aqui um exemplo bastante expressivo de que os objetos da matemática podem passar por revisões e mudar. Euler modificou a definição apresentada inicialmente em 1748, num tratado publicado no ano de 1755. Mais tarde, o matemático alemão Dirichlet (1805 – 1859) questionou a necessidade de expressar uma função por meio de uma expressão analítica, em um artigo publicado em 1837. Em 1939, Nicolas Bourbaki[3] definiu função como certa relação entre dois conjuntos, ou seja, uma relação que associa cada elemento do primeiro conjunto, a um único elemento do segundo conjunto.

O conceito de função é um ótimo exemplo para desconstruir a imagem da matemática como uma ciência imutável e atemporal. Em nosso entendimento da matemática como um conjunto de práticas sociais (Roque, 2014), cujo desenvolvimento não é de modo algum linear, nem cumulativo, consideramos importante descontruir a visão da matemática como um produto pronto e acabado e promover uma visão dessa ciência como uma construção humana. Uma possibilidade para isso é fomentar a discussão de que os conceitos matemáticos podem ter sido diferentes do modo como são apresentados no ensino, nos dias de hoje. Nesse sentido, a história da matemática apresenta-se como um recurso.

Um outro papel que a história da matemática pode desempenhar no ensino é apontado por Roque e Giraldo (2014). Segundo eles, a história da matemática possibilita "recuperar o ambiente problemático em que os objetos matemáticos foram definidos, seus métodos inventados e seus teoremas demonstrados, enfatizando que a matemática se relaciona, de modo concreto, com os seus problemas". (Roque & Giraldo, 2014, p. 21)

Os problemas são entendidos como tendo um significado mais amplo, para além dos exercícios propostos para o aprendizado de certo conteúdo. São entendidos como o

[3] Nicolas Boubaki foi um pseudônimo adotado por um grupo de matemáticos, em sua maioria franceses, na primeira metade do século XX.

motor do desenvolvimento da matemática, podendo ser questões internas à própria matemática ou de outras áreas do conhecimento, como a física. Desse modo, a história pode contribuir para promover um ensino mais problematizado.

Neste artigo, relataremos uma parte da pesquisa apresentada na dissertação de Benedito (2017), cujo produto traz uma proposta para o ensino de funções, baseada em alguns momentos do desenvolvimento histórico do conceito de função. A pesquisa teve como principal objetivo: investigar o impacto de uma experiência com fontes históricas na aprendizagem de função dos alunos. Em relação aos objetivos de aprendizagem, esperávamos que a proposta levasse os estudantes a refletirem sobre a definição atual de função e sobre o significado do domínio de uma função. Além disso, buscamos desconstruir a identificação que os estudantes fazem entre o conceito e a sua representação algébrica, conforme apontado por Palis (2013).

Como parte do produto da dissertação, Benedito (2017) desenvolveu um material para a proposta, contendo uma descrição dos momentos históricos selecionados e atividades de cunho histórico e de cunho matemático. O material foi aplicado com um grupo de quinze estudantes do terceiro ano do ensino médio de uma escola particular de Nilópolis, no estado do Rio de Janeiro.

A proposta de ensino foi inspirada pelo trabalho desenvolvido por Tinne Hoff Kjeldsen e Pernille Hviid Petersen (Kjeldsen & Petersen, 2012), que articula a história da matemática com o ensino, a partir da teoria da matemática como um discurso proposta por Anna Sfard (2008).

Nosso foco neste artigo será descrever como o referencial teórico foi utilizado para desenvolver o material, ilustrando com a apresentação de dois roteiros. Relataremos como foi a aplicação desses roteiros, trazendo alguns dados do estudo de campo realizado na pesquisa de Benedito (2017) para ilustrar o *feedback* dos participantes da pesquisa. Não é nosso objetivo apresentar neste artigo uma análise rigorosa dos dados coletados no estudo.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A articulação entre história da matemática e ensino de matemática, com fundamentação na teoria da *commognition* (Sfard, 2008), foi inaugurada pela pesquisadora dinamarquesa Tinne Hoff Kjeldsen (2011). Kjeldsen apresentou um argumento teórico baseado em alguns conceitos da teoria de Sfard (2008), o qual confere um novo papel à história da matemática no ensino.

A PERSPECTIVA DA MATEMÁTICA COMO UM DISCURSO

A aprendizagem, na perspectiva de Sfard (2008), parte da concepção de que para aprender o indivíduo deve fazer parte de uma determinada comunidade de discurso. E, para que isso ocorra, o indivíduo precisa aprender a comunicar-se.

Na teoria em questão, comunicação e pensamento são reconceituados e entendidos como uma unidade. A comunicação é definida como um tipo de atividade coletiva padronizada, que se desenvolve pelas ações e reações dos indivíduos que estão tentando se comunicar. E o pensamento é definido como uma comunicação interna com você mesmo, a qual não precisa ser expressa por palavras.

Conceber pensamento como uma forma de comunicação é um ponto forte na teoria de Sfard (2008). Tal perspectiva transpõe a ideia de que o pensamento precede a comunicação e possibilita olhar para os processos cognitivos e de comunicação interpessoal como diferentes manifestações do mesmo fenômeno. Para destacar a unidade entre pensamento e comunicação, Sfard (2008, p. 83) cunhou o termo *commognition*, que é a combinação entre as palavras *communicational* e *cognition*.

Os diferentes tipos de comunicação são chamados de discursos, eles trazem juntos alguns indivíduos, assim como excluem outros. Dessa forma, a sociedade é dividida em várias comunidades de discursos e a matemática é vista como um tipo de discurso. Aprender matemática requer fazer parte do discurso matemático e ser capaz de individualizá-lo. Em outras palavras: "se tornar capaz de fazer uma comunicação matemática não somente com os outros, mas também consigo mesmo" (Sfard, 2007, p. 575, tradução nossa). Sfard propõe, ainda, que aprender matemática equivale a modificar e estender o próprio discurso.

