Revista de História da Educação Matemática
HISTEMAT

ISSN: 2447-6447
Submetido: 15/07/2020
Aprovado: 11/08/2020

CONSTRUINDO O CONHECIMENTO PEDAGÓGICO DO CONTEÚDO EM TEMPOS DA MATEMÁTICA MODERNA: as múltiplas facetas da lógica[1]

BUILDING PEDAGOGICAL KNOWLEDGE OF CONTENT IN TIMES OF MODERN MATHEMATICS: the multiple facets of logic

José Manuel Matos[2]
ORCID iD: http://orcid.org/0000-0003-2809-6561

Teresa Maria Monteiro[3]
ORCID iD: http://orcid.org/0000-0003-2745-9631

RESUMO

O objetivo deste trabalho é caraterizar os significados atribuídos ao termo "lógica" em tempos da reforma da Matemática Moderna. Metodologicamente a pesquisa filia-se numa história cultural de feição antropológica. Foi conduzida uma análise de conteúdo qualitativa centrada nas referências à lógica, à lógica simbólica, a sistemas axiomáticos e temas similares incidindo sobre o corpus de 26 trabalhos produzidos pelos estagiários do Liceu Pedro Nunes em Lisboa entre 1956 e 1968. Esta análise permitiu destacar quatro categorias que caracterizam os modos como a lógica é abordada nos trabalhos dos estagiários: 1) a polémica referente à "crise dos fundamentos"; 2) a busca de um equilíbrio entre abordagens didáticas intuitivas e formais; 3) as caraterísticas de sistemas axiomáticos didaticamente adequados ao ensino secundário; 4) o desenvolvimento da nova linguagem da álgebra das proposições. No final identificámos cinco significados utilizados na matemática escolar que ocorrem no corpus examinado: 1. Lógica-organização, 2. Lógica-normativa, 3. Lógica-linguagem, 4. Lógica-raciocínio e 5. Lógica-conteúdo.
Palavras-chave: História da Educação Matemática. Formação de professores. Conhecimento Pedagógico do Conteúdo. História Cultural.

ABSTRACT

The objective of this work is to characterize the meanings attributed to the term "logic" in the times of the reform of Modern Mathematics. Methodologically, research is based on a cultural history of an anthropological nature. A qualitative content analysis was conducted, centered on references to logic, symbolic logic, axiomatic systems and similar themes, focusing on the corpus of 26 works produced by Liceu Pedro Nunes interns in Lisbon between 1956 and 1968. This analysis allowed to highlight four categories that characterize the ways in which logic is approached in the work of interns: 1) the controversy related to the "fundamentals crisis"; 2) the search for a balance between intuitive and formal teaching approaches; 3) the characteristics of axiomatic systems didactically suitable for secondary education; 4) the development of the new language of proposition algebra. At the end we identified five meanings used in school mathematics that occur in the examined corpus: 1. Logic-organization, 2. Logic-normative, 3. Logic-language, 4. Logic-reasoning and 5. Logic-content.
Keywords: History of Mathematics Education. Teacher training. Pedagogical Knowledge of the Content. Cultural History.

[1] Este trabalho foi parcialmente financiado por fundos portugueses através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I. P., no contexto dos projetos PTDC/CED-EDG/32422/2017 e UID/CED/02861/2019.
[2] Professor visitante na Universidade Federal de Juiz de Fora. Professor na Universidade Nova de Lisboa, jmm@fct.unl.pt.
[3] Professora no Instituto Politécnico de Beja, tm.monteiro@campus.fct.unl.pt.

INTRODUÇÃO

As referências à lógica como um dos eixos de construção do currículo da disciplina de Matemática começam a assumir um papel crescente em Portugal a partir da reforma da Matemática Moderna (MM). O nosso contacto com o tema evidenciou que a lógica não é um tema curricular "normal" como aritmética, trigonometria, etc., tratando-se antes de um termo polissémico em que as suas diferentes acepções, embora distinguíveis, são por vezes inseparáveis. O objetivo deste artigo é mapear o modo como o tema foi sendo incorporado na matemática escolar no período de implantação da MM, mais especificamente entre 1956 e 1968. Seguindo a terminologia proposta por Matos (2020), procuramos uma *genealogia* do uso da lógica no tempo da MM.