O discurso matemático é distinguido de outros a partir de quatro caraterísticas: i) vocabulário usado (por exemplo: função, matriz, derivada); ii) mediadores visuais (como gráficos, figuras geométricas); iii) narrativas, que são as definições, os teoremas, entre outros; iv) rotinas, que são regularidades ou padrões repetitivos do discurso, que ditam como as narrativas são produzidas e aceitas pela comunidade.

Os padrões que regulam as atividades coletivas de um discurso podem ser descritos como resultado de processos governados por dois tipos de regras: regras do nível do objeto (object-level rules) e regras metadiscursivas (metadiscursive rules).

As regras do nível do objeto são definidas como “narrativas sobre regularidades no comportamento dos objetos do discurso”. São exemplos desse tipo de regras: “a soma dos ângulos externos de qualquer polígono convexo é igual a 360º - na geometria euclidiana”. “Dados a e b números reais, então a.b = b.a”.

As regras metadiscursivas ou metarregras “definem padrões na atividade dos discursantes ao tentar produzir e substancializar[4] narrativas no nível do objeto” (Sfard, 2008, p. 201, nossa tradução). Essas regras são, geralmente, implícitas no discurso. Um exemplo de quando elas se manifestam é quando julgamos se uma determinada descrição pode ser considerada como uma definição ou se uma demonstração pode ser aceita como correta.

Na teoria aqui discutida, a aprendizagem ocorre em dois níveis: a partir da expansão do discurso com a extensão do vocabulário, da construção de novas rotinas e da produção de novas narrativas (*object-level learning*); e a partir da mudança nas metarregras (*metalevel learning*), por exemplo, definir uma palavra ou identificar uma figura geométrica de uma nova maneira.

Sendo as metarregras implícitas no discurso (em geral), elas são difíceis de serem percebidas. Desse modo, modificar as metarregras não é uma tarefa fácil, nem algo que podemos esperar que os participantes desenvolvam sozinhos. Daí a importância de promover situações no ensino em que as metarregras sejam explicitadas.

A noção chave para a aprendizagem no nível meta é o que Sfard (2008) chama de *commognitive conflict*, descrita como a situação na qual o aprendiz tem contato com um novo discurso, moldado por metarregras distintas daquelas que ele vem se apoiando.

O PAPEL QUE A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA ADQUIRE COM A TEORIA DE SFARD

Constatando que as metarregras são estabelecidas historicamente e que não são estáticas - podem mudar ao longo do tempo, Kjeldsen (2011) apresentou um argumento teórico, defendendo que a história da matemática é uma fonte de discursos moldados por

[4] A palavra “substancializar” é a nossa tradução para “substantiate”, palavra bastante empregada por Sfard em seu livro (SFARD, 2008). Sfard emprega o termo substantiate em referência ao processo pelo qual os participantes de um discurso se tornam convencidos de que uma dada narrativa pode ser aceita como válida.

diferentes metarregras. Assim sendo, a história da matemática apresenta-se como uma possibilidade para promover os chamados *commognitive conflicts*.

O contraste entre as metarregras implícitas nas fontes históricas e as atuais pode levar os estudantes a perceberem e explicitarem suas próprias metarregras. Tal contraste se revela por meio das diferentes concepções sobre os objetos matemáticos, das diferentes definições, do modo distinto que as ferramentas matemáticas são empregadas, entre outros. Desse modo, a história da matemática pode ajudar a criar situações em que as metarregras podem ser transformadas em objetos explícitos de reflexão dos estudantes.

Kjeldsen, em parceria com outros pesquisadores, apresentou alguns exemplos voltados para o ensino superior com o objetivo de ilustrar seu argumento teórico. Em especial, Kjeldsen e Petersen (2012, 2014) trazem os resultados de uma pesquisa de campo em que uma proposta para o ensino de funções com perspectiva histórica foi implementada em uma turma equivalente ao ensino médio brasileiro. Nesta pesquisa, o objetivo das pesquisadoras foi utilizar a história para levar os estudantes a refletirem sobre suas próprias metarregras quando lidam com funções.

Os trabalhos de Kjeldsen inspiraram outras pesquisas, como, por exemplo, a pesquisa de Bernardes (2016), que desenvolveu uma proposta para o ensino de matrizes e determinantes com perspectiva histórica, fundamentada na teoria de Sfard (2008). Em especial, Kjeldsen e Petersen (2012) inspiraram o desenvolvimento de uma proposta para o ensino de funções (Benedito, 2017), a partir de algumas definições que foram apresentadas para este conceito ao longo da história.

O TRABALHO DE BESTE GÜÇLER

Beste Güçler (2015), também inspirada pela pesquisa de Kjeldsen e Petersen (2012), realizou um experimento de ensino com o objetivo de explorar a aprendizagem de função de alunos universitários. No estudo, a pesquisadora também utilizou a teoria de Sfard (2008). O foco do artigo foi comunicar os resultados da parte inicial do estudo, em que discussões sobre algumas definições históricas de função foram promovidas nas três primeiras semanas de um curso.

Foram realizadas atividades para que os participantes tivessem contato com metarregras diferentes, relativas ao conceito de função, com o objetivo de levá-los a refletir sobre suas próprias metarregras. As atividades iniciam por levar os participantes a refletirem coletivamente sobre as suas próprias definições de função. Somente depois entraram em cena algumas definições históricas de função - apresentadas por Euler, Dirichlet e Bourbaki. Em seguida, foram exploradas duas definições atuais estudadas por eles em livros didáticos.

Güçler (2015) listou algumas metarregras, que influenciaram a formulação das definições históricas utilizadas por ela nas atividades. Em nossa proposta para o ensino de funções, utilizamos algumas das metarregras descritas por Kjeldsen e Petersen (2012) e por Güçler (2015) e as exploramos na elaboração de um material, que inclui uma parte histórica e atividades.

Desse modo, o referencial teórico apresentado nesta seção orientou a escolha dos momentos históricos para a elaboração do material de ensino e das atividades que constam nesse material (Benedito, 2017). Os momentos históricos foram eleitos por se tratarem de discursos moldados por metarregras distintas entre si e distintas daquelas que moldam o discurso atual sobre funções no ensino básico. Apresentaremos essas metarregras na próxima seção.

MOMENTOS HISTÓRICOS E METARREGRAS

A parte histórica dos roteiros foi baseada em um resumo, apresentado em Benedito (2017), o qual foi elaborado a partir de Roque (2012), Kleiner (1989) e Lutzen (2008).

O primeiro momento histórico é marcado pela primeira definição de função apresentada pelo matemático suíço Leonhard Euler, na obra *Introduction in analysin infinitorum* (Introdução à análise infinita), de 1748. As séries infinitas desempenhavam um papel importante para representar curvas no século XVII. No século XVIII, as séries se tornaram o meio mais geral para se estudar relações entre variáveis.

Euler situou a função como a noção central da matemática e propôs a seguinte definição: “Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de um modo qualquer dessa quantidade e de números, ou de quantidades constantes” (Roque, 2012, p. 374).

Euler buscava definir de modo preciso o que é uma “expressão analítica”, enumerando as operações por meio das quais ela poderia ser obtida. Ele também descreveu que: “Uma quantidade variável compreende todos os números nela mesma, tanto positivos quanto negativos, inteiros e fracionários, os que são racionais, transcendentes e irracionais. Não devemos excluir nem mesmo o zero e os números imaginários” (Roque, 2012, p. 374).

De acordo com Kjeldsen e Petersen (2012), Euler orientava-se por uma metarregra que foi enunciada como “princípio da generalidade da variável” e refere-se à ideia de que cada variável da função pode assumir qualquer número, seja ele real ou imaginário. Essa metarregra foi levada em conta na elaboração do primeiro roteiro e também a concepção de função de Euler como uma expressão analítica.

O segundo momento histórico é marcado pela segunda definição de função apresentada por Euler. No Século XVIII, um problema físico sobre cordas vibrantes influenciou a forma como uma função passaria a ser definida. Esse problema tratava de uma corda elástica com extremidades fixas em *0* e *l*, que é deformada em algum ponto inicial e então liberada para vibrar, ou seja, um problema que estuda as vibrações infinitamente pequenas de uma corda presa por suas extremidades. Em outras palavras, trata-se de determinar a função que descreve a forma da corda no tempo t.

Esse problema gerou um grande debate de ideias entres alguns matemáticos da época, sendo Euler e D’Alembert os principais protagonistas dessa discursão. D'Alembert em 1747, resolveu o problema da corda vibrante, dizendo que mesmo que as condições iniciais da corda sejam muito diferentes, elas deveriam ser representadas sempre por uma expressão analítica, ou seja, por uma equação algébrica ou uma série de potências. Euler concordou com a solução de D’Alembert, mas não concordou com sua interpretação, alegando que a forma inicial da corda poderia ser dada por várias expressões analíticas, ou até mesmo uma curva desenhada à mão livre.

Sendo assim, Euler apresentou uma nova definição de função, na obra *Institutiones calculi differentialis de* 1755:

> Se certas quantidades dependem de outras quantidades de maneira que se as outras mudam essas quantidades também mudam, então temos o hábito de chamar essas quantidades de funções dessas últimas. Essa denominação é bastante extensa e contém nela mesma todas as maneiras pelas quais uma quantidade pode ser determinada por outras. Consequentemente, se x designa uma quantidade variável, então todas as outras quantidades que dependem de x, de qualquer maneira, ou que são determinadas por x, são chamadas funções de x.

(Roque, 2012, p. 378).

Funções com mais de uma expressão analítica, eram consideradas por Euler como funções "descontínuas". A noção de continuidade de Euler era muito distinta daquela que conhecemos hoje. Para ele, uma função era dita contínua se fosse representada por uma única expressão analítica em todo o domínio dos valores da variável.

Outras metarregras influenciaram Euler na formulação da definição de função, a qual passou a ser baseada em ideias de mudança e de variação, de acordo com Güçler (2015).

O terceiro momento histórico é marcado pelos estudos do matemático e físico francês Jean Baptiste Joseph Fourier acerca do problema da propagação do calor e pelos estudos do matemático alemão Lejeune-Dirichlet.

No século XVIII, o problema da propagação do calor estudado por Fourier, transformou o conceito de função. Em 1822, Fourier apresentou seu principal resultado, o teorema que dizia que qualquer função f(x), definida sobre um certo intervalo, é representável por uma série de senos e cosenos sobre este intervalo. Em outras palavras, Fourier defendia que qualquer função podia ser representada por uma série trigonométrica da forma:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right)$$

Fourier dizia que o teorema era válido para todas as funções, sendo dada ao termo "função" uma interpretação mais geral:

> Em geral, a função fx representa uma sucessão de valores ou ordenadas, cada uma das quais é arbitrária. Uma infinidade de valores sendo dada à abscissa x há um número igual de ordenadas Todos têm valores numéricos reais, positivos ou negativos ou nulos. Não supomos que essas ordenadas fx estejam sujeitas a uma lei comum; Eles se sucedem de qualquer maneira, e cada um deles é dado como se fosse uma única quantidade.
>
> (Roque, 2012, p. 395).

Destacamos que Fourier diz na definição acima que para cada x só existe um correspondente fx, o que não era mencionado nas definições anteriores.