Em trabalhos anteriores analisámos os modos como o conhecimento pedagógico do conteúdo necessário para ensinar a nova matemática foi sendo constituído ao longo de dez anos pelo grupo constituído pelos estagiários, futuros professores de Matemática do ensino liceal[4], em formação no Liceu Pedro Nunes em Lisboa e pelo seu professor metodólogo, isto é, os professores responsáveis pela formação de novos docentes (Matos e Monteiro, 2018; Monteiro, 2018). Este tipo de conhecimento foi proposto por Lee Shulman (1986) procurando caracterizar a especificidade do saber profissional dos professores, distinguindo-o do conhecimento do conteúdo e o do conhecimento pedagógico geral.

Durante o período em estudo (1956-1968), a formação de professores liceais era levada a cabo em três liceus "normais": o de Lisboa, o de Coimbra e o do Porto. Até 1968, o estágio pedagógico tinha a duração de dois anos e incluía prática docente. No caso do Liceu Pedro Nunes, o grupo composto pelos estagiários e pelo metodólogo mantinha reuniões semanais nas quais por vezes participavam outros professores de Matemática do Liceu, em geral bem conhecidos quer pelos livros de que eram autores, quer pela sua intervenção nos problemas da educação, e também professores do ensino universitário. Todos os anos o metodólogo escolhia um tema sobre o qual os estagiários deveriam elaborar um trabalho escrito e que alguns deles deveriam apresentar em "conferências" muitas vezes publicitadas nos jornais diários, nas quais participavam todos os professores do Liceu, incluindo portanto estagiários de outras disciplinas, docentes de outras escolas e por vezes mesmo personalidades importantes da vida académica,

[4] Após quatro anos do ensino primário obrigatório, onde os alunos ingressavam com seis, eventualmente sete anos de idade, o curso dos liceus compreendia o 1.º ciclo com dois anos, o 2.º com três e o 3.º com dois, num total de sete anos, após o que o aluno poderia ingressar na universidade. Neste artigo usaremos também o termo "ensino secundário" para referir o curso liceal.

política e social. As produções destes estagiários foram sistematicamente estudadas por um dos presentes autores (Monteiro, 2018).

Os programas do ensino secundário anteriores à MM valorizavam em maior ou menor grau o ensino da estrutura lógico-dedutiva da matemática. O programa de 1954, que estava em vigor quando se iniciou a experiência de introdução da MM no ensino liceal em 1963, destacava esta estrutura em dois momentos. Primeiramente nas "Observações" referentes ao 1.º, 2.º e 3.º anos do curso liceal (atuais 7.º, 8.º e 9.º anos de escolaridade):

> Na organização deste programa teve-se em vista que o papel formativo da geometria supera, e muito, o da álgebra.
> O rigor e o sentido lógico das demonstrações de geometria elementar dão aos alunos hábitos de precisão de ideias e de linguagem, e permitem-lhes aplicar com êxito o raciocínio lógico-dedutivo não só a outras ciências como a questões da vida real (Decreto n.º 39 807, 1954, p. 1060).

Estas observações referem-se aos conteúdos de geometria plana que, especialmente a partir do 2.º ano liceal, incluem a demonstração de algumas propriedades.

A estrutura lógico-dedutiva era também valorizada no 7.º ano liceal (atual 11.º ano) através da "Aritmética Racional" que abordava os números naturais de uma forma axiomática. Ela era incluída "porque os seus métodos de estudo são os que mais se prestam a criar no aluno hábitos de rigor científico" (Decreto n.º 39 807, 1954, p. 1060). A geometria e a aritmética racional figuravam nos programas essencialmente com um propósito formativo: dotar os alunos de métodos de raciocínio e hábitos de rigor.

No texto que referimos (Matos e Monteiro, 2018) propusemos uma periodização para a construção do conhecimento pedagógico do conteúdo pelos estagiários do Liceu Pedro Nunes. Um primeiro período que se inicia em 1956 e se estende até 1962 em que os estagiários vão reelaborar o conhecimento do conteúdo matemático pois a reforma da MM apresentava-se como partindo de uma matemática diferente, recorrendo a novos conceitos, estruturas e consequentemente uma nova linguagem que obrigava a uma recomposição concetual.

Um segundo período decorre de 1962 até 1965 e nele se assiste a um desenvolvimento inicial do conhecimento pedagógico do conteúdo. Agora os trabalhos já apresentam propostas pedagógicas concretas, embora não se encontrem indicações de concretizações em aula. São pois desenvolvidas hipóteses de representações, sequências, exemplos, etc., características do saber profissional próprio do professor de Matemática.