Dirichlet deu continuidade aos estudos de Fourier, que não apresentou uma demonstração para a sua afirmação de que qualquer função poderia ser representada por uma série trigonométrica em um certo intervalo.

Dirichlet questionou as definições anteriores, cuja propriedade geral era que a função tinha que ser dada através de uma ou de várias expressões analíticas. Dirichlet passou então a formular exemplos de funções que desafiavam as concepções de até então sobre este conceito. O exemplo abaixo foi apresentado em um artigo publicado em 1829 sobre a série de Fourier:

$$\boldsymbol{\varphi(x) = \begin{cases} c \; for \; x \in Q \\ d \; for \; x \notin Q \end{cases}}$$

De acordo com Dirichlet, a função acima não podia ser escrita como uma ou mais expressões analíticas, não podia ser representada por uma série de Fourier e era descontínua em todos os pontos e só poderia ser considerada como uma função se o conceito fosse entendido como uma relação arbitrária entre variáveis numéricas.

Ele reafirma suas ideias em uma definição apresentada em um artigo de 1837, no contexto de uma discussão sobre problemas relacionados à continuidade de funções, dizendo que:

> Sejam a e b dois números fixos e x uma quantidade variável que recebe sucessivamente todos os valores entre a e b. Se a cada x corresponde um único y, finito, de maneira que, quando x se move continuamente no intervalo entre a e b, y= f(x) também varia progressivamente, então y é dita uma função contínua de x nesse intervalo. Para isso, não é obrigatório, em absoluto, nem que y dependa de x de acordo com uma mesma e única lei, nem mesmo que seja representada por uma relação expressa por meio de operações matemáticas.
>
> (Roque, 2012, p. 458).

Segundo Güçler (2015), as metarregras que influenciaram a formulação da definição de Dirichlet conferiram um *status* de arbitrariedade ao conceito de função. Ele utilizava o termo "*funções arbitrárias*", para se referir à necessidade de ir além da ideia da função ser expressa por uma ou mais expressões analíticas, pois o importante naquele momento era afirmar a generalidade como forma de questionar as definições apresentadas até aquele momento.

ASPECTOS GERAIS DO MATERIAL DESENVOLVIDO

Cada um dos três roteiros contém um resumo do momento histórico abordado, atividades de cunho histórico e de cunho matemático, nos quais buscamos explorar algumas metarregras, ligadas à noção de função, que influenciaram Euler, Fourier e Dirichlet em suas formulações para definir função. As atividades convidam o estudante a comparar as definições apresentadas por esses matemáticos com a definição atual de função – de acordo (Dante, 2013), dentre outras coisas.

Também compuseram o material dois questionários, um inicial e outro final. O primeiro teve como objetivo saber o que os participantes compreendiam sobre função. Por exemplo, o que entendiam por função, por domínio, por imagem, dentre outros conceitos relacionados ao tópico função.

De um modo geral, no primeiro roteiro apresentamos um resumo do momento histórico com uma pequena biografia de Euler e suas contribuições para o desenvolvimento do conceito de função. O roteiro aborda de forma resumida alguns dos antecedentes da noção de função, como as contribuições de Galileu, Descartes, Fermat, Newton e Leibniz. Em seguida, apresentamos a primeira definição de Euler (1748), acompanhada de atividades elaboradas com o objetivo de explorar a representação de função a partir de uma expressão analítica, bem como a metarregra enunciada por Kjeldsen e Petersen (2014) como “princípio da generalidade da variável”.

No segundo roteiro, trazemos um resumo das discussões sobre o estudo das cordas vibrantes por D’Alembert e Euler, sobre continuidade das funções na perspectiva de Euler e a segunda definição apresentada por Euler em 1755. As atividades foram elaboradas com o objetivo de explorar funções definidas por mais de uma sentença. Neste roteiro, a noção de continuidade de Euler foi comparada com a atual. Para isso, vários gráficos de funções foram explorados.

No terceiro roteiro, o momento histórico trouxe as contribuições de Fourier (1822) com o estudo da propagação do calor e com a sua proposta de representar qualquer função por uma série trigonométrica em um determinado intervalo. As contribuições de Dirichlet (1829), questionando as definições anteriores, que ainda eram centradas na expressão analítica, também foram exploradas.

Na próxima seção, falaremos um pouco mais sobre o primeiro e o terceiro roteiros a fim de ilustrar como o referencial teórico contribuiu para formular a proposta de ensino aqui apresentada.

O PRIMEIRO ROTEIRO, ASPECTOS METODOLÓGICOS PARA SUA ELABORAÇÃO

O referencial teórico mencionado no capítulo anterior, orientou a escolha dos momentos históricos, bem como a elaboração das atividades dos roteiros aplicados. Os momentos históricos foram eleitos por se tratarem de discursos moldados por metarregras distintas entre si e distintas daquelas que moldam o discurso atual sobre funções no ensino básico.

O primeiro roteiro foi elaborado considerando que Euler se orientava pelo que Kjeldsen e Petersen (2012) denominaram de "o princípio da generalidade da variável" e pela concepção de Euler de função como uma expressão analítica. É importante ressaltar que o termo metarregra não foi mencionado para os participantes nos encontros, foi utilizado como um conceito de pesquisa.

Para explorar as definições históricas de função, foi necessário trazer um pouco do contexto histórico em que as definições foram apresentadas. Foi uma oportunidade de falar de alguns matemáticos que contribuíram para o discurso da análise do século XVIII.

Também foi necessário trazer um pouco do contexto matemático da época. A ideia de representar funções por séries infinitas foi apenas mencionada no resumo histórico do roteiro, mas foi apresentada aos estudantes por meio de exemplos, trabalhados com o *Geogebra*. Discutimos o papel das séries infinitas em aproximar uma função na vizinhança de um ponto e o que isso significa. Discutimos ainda que uma série também é uma função de x.

Além de alguns antecedentes da noção de função e da primeira definição de função apresentada por Euler em 1748, a descrição de Euler para uma quantidade variável também foi apresentada. Após o resumo histórico, algumas atividades foram propostas. O Quadro 1 abaixo mostra algumas das atividades propostas no primeiro roteiro.

Na questão 1, esperávamos que os participantes percebessem a concepção de função de Euler como uma (única) expressão analítica. A metarregra enunciada por Kjeldsen e Petersen (2015) como o "princípio da generalidade da variável" foi explicitamente explorada nas questões 3 e 4. Já a questão 5 convida o estudante a comparar a definição atual de função, conforme apresentada em Dante (2013), com a de Euler.

Quadro 1 – Atividades do primeiro roteiro.

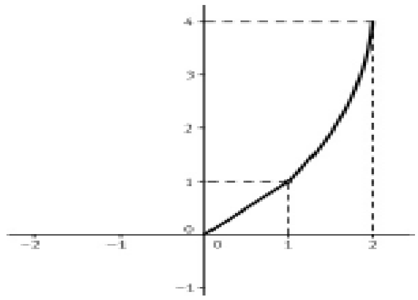
Questão 1 Qual a principal ideia na qual a definição de função de Euler se baseia?

Questão 2 Verifique quais dos itens abaixo são funções de acordo com a definição de Euler:

a) $\boldsymbol{f(x) = sen\, x + cos\, x}$

b) $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots..;$

c) $h(x) = \begin{cases} x, \ se \ 0 \leq x \leq 1 \\ x^2, \ se \ 1 < x < 2 \end{cases}$ ➡



Questão 3 Explique que princípio esta por trás da definição de <u>variável</u> de Euler.

Questão 4 O princípio acima (Questão 3) é aceito nos dias de hoje?

Questão 5 Abaixo está a definição de função que você aprendeu. Compare essa definição de função com a definição de Euler. Cite pelo menos uma semelhança. Cite pelo menos uma diferença.
"Dados dois conjuntos não vazios, A e B, uma função de A em B é uma regra que indica como associar cada elemento x ϵ A a um único elemento y ϵ B." (Dante, 2013. p. 46)

O TERCEIRO ROTEIRO, ASPECTOS METODOLÓGICOS PARA SUA ELABORAÇÃO

Este roteiro foi elaborado visando explorar a metarregra enunciada por Güçler (2015), a qual confere um status de arbitrariedade ao conceito de função. Tal metarregra levou Dirichlet a interpretar uma função como uma correspondência entre variáveis, independente de possuir uma representação algébrica: "é irrelevante em que forma essa correspondência é estabelecida" (Kleiner, 1989, p. 291). A proposta de explorar funções sem que se saiba a sua representação algébrica é interessante porque oferece um contraponto à abordagem de funções no ensino médio, bastante centrada nessa representação.

O resumo do momento histórico explorado começa por abordar as contribuições de Fourier em 1822 com o estudo da propagação do calor e a sua proposta de representar qualquer função por uma série trigonométrica, em um determinado intervalo:

> O problema da propagação do calor foi estudado por Fourier, um matemático e físico, nascido em 1768 na França, que em seu estudo sobre propagação de calor, dizia que quando o calor é desigualmente distribuído em diferentes pontos da massa sólida, ele tende a se colocar em equilíbrio e passa lentamente das partes mais quentes às menos quentes, como se estivesse em um tubo que atravessa perpendicularmente as curvas de mesma temperatura sobre a superfície sólida.
> Esse trabalho sobre a propagação de calor revolucionou o conceito de função, dando início à redefinição do conceito de função, sendo que em 1822 ele teve o seu principal resultado, que foi um teorema que dizia que qualquer função f(x) definida sobre (-l, l) é representável sobre este intervalo por uma série de senos e cosenos:
> $$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right).$$
> (Benedito, 2017, p. 103).

Em seguida, a definição que Fourier elaborou para função é apresentada no roteiro. Dois pontos fortes dessa definição, que foram discutidas com os participantes, foram: i) para cada x existe um único y - "Eles se sucedem de qualquer maneira, e cada um deles é dado como se fosse uma única quantidade" (Roque, 2012, p. 395); ii) se toda função possui uma série de Fourier em um determinado intervalo, então há mais de uma representação analítica. Logo, a função é algo mais do que uma expressão analítica.

Após apresentar as ideias de Fourier, o resumo histórico do roteiro passa a abordar as contribuições de Dirichlet ao continuar o trabalho de Fourier:

> Mas para isso era necessário rever a noção de função, pois uma das propriedades gerais era que a função tinha que ser dada através de uma ou várias expressões analíticas. Dirichlet passou então a formular exemplos de funções que desafiavam as concepções de até então sobre este conceito. O exemplo abaixo foi apresentado em um artigo publicado em 1829 sobre a série de Fourier
> $$\varphi(x) = \begin{cases} c \ \mathit{for}\ x \in Q \\ d \ \mathit{for}\ x \notin Q \end{cases}$$
> De acordo com Dirichlet, a função acima não podia ser escrita como uma ou mais expressões analíticas, não podia ser representada por uma série de Fourier e era descontínua em todos os pontos.
> (Benedito, 2017, p. 104).

O exemplo apresentado por Dirichlet possibilitou problematizar a necessidade de rever a definição de função. Em seguida, a definição de Dirichlet é apresentada no roteiro.

Ela possibilitou discutir a necessidade de restringir as variáveis independentes e assim contribuiu para problematizar a noção de domínio.

O contexto histórico acima resumido trouxe mais um exemplo da física como uma força que impulsionou o desenvolvimento do conceito de função. Após o resumo histórico, algumas atividades são propostas. O Quadro 2 abaixo mostra as quatro primeiras atividades.

Quadro 2 – Atividades do terceiro roteiro.