Finalmente, num terceiro período, com efeitos a partir de 1965, as conferências já refletem sobre a experiência pedagógica de introdução da MM no 3.º ciclo liceal iniciada em 1963 e também sobre alterações no 2.º ciclo. Encontramos agora o confronto com a prática testando a formulação de conceitos, de técnicas pedagógicas, a revelação dos conceitos difíceis ou fáceis de aprender, bem como o desenvolvimento de estratégias de ensino associadas a representações conceptuais apropriadas.

O propósito deste trabalho é caraterizar os significados atribuídos ao termo "lógica" em tempos da reforma da MM. Dada a sua polissemia, usamos aqui o termo de um modo abrangente, incorporando, não só quando se refere ao ensino recorrendo a axiomas, teoremas, demonstrações, como figurava nos programas anteriores à MM, mas também a "álgebra das proposições" associada ao estudo das operações com conjuntos e que terminava com o estudo do uso de quantificadores. Estes diversos significados integraram o saber profissional docente e, nesse sentido, poderíamos também afirmar que o nosso trabalho procura conhecer de que modos a "lógica" se incorporou no conhecimento pedagógico do conteúdo desenvolvido durante a MM.

Metodologicamente, e uma vez que procuramos significados, a nossa pesquisa filia-se numa história cultural de feição antropológica (Burke, 2005). Por isso levaremos a cabo uma análise de conteúdo qualitativa (Schreier, 2013) centrada nas referências à lógica, à lógica simbólica, a sistemas axiomáticos e temas similares incidindo sobre o *corpus* de 26 trabalhos produzidos pelos estagiários do Liceu Pedro Nunes entre 1956 e 1968. Esta análise permitiu destacar quatro categorias que caracterizam os modos como a lógica é abordada nos trabalhos dos estagiários:

1) a polémica referente à "crise dos fundamentos";
2) a busca de um equilíbrio entre abordagens didáticas intuitivas e formais;
3) as caraterísticas de sistemas axiomáticos didaticamente adequados ao ensino secundário;
4) o desenvolvimento da nova linguagem da álgebra das proposições.

A discussão de cada uma destas categorias será conduzida acompanhando a periodização estabelecida no nosso trabalho anterior (Matos e Monteiro, 2018).

A "CRISE DOS FUNDAMENTOS"

Durante o período 1956-1962, as ideias da MM começaram a fazer o seu caminho na comunidade de educadores portugueses embora não assumindo ainda a importância que terão mais tarde. Os temas dos trabalhos escolhidos pelo metodólogo e a desenvolver pelos estagiários[5] refletiam no início do período temáticas gerais preocupadas com os fundamentos e apenas no final do período se voltaram para aspetos mais concretos como sejam a lógica e a "álgebra dos conjuntos".

A polémica sobre "a crise dos fundamentos" da matemática foi abordada pela primeira vez no ano de 1960 quando duas estagiárias recapitularam as posições de Frege, Russell, Peano, Brouwer, Hilbert e Gödel sobre o tema (Nogueira, 1961[6]; Viegas, 1960). O tom destes trabalhos é o da urgência em obter uma "solidez para o edifício matemático" (Nogueira, 1961, p. 34). Procurava-se dotar a matemática de "rigor" ressaltando-se a importância da "lógica simbólica" (p. 36). Uma estagiária resumia deste modo a discussão filosófica:

> A matemática liberta-se dos conceitos que lhe deram origem, e passa a preocupar-se, exclusivamente com as leis, com as estruturas. Um sistema matemático é simplesmente um conjunto de proposições, umas que se aceitam como primitivas, os axiomas, e outras que se deduzem logicamente das primeiras, os teoremas. (...) Os teoremas não têm, portanto, uma validade absoluta; são válidos, apenas, relativamente ao conjunto de axiomas do sistema. (Vieira, 1960, p. 7).

Durante anos este tema não voltou a ser discutido, e apenas é retomado, primeiro num texto de Graça Ribeiro "nos últimos cinquenta anos a Matemática evoluiu extraordinariamente, enriquecendo-se com novos conceitos, uma nova linguagem, um novo rigor" (Ribeiro, 1966, p. 2) e depois num outro de Alzira Santos, já perto do fim do período em análise, que considerava a busca de fundamentação para o conhecimento matemático "uma constante preocupação de 'purificar' a matemática dessa base experimental" (M. A. Santos, 1967, p. 9) e continuava sintetizando o debate dos fundamentos de um modo que poderíamos considerar superficial e factualmente incorreto:

> O fim do século passado (...) os matemáticos empenharam-se em estabelecer em bases rigorosamente hipotético-dedutivas as várias teorias.
> Os principais ensaios de "axiomatização" devem-se a Hilbert para a Geometria e a Peano para a Aritmética.
> Mais tarde o grupo Bourbaki fez uma tentativa de maior dimensão: construir toda a matemática sob um ponto de vista puramente axiomático. (M. A. Santos, 1967, p. 10).