ATIVIDADES DO 3º ENCONTRO
Questão 1 Analise a definição de função de Dirichlet e diga se este matemático baseiou-se no Princípio da generalidade da variável, assim como Euler.
Questão 2 Analise a definição de função de Dirichlet e discuta se este matemático identifica a noção de função à ideia de expressão analítica.
Questão 3 Compare a definição de Dirichlet com as definições de Euler. Cite pelo menos três diferenças.
Questão 4 Compare a definição de função de Dirichlet com a definição que você aprendeu e está no seu material didático. Cite pelo menos uma semelhança e uma diferença.

As três primeiras atividades convidam a comparar a definição de Dirichlet com as definições de Euler – de 1748 e de 1755 – com o objetivo de que os participantes percebessem as diferenças entre elas. A Questão 4 convida a comparar a definição de Dirichlet com a que foi apresentada aos participantes (Dante, 2013). Esperávamos que, a partir das diferenças entre as definições, os participantes refletissem sobre os elementos que aparecem na definição atual de função (por exemplo, os conjuntos domínio, contradomínio e imagem).

REFLEXÕES SOBRE O MATERIAL ELABORADO A PARTIR DE UM EXPERIMENTO COM ESTUDANTES DA EDUCAÇÃO BÁSICA

Os roteiros foram aplicados em um estudo de campo, como parte da pesquisa relatada em Benedito (2017), realizado com quinze participantes, alunos de uma escola particular na região metropolitana do estado do Rio de Janeiro. Os participantes foram voluntários e, à época do estudo, cursavam o terceiro ano do ensino médio. O estudo de campo foi organizado em cinco encontros, conduzidos pelo primeiro autor deste artigo. A escolha da escola foi feita por ela ser também um centro universitário, que incentiva a realização de trabalhos de pesquisas.

No estudo foram gerados dados a partir das respostas a dois questionários (um inicial e outro final) e das respostas às atividades propostas nos roteiros. Os participantes foram divididos em grupos para discutir as atividades. Os áudios dessas discussões foram gravados. Nesta seção, relataremos como os roteiros 1 e 3 foram trabalhados, discutindo algumas das respostas dos participantes às atividades desses roteiros, a fim de ilustrar a receptividade deles ao material. Não é nosso objetivo apresentar uma análise rigorosa dos dados, traremos algumas respostas dos estudantes para ilustrar nossas interpretações.

No primeiro encontro, apresentamos a proposta do trabalho que seria realizado. Também aplicamos um questionário diagnóstico, com objetivo de acessar o que os participantes entendiam por função, por domínio, por imagem, dentre outros conceitos relacionados ao tópico função. Os dados gerados a partir desse questionário nos levaram a confirmar alguns dos problemas levantados por Palis (2013) sobre o ensino de funções.

A segunda questão desse questionário diagnóstico pedia aos participantes para fornecer três exemplos de função. A maioria dos exemplos apresentados nas respostas foram baseados na expressão analítica da função, ou seja, na sua representação algébrica. Esse tipo de ocorrência é relatada por Palis (2013), de que muitos alunos acreditam que todas as funções podem ser definidas por uma fórmula algébrica. Houve participantes que apresentaram equações dentre seus exemplos, o que também é apontado por Palis (2013) como um dos problemas no ensino de funções (confusão entre função e equação).

A imagem de uma função como uma fórmula é tão forte que, ao se deparar com um exemplo de função que não possui uma representação algébrica, alguns estudantes usam esse critério para concluir que não se trata de uma função. A quarta questão do questionário inicial convidava os estudantes a decidirem se algumas relações apresentadas eram funções. A relação "f associa a cada número natural n o n-ésimo número primo [ex: $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 5$ e assim por diante]" não foi identificada como uma função por nenhum dos participantes.

No segundo encontro, os participantes trabalharam em grupos com o primeiro roteiro, o qual explora a primeira definição de Euler (1748) para o conceito de função. Cada encontro, a partir do segundo, foi organizado em duas partes: o primeiro momento contava com uma apresentação da parte histórica, com dados biográficos dos matemáticos envolvidos, com o contexto matemático no qual o conceito de função foi se modificando.

Para isso, o pesquisador que conduziu os encontros lançou mão de apresentações com Power Point e gráficos no Geogebra. O segundo momento contava com a realização das atividades, nesse momento os participantes eram divididos em grupos para discutir as atividades. Inicialmente, os participantes faziam as atividades sem a interferência do pesquisador.

De um modo geral, os participantes se saíram bem nas questões 1, 2 e 3 (veja o Quadro 1), ou seja, eles perceberam que, para Euler, uma função era uma expressão analítica (Questão 1). Por exemplo, no item c) da Questão 2, todos os participantes reconheceram que a relação dada não seria considerada uma função para Euler, uma vez que era definida por duas expressões analíticas. Além disso, eles entenderam que a variável para Euler poderia assumir qualquer tipo de número, como ilustra a resposta abaixo:

- “Pode ser qualquer número real ou até mesmo imaginário”. (Aluno B)

Já nas questões 4 e 5 (conforme Quadro 1), algumas respostas chamaram nossa atenção. Ao serem questionados sobre se o “princípio da generalidade da variável” seria aceito nos dias de hoje, todos os participantes disseram que sim, como ilustram as respostas abaixo:

- “Sim. Porque pode ser atribuído qualquer valor a x e y”. (Aluno A)
- “Sim, porque x e y pode ser qualquer número real”. (Aluno F)

Na questão 5 (veja Quadro 1), foi solicitado aos participantes que comparassem a definição de Euler de 1748 com a definição que foi apresentada a eles (Dante, 2013), apresentando pelo menos uma semelhança e uma diferença. Para nossa surpresa, ao contrário do que esperávamos, os participantes apontaram a ideia de função como uma (única) expressão analítica, como a diferença entre as duas definições, talvez pelo fato de a definição apresentada a eles não destacar a representação algébrica $y=f(x)$. Já a semelhança apontada nas respostas de todos os participantes foi a presença de duas variáveis, o que também foi uma surpresa, pois Euler não faz referência explícita a duas variáveis em sua definição. A resposta abaixo ilustra nossa interpretação.

- “A relação entre duas variáveis é a semelhança e a diferença é que na definição atual não tem nada falando ter uma expressão”. (Aluno G)

No quarto encontro, o terceiro roteiro foi aplicado. Esse roteiro tem como momento histórico as contribuições de Fourier e as contribuições de Dirichlet para o desenvolvimento do conceito de função. Durante o encontro, a definição de Dirichlet de

1829 gerou questionamento sobre a representação de uma função, os participantes não entendiam que uma função poderia ser representada sem uma expressão algébrica.

A primeira questão (veja Quadro 2) convidava os participantes a refletir se Dirichlet também era guiado pelo "princípio da generalidade da variável". Queríamos chamar a atenção para as mudanças nas metarregras de Euler e de Dirichlet. Os participantes não perceberam a presença do intervalo na definição de Dirichlet, restringindo os valores que a variável independente x poderia assumir, a números reais, por exemplo:

- "Sim, pois ele diz que pode ser qualquer número". (Aluno A).

Somente um participante citou a existência de um intervalo, o que indicaria de alguma forma uma restrição da variável x, dando a entender que Dirichlet não considerava o "princípio da generalidade da variável":

- "Não, porque os valores de x e y, não respeitam uma só lei em todo o intervalo e fala sobre valores dentro de um intervalo a, b." (Aluno G).

A segunda questão (Quadro 2) convidava os participantes a analisarem se Dirichlet também identifica o conceito de função com a uma expressão analítica. De acordo com as respostas que eles apresentaram, eles entenderam a ideia central da definição de Dirichlet, que consistia em uma correspondência arbitrária, sem a necessidade de uma expressão analítica.

A terceira questão (Quadro 2) pedia aos participantes para comparar a definição de função de Dirichlet com as definições de Euler. Queríamos que os participantes percebessem que além de explicitar uma condição para que a relação entre x e y seja uma função (que a cada x deve corresponder um único y), a definição de Dirichlet explicita a restrição da variação de x a um intervalo. Assim, esperávamos que os participantes refletissem sobre a noção de domínio. De um modo geral, todos os participantes perceberam que Dirichlet não utilizava as ideias de Euler:

- "Euler definiu a função a partir de uma ou mais expressões e Dirichlet definiu a função como uma relação qualquer, sem precisar de uma expressão e ainda fala sobre intervalos". (Aluno G).

Na quarta questão, os participantes foram solicitados a comparar a definição de Dirichlet com a definição atual, conforme Dante (2013). A maioria percebeu a ausência dos conjuntos na definição de Dirichlet:

- "As duas são bem parecidas, mas a de Dirichlet não fala que x e y pertencem a algum conjunto". (Aluno A).

E no quinto e último encontro foi aplicado um questionário, com o objetivo de investigar o que o trabalho agregou para os participantes em relação ao conteúdo (o questionário pode ser visto em (Benedito, 2017, p. 111)). Fizemos então uma recapitulação das definições de função apresentadas durantes os encontros e trouxemos também a definição atual que eles aprenderam no primeiro ano do ensino médio. Uma parte do questionário é comum ao que foi aplicado no início do estudo.

Dentre as principais mudanças que observamos, temos: os participantes apresentaram respostas corretas a várias questões que eles haviam errado no questionário diagnóstico. Alguns participantes passaram a justificar mais as suas respostas. Outro ponto que chamou nossa atenção foi a variação das representações de função. Enquanto que, no questionário diagnóstico, a maioria dos participantes apresentou exemplos de funções por meio da representação algébrica, no questionário final, mais gráficos e diagramas de Venn apareceram entre os exemplos. Além disso, alguns participantes reconheceram como função a relação "f associa a cada número natural o n-ésimo número primo (ex: f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 5 e assim por diante.", que muitos erraram no questionário diagnóstico. Acreditamos que refletir sobre a definição de função de Dirichlet, que prescindia da expressão analítica, tenha contribuído para desfazer a ênfase na representação algébrica da função.

Outra mudança importante foi na visão da matemática como ciência e de como ela se desenvolve. Ao dar seu feedback sobre a participação no estudo, dois participantes apontaram que o conceito de função sofreu mudanças ao longo do tempo e que nem sempre foi do modo como eles aprenderam:

- "Adorei saber que a matemática que hoje aprendemos nem sempre foi assim" (Aluno F, Questionário final).

- "Aprender acerca da história da função, somou positivamente em diversos aspectos, dentre estes pode se destacar principalmente: as curiosidades aprendidas, como sobre as mudanças nas definições de funções e como várias coisas interferiram nestas mudanças, ao decorrer do projeto nada me desagradou". (Aluno B, Questionário final)

Esses participantes perceberam, por meio do caso particular das funções, que a matemática não é uma ciência pronta e acabada. Respostas como as acima foram para nós um indício de que a proposta também serviu para desenvolver um senso de historicidade em alguns participantes.

Aproveitamos também para saber se os participantes perceberam o papel das definições na matemática. Concluímos que o grupo não tinha maturidade para esse tipo de reflexão. As respostas apresentadas por eles quando perguntados isso foram um tanto evasivas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresentamos uma proposta para o ensino de funções, baseada em alguns momentos do desenvolvimento histórico do conceito de função. A articulação entre a história e o ensino foi fundamentada no argumento teórico de Kjeldsen (2011), o qual baseia-se na teoria da matemática como um discurso de Sfard (2008). O referencial teórico orientou a escolha dos momentos históricos e a elaboração de atividades em três roteiros de ensino, com os seguintes objetivos de aprendizagem: i) levar os estudantes a refletirem sobre a definição atual de função, ii) sobre o significado do domínio de uma função e iii) desconstruir a identificação que os estudantes fazem entre o conceito de função e a sua representação algébrica, conforme apontado por Palis (2013).