Fica a sugestão que a abordagem bourbakista resolveria de vez os problemas da natureza do conhecimento matemático.

Em trabalhos anteriores (Santiago e Matos, 2019), verificámos que a discussão dos "fundamentos da matemática" era um dos temas sistematicamente tratados em trabalhos de estagiários das Escolas Normais Superiores (ENS) que entre 1915 e 1930 foram responsáveis

[5] Uma listagem destes temas pode ser encontrada em Matos e Monteiro (2018).
[6] Utilizaremos a versão do trabalho de Dulce Nogueira publicada em 1961, apesar de ele ter sido terminado em 1960.

pela formação de futuros professores liceais. Encontramos, no entanto, duas diferenças. A primeira é que, enquanto nesse início de século, a discussão era acompanhada por longas considerações sobre filosofia da matemática e a importância da intuição na criação matemática, normalmente citando textos de Poincaré, essa referência está praticamente ausente nestes anos 1960.

Em segundo lugar, naqueles inícios do século 20, a matemática é uma ciência pujante que recorre a diversas metodologias para a sua criação. Os trabalhos dos alunos das ENS incluem revisões extensas sobre os métodos da matemática e a dedução é apenas um deles. O contraste com os anos em análise neste texto é grande. A matemática está em "crise", cercada, ameaçada pela fragilidade dos seus fundamentos e é urgente adotar uma linguagem rigorosa que permita "purificá-la". Ao ler os textos de alguns dos estagiários dos anos 1960 ficamos mesmo com a sensação de ter sido adotada tacitamente uma perspetiva que poderíamos designar de logicista ou hilbertiana (veja-se, entre outros exemplos, Martins, 1962, p. 53) confiando em que a resolução dos problemas referentes à natureza do pensamento matemático se consegue através da utilização de uma linguagem simbólica rigorosa.

EQUILIBRANDO ABORDAGENS DIDÁTICAS INTUITIVAS E FORMAIS

A procura de um ponto de equilíbrio entre as abordagens didáticas intuitivas e as formais constitui uma segunda categoria. Logo no período inicial, entre 1956 e 1962, o texto de Iolanda Lima explicitava o dilema e optava por uma defesa da intuição: "não é a intuição a mais preciosa colaboradora da investigação, vigorosa e fecunda suscitadora de descobertas, de caminhos novos, de hipóteses? Com efeito, na Matemática, não há só raciocínio lógico" (Lima, 1958, p. 59) e um pouco à frente avançava o que deveriam ser orientações para o 3.º ciclo liceal:

> [No 3.º ciclo,] a intuição intelectual terá um papel de relevo evitando que o ensino tome um aspecto demasiado formal. É possível que o aluno tenha de conhecer teoremas dos quais não aprende a demonstração, mas sim o espírito, o alcance ou as aplicações. Poderá então fazer-se uma chamada à intuição, ao significado físico, etc., embora frisando que não se está a demonstrar. Será preferível a desenvolver demonstrações, cujo encandeamento lógico supere o nível dos alunos, ou (muito pior) a apresentá-las imperfeitas, "a meias", abafando no jovem o sentido crítico nascente. As demonstrações escolhidas serão feitas com perfeito rigor, lentamente, com a colaboração do aluno, de modo que este possa captar a verdadeira essência do método da Matemática (Lima, 1958, p. 62).

Como um de nós referiu noutro trabalho (Monteiro, 2018), o texto de Iolanda Lima destaca-se pela visão humanista com que aborda os problemas do ensino da matemática e que contrasta com o tom geralmente técnico dos restantes.

A posição ambivalente entre abordagens intuitivas e formais vai ocorrer essencialmente no que se refere à geometria do 2.º ciclo liceal. Assim, contrabalançando a exaltação de uma didática centrada na lógica, algumas estagiárias (Domingues, 1960; Lima, 1958; Nogueira, 1961; Rodrigues, 1961; Vieira, 1960) baseando-se em Choquet, Gattegno, Puig Adam e Piaget, argumentaram sobre os problemas de uma abordagem exclusivamente dedutiva:

> obter tudo por via dedutiva, é um luxo que a Ciência só se permite depois de acumular uma grande quantidade de factos. Deixamos isso para um exame introspectivo tardio na carreira escolar (...) não vemos razões para pedir aos nossos alunos uma forma rígida, antes que o conteúdo seja uma verdadeira tomada de consciência [do] que eles queiram comunicar (Lima, 1958, p. 60).

Em geral, estes trabalhos propunham que o professor não devesse começar por apresentar axiomáticas previamente definidas aos alunos, mas antes despertá-los para a sua necessidade.

Em 1960, duas estagiárias, em particular, recorreram a um texto de Jean Piaget que pretendia conciliar a necessidade de rigor lógico com o seu modelo cognitivo, mostrando que não são termos contraditórios. Antes já Sousa Ventura (1959) tinha exprimido algo semelhante. Incluímos aqui uma citação do texto original de Piaget numa versão composta e corrigida por nós a partir das citações das duas estagiárias. Segundo ele,

> o fim do ensino da matemática é [permanece] sempre o de atingir o rigor lógico assim como a compreensão dum formalismo suficiente, mas só a psicologia está em estado de fornecer aos pedagogos os dados sobre a maneira pela qual este rigor e [este] formalismo serão obtidos mais seguramente.* [Pelo contrário,] Nada prova que, pondo [colocando] o formalismo à partida, o encontremos à chegada sob as suas espécies autênticas, e os estragos de um pseudo-formalismo ou formalismo que fique [permaneça] verbal, porque muito precoce, mostram, pelo contrário, os perigos de um formalismo ["método" no original] que ignore as leis de desenvolvimento mental. **
>
> Na realidade, se o edifício das matemáticas repousa sobre "estruturas" que correspondem [em geral] às estruturas da inteligência, é sobre a organização progressiva destas estruturas operatórias que é preciso fundamentar a didática matemática. (...) É pois infundado imaginar que o recurso inicial às ações compromete o rigor ulterior e favorece o empirismo. Há empirismo quando o educador substitui a demonstração matemática por uma experiência física com a simples leitura dos resultados obtidos. Mas quando a experiência ocasiona ["serve de pretexto para" no original] a coordenação das ações e a abstração assenta sobre estas mesmas ações e não sobre objecto, a experiência prepara o espírito dedutivo em vez de o contrariar. * (Piaget, 1955, pp. 32-33; *traduzido por Nogueira, 1961, pp. 40-41; **traduzido por Vieira, 1960, p. 12; entre parênteses retos estão as nossas correções às traduções).

Este tema apenas volta a ser abordado já perto do final do período que estudamos numa pequena passagem do texto de Plínio Serrote que, em formato de diálogo e recorrendo a Henri

Poincaré, recordava a importância da intuição: "— Dão então razão a Poincaré, não é verdade, ao referir-se à intuição? — Sim, não podemos esquecer que, na investigação matemática, a intuição precede normalmente a lógica" (Serrote, 1966, p. 111).

Em resumo, a procura de um equilíbrio entre intuição e formalismo ocorre essencialmente no início do período estudado, quando ainda não tinham tido lugar os primeiros trabalhos explorando alternativas de ensino de MM. Destacamos duas conclusões: em primeiro lugar, não encontrámos um estagiário que defendesse uma abordagem formal, ou que sequer referisse um autor que a propusesse. Recorrendo a uma metáfora literária, diríamos que os estagiários se debatem com moinhos de vento. Em segundo lugar, nos seus trabalhos dominam as negações, isto é, quando chamados a pronunciar-se sobre a dicotomia intuição/formalismo, encontramos opiniões sobre o que não deve ser feito, mas muito pouco sobre o que efetivamente deve ser realizado. Mesmo quando são apresentadas alternativas, elas são vagas. Aparentemente, embora o desejo de realizar um ensino intuitivo fosse grande, escasseavam as alternativas concretas.

SISTEMAS AXIOMÁTICOS NO ENSINO SECUNDÁRIO

O debate sobre o tema das características de sistemas axiomáticos a utilizar no ensino secundário, que foi estudado em detalhe em Monteiro (2018), atravessa todo o período em análise, sendo difícil discernir grandes variações nas opiniões dos estagiários. O problema é bem colocado por Maria dos Reis Bento:

> Levanta-se agora o problema de saber se aos nossos alunos do liceu (13-16 anos) [2.º e 3.º ciclos] será lícito apresentar uma cadeia lógica que assente num reduzido número de proposições, como seja a de Euclides, a de Hilbert ou, mesmo, a de Puig Adam (Bento, 1964, p. 135).

Cândida Reis optava por sugerir, apoiada em Willy Servais, que em vez de se falar de sistemas axiomáticos, se fale de axiomatização. No entanto, à semelhança do que observámos na secção anterior, embora nenhum dos estagiários advogasse uma abordagem lógica formal, as opções concretas não eram fáceis de formular: "é preferível deixar teoremas por demonstrar, a demonstrá-los mal ou a descer a minúcias lógicas fora do alcance mental dos nossos alunos" (Reis, 1958, p. 128).

Alguns estagiários, no entanto, adiantavam algumas ideias. Cândida Domingues formulou o que poderíamos qualificar de consenso que atravessava todos os trabalhos que se dedicaram a este tema e que também era a posição dos programas oficiais:

> O professor deve portanto, saber dosear o concreto e o abstracto, de acordo com a idade do jovem, até que em pleno terceiro ciclo, o seu raciocínio e a sua reflexão estejam firmemente formados e possa desligar-se do concreto para caminhar mais [para] o abstracto no desenvolvimento lógico da matemática, compreendendo a fecundidade de uma axiomática (Domingues, 1960, p. 16),

Uma segunda ideia atravessava outros trabalhos.

> O que importa é que, dentro da axiomática aceite, e tão simples quanto possível, os alunos sejam atingidos pela própria essência do método axiomático — que dêem pelo encadeado, sintam a necessidade de recorrer aos axiomas (Nogueira, 1961, p. 38).

São considerações que remetem para um desejo intelectual que a autora não explicita como concretizar. Entretanto, permanecia o problema de saber que características deveria ter um sistema axiomático adequado, ou mesmo se se deveria incluir um tal sistema no ensino secundário. Maria Odette Rodrigues (1961) formulou o problema sob a forma de dilema. Segundo ela, não se podia afastar o aluno "da observação do concreto, de sua experiência passada e exigirmos que, a partir de um reduzido número de proposições independentes obtenha todo um conjunto de teoremas e corolários" (p. 9). Embora a geometria euclidiana proporcionasse a construção de uma teoria axiomática acessível a alunos do 2.º ciclo liceal, o seu "rigor lógico" (p. 10) não se compara com o obtido nos trabalhos de Hilbert que, no entanto, envolvem uma "mais acentuada formalização" (p. 11). Debatendo que forma poderia tomar um sistema axiomático didaticamente adequado, afirmava:

> Não hesitaremos em postular uma proposição que poderíamos apresentar como teorema sempre que julgarmos conveniente aproveitar a simplificação que daí resulta. O que se torna necessário é que façamos acompanhar o seu enunciado de considerações intuitivas que o tornem facilmente aceite (Rodrigues, 1961, p. 11).

Tentando traçar um caminho entre o rigor hilbertiano e uma abordagem intuitiva, Odette Rodrigues aceitava prescindir da independência dos axiomas, mantendo embora "o rigor lógico na demonstração e da preocupação de definir com clareza e precisão" (p. 11). Para tal, sugeria o uso de "axiomas de movimento" que identificava com as propostas de Klein e dava também como exemplos as axiomatizações apresentadas por Severi e por Puig Adam e Rey Pastor[7]. Mas, em última análise, segundo ela, o professor desempenhará um papel essencial:

> o problema não é essencialmente um problema de compêndio, mas didático. É um problema para ser vivido por cada professor no âmbito da sua aula, para ser resolvido na presença viva da turma. O penetrar mais ou menos fundo nestes domínios (...) só o professor pode decidir [tendo de ter] bem presente todas as exigências requeridas para a questão ser rigorosamente tratada (Rodrigues, 1961, p. 14).

[7] A estagiária omite o coautor de Puig Adam.

Odette Rodrigues não adiantava qual seria então uma axiomática adaptada ao ensino secundário e o seu trabalho prossegue referindo detalhadamente filmes de Nicolet, que, pelo modo como visualmente mostram a inevitabilidade de algumas propriedades geométricas, antecipavam os debates atuais sobre a redefinição de objectivos para o ensino da matemática motivados pela utilização de alguns recursos tecnológicos.

Dulce Nogueira, inspirada por Choquet, sugeria o desenvolvimento de uma axiomática pelos alunos:

> que resulte da "exploração do plano" com um conjunto de instrumentos, por exemplo, a régua, o compasso e o lápis. Aqui serão eles próprios a eleger certas proposições como básicas e sentirão certamente a necessidade de "pedir" a si próprios e a outros que as aceitem sem justificação, embora presos ao intuitivo (Nogueira, 1961, p. 38, aspas no original).

Na fase intermédia do período em análise, quando começou a ser esboçado o que poderá mais tarde integrar o conhecimento pedagógico do conteúdo, alguns textos dos estagiários tornam-se mais concretos. Por exemplo, Manuela Pais afirmava:

> É preciso muito material intuitivo e experimental antes de chegar à assimilação dos conceitos abstractos sobre os quais assenta todo o edifício lógico do método dedutivo!
> Para a criança não tem qualquer interesse a dedução de uma verdade como consequência lógica de outras, tanto mais que todas as verdades que podem estabelecer-se nesta fase de ensino ou são evidentes ou podem ser verificadas de modo simples, e não é fácil convencê-la da necessidade de certas demonstrações. Basta pensar, por exemplo, no estabelecimento da igualdade de ângulos verticalmente opostos ou no caso de igualdade de triângulos ou na propriedade associativa da adição (Pais, 1963, p. 111).

Uma outra estagiária confessava a sua dificuldade em saber se se deveria ir introduzindo gradualmente elementos de lógica matemática no ensino de geometria à medida que o curso avançasse e se sentisse essa necessidade ou se antes do ensino da geometria se deveria começar por fazer uma introdução

> de noções consideradas básicas como os conceitos de implicação: p => q (se p então q), de equivalência: p <=> q (p se e só se q), a negação, a conjunção, a disjunção e suas propriedades, os valores lógicos das proposições e as tabelas de verdade de cada uma daquelas operações, os princípios da não contradição e do terceiro excluído e a importante distinção entre a designação e o designado (Bento, 1964, p. 138).

O trabalho de Lourdes Ruiz (1964), desenvolvido durante este período intermédio, assume uma importância particular pois é o único que estudou em pormenor a geometria das transformações. A sua abordagem parte dos "axiomas de movimento" mencionados por Odette Rodrigues em 1961 e propunha uma abordagem inovadora para o ensino da geometria que privilegiava as estruturas algébricas. Essa abordagem foi a que passou a figurar nos programas aprovados em 1970.

Já no final do período em análise, quando os trabalhos dos estagiários se concentraram na reflexão sobre o ensino de MM a decorrer em turmas especiais, Alzira Rosa explicou como foi feita uma abordagem experimental numa turma do 3.º ano (atual 7.º ano). Relatando a parte da experiência que incidiu sobre geometria, afirmou:

> Partiu-se de uma axiomática simples e tanto quanto possível intuitiva, procurando-se, no entanto, evitar que o conceito de axioma aparecesse como sinónimo de proposição evidente — ideia perigosa, que pode provocar nos alunos enorme relutância na demonstração de teoremas que lhes pareçam evidentes.
> Os axiomas surgem, pois, como proposições iniciais que devemos fixar, como se fossem *regras de um jogo*. Esta acepção de axiomática vai permitir alargar o conceito de Geometria, preparando para a aceitação de diferentes geometrias (se as regras do jogo mudarem, o jogo resulta diferente, é outro jogo). E uma certa arbitrariedade na escolha dos axiomas pode fazer ainda ressaltar a origem empírica de toda a ciência, não tirando o rigor matemático, pois este diz respeito à maneira como de define ou se demonstra e não àquilo que se demonstra (Rosa, 1968, p. 108, itálico no original).

Alzira Rosa acrescentava ainda uma descrição das aulas iniciais de geometria:

> O primeiro teorema que se demonstrou — "dois ângulos verticais opostos são iguais" — foi "explorado" com todo o cuidado, procurando-se, logo de início, pôr em evidência a implicação "se... então..." que está contida no próprio enunciado.
> Tentou-se que os alunos entendessem que demonstrar um teorema é provar a verdade da implicação H => T, e, ainda, que uma demonstração pode ser orientada de diferentes maneiras, para o que se aproveitaram, devidamente, as sugestões de alguns alunos (Rosa, 1968, p. 109).

Esta experiência, da qual apenas nos ficou o texto de Alzira Rosa, decorreu durante todo o ano letivo e abrangeu todos os conteúdos do programa.

A discussão sobre sistemas axiomáticos vai ficar ultrapassada em 1970 quando foram aprovados os programas de MM para o que seriam os atuais 7.º, 8.º e 9º anos que optaram por uma abordagem à geometria baseada nas transformações geométricas. Quanto à Aritmética Racional, ela vai desaparecer em 1973.

A LINGUAGEM DA "ÁLGEBRA PROPOSICIONAL"

Uma quarta categoria, o desenvolvimento de uma linguagem associando as operações lógicas às operações entre conjuntos — uma "álgebra proposicional" ou "lógica simbólica", como alguns chamaram — é um tópico associado à MM abordado por diversos estagiários.

Antes de entrarmos propriamente no tema, recordemos os aspetos do contexto de introdução da MM no ensino secundário português que relevam para este assunto (Matos e

Almeida, 2018). Na sequência de uma primeira conferência pública sobre MM no Liceu Pedro Nunes efetuada por Jorge Calado, membro da subcomissão portuguesa da Comissão Internacional do Ensino da Matemática em 1957 (Calado, 1958), o matemático José Sebastião e Silva, também membro da dita subcomissão, efetuou no Liceu Pedro Nunes no início de 1959 um curso com 6 sessões destinadas a docentes sobre o tema "Introdução à lógica simbólica e aos fundamentos da matemática" que foram parcialmente publicadas na revista do Liceu (Silva, 1959).

Embora os dois professores pretendessem divulgar as ideias matemáticas base do movimento da MM, a conferência de Calado desenvolvia a abordagem bourbakista através dos conceitos de operação algébrica, leis de composição e estrutura e a única vez que poderíamos discernir uma vaga referência à lógica estará na afirmação de que a nova matemática opta pela *forma* em detrimento da *génese* (p. 93).

O curso de 1959 tem uma opção diferente, destacando a predominância da lógica simbólica nas novas ideias. Logo no início do texto, ao salientar o que considerava importante no novo movimento, Sebastião e Silva afirmava:

> 1) A lógica formal deu lugar a um ramo da matemática, que, com o nome de lógica matemática, lógica simbólica ou logística, inclui, entre outros capítulos, o cálculo proposicional e a teoria dos conjuntos (sem topologia).
> 2) Toda a matemática moderna está intimamente penetrada do espírito da lógica matemática.
> Compete hoje portanto aos professores de matemática ensinar lógica nos liceus, de maneira explícita ou implícita (e melhor fora de maneira explícita) (Silva, 1959, p. 4).

Embora o seu trabalho enquanto matemático tenha sido reconhecido essencialmente pela sua contribuição para a análise funcional, o interesse de Sebastião e Silva pela lógica atravessa todo o seu percurso profissional: desde o início da sua carreira publicou diversos artigos sobre a matéria, alguns discutindo a sua aplicação ao ensino secundário; enquanto esteve a realizar o seu doutoramento em Itália no início dos anos 1940 elaborou uma primeira dissertação nunca defendida também sobre o tema; e, mesmo no final da sua carreira, após o reconhecimento internacional dos seus "espaços de Silva", tentou regressar ao assunto. Como afirma Franco de Oliveira:

> podemos dizer que a ligação de JSS [Sebastião e Silva] à lógica no início da sua carreira científica foi, afinal, uma perene relação com muitos frutos serôdios de que só agora começamos a disfrutar. Para todos os efeitos, JSS foi, além de grande matemático, um mais que promissor grande lógico do séc. XX (Oliveira, s/d, p. 10).

Embora Teresa Monteiro (2018) já tenha chamado a atenção para a proximidade entre Sebastião e Silva e a lógica, os trabalhos de história da educação matemática nem sempre têm apreciado esta profunda ligação à lógica de um dos seus personagens mais influentes. E, no entanto, como referiu Franco de Oliveira,

> entre as novas matérias que preconizou para os ensinos nas reformas que liderou nos anos 60 estiveram sempre presentes a lógica, a teoria dos conjuntos, as álgebras de Boole com aplicações a computadores, a teoria das relações, a par de outros tópicos inovadores, como a álgebra vectorial, a estatística e as transformações geométricas (Oliveira, s/d, p. 4).

A experiência de MM por ele liderada iniciava-se pelo estudo da lógica, como parece indicar o facto de que o primeiro capítulo do primeiro volume do Compêndio de Matemática para o curso complementar do ensino secundário da autoria de Sebastião e Silva é "Introdução à lógica matemática".

Entre os trabalhos dos estagiários, encontramos referências ao artigo escrito após o curso de 1959. Nogueira (1960), por exemplo, citou uma parte do artigo de Sebastião e Silva relacionado com esse curso.

> *Seria de grande interesse que o aluno liceal se habituasse a traduzir, na linguagem da lógica simbólica, proposições (axiomas, teoremas, definições), assim como problemas*. Aliás é isso já em parte o que se faz ao pôr problemas em equação e ao definir