Descrevemos com mais detalhes dois roteiros: o primeiro, traz a definição de função apresentada por Euler em 1748 e um recorte do contexto histórico e matemático; o segundo, traz as definições de função apresentadas por Fourier em 1822 e por Dirichlet em 1837, bem como um recorte do contexto histórico e matemático em que essas definições foram formuladas.

O material elaborado foi aplicado com um grupo de quinze estudantes do Ensino Médio de uma escola particular. Durante os encontros, os participantes compararam as definições de função de Euler e de Dirichlet entre si e com a definição atual – conforme Dante (2013); discutiram sobre as diferenças; aplicaram as definições para decidir se um conjunto de relações entre variáveis era função de acordo com cada uma das definições apresentadas no material (veja, por exemplo, Questão 2, Quadro 1), descobriram que há funções que não possuem uma representação algébrica e perceberam que os objetos matemáticos podem mudar ao longo do tempo.

Em relação aos objetivos de aprendizagem, destacamos que os estudantes apresentaram uma variação maior de representações de uma função no questionário final. Percebemos também que a definição de função de Dirichlet gerou bastante discussão sobre a representação de uma função, pois essa definição apresentava uma ideia diferente da que os participantes acreditavam ser correta, qual seja: a ideia de que a função pode prescindir da representação algébrica. Esse tipo de situação é o que Sfard (2008) denomina como conflito comognitivo, que ocorre quando os aprendizes entram em contato com um discurso moldado por metarregras distintas das suas.

Concluímos que a história contribuiu para problematizar o estudo de funções, levando os participantes a reverem e (em alguns casos) alterarem suas concepções prévias sobre as funções. Além disso, proposta de ensino suscitou um senso de historicidade nos participantes, mostrando que os conceitos matemáticos podem sofrer mudanças, ajudando a desconstruir a imagem da matemática como uma ciência estática, pronta e acabada.

Nossa proposta não foi pensada para introduzir o conceito de função. O estudo possibilitou-nos, enquanto pesquisadores, experimentar o potencial do uso da história para promover reflexões sobre metarregras (Kjeldsen & Petersen, 2014), embora não tenha sido nosso objetivo analisar tais reflexões. Um ponto de dificuldade nessa proposta de articulação entre a história e o ensino, fundamentada pela teoria de Sfard (2008), está na identificação de metarregras nas fontes históricas, o que requer um estudo cuidadoso de fontes primárias e secundárias. Concluímos, indicando que mais experimentos precisam ser realizados para refletirmos mais sobre essa forma de articular a história e o ensino, bem como sobre as potencialidades e limitações dessa articulação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Benedito, L. A. B. (2017). *Uma proposta para o ensino de funções com base em algumas definições históricas.* 2017.112f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil.

Bernardes, A. (2016). *História e Ensino de Matrizes: Promovendo Reflexões Sobre o Discurso Matemático.* (Tese doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, Brasil.

Brasil. (2017). *Base Nacional Comum Curricular*. 3ª versão. Brasília: Ministério da Educação. Disponível em:

http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_20dez_site.pdf. Acesso em: 21 de março de 2018.

Brasil. (2017). Ministério da Educação. *PNLD 2018: matemática – guia de livros didáticos – Ensino Médio*/ Ministério da Educação – Secretária de Educação Básica – SEB – Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica,122 p.

Dante, L. R. (2013). *Matemática: Contexto e Aplicações*. Ensino Médio. v.3.- 2.ed.- São Paulo: Ática.

Gücler, B. (2015). *Making Implicit Metalevel Rules of the Discourse on Function Explicit Topics of Reflection in the Classroom to Foster Student Learning.* Educational Studies in Mathematics, v.91, n.3 p375-393.

Kjeldsen, T. H. (2011). Does history have a significant role to play for the learning of mathematics?: Multiple perspective approach to history, and the learning of meta level rules of mathematical discourse. In: Barbin, E.; Kronfellner, M.; Tzanakis, C. (Ed.). *History and Epistemology in Mathematics Education*. Proceedings of the 6th European Summer University. Viena: Verlag Holzhausen GmbH, p. 51–61.

Kjeldsen, T. H. Pertersen, P. H. (2012). *History and the Learning of Mathematics: Detecting Students Meta-discurve* Rules. IMFUFA, Dept. of Science, Systems, and Models, Roskilde University. 12th International Congress on Mathematical Education.

Kleiner, I. (1989). *Evolution of the Function Concept: A Brief Survey*. The College Mathematics Journal, Volume 20, Number 4, p. 282–300, September.

Lutzen, J. (2008). *Between Rigor and Applications Developments in the Concept of Function in Mathematical Analysis*, The Cambridge History of Science, The Modern Physical and Mathematical Science, volume 5, p. 468-488.

Palis, G. L. R. (2013). Atividades que podem propiciar o desenvolvimento do raciocínio funcional no alunado do ensino médio e universitário inicial. *Revista eletrônica da SBM*. nº 1, v.1.

Roque, T. (2012). *História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar.

Roque, T. Giraldo, V. (2014). *O Saber do Professor de Matemática: Ultrapassando a Dicotomia entre Didática e Conteúdo.* Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna. cap. 1, p. 19–22.

Roque, T. (2014). *Desmascarando a equação: a história no ensino de que matemática? Revista Brasileira de História da Ciência*, v. 7 (2), p. 167–185.

Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *The Journal of the Learning Sciences*, v. 16(4), p. 567–615.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. New York: Cambridge University Press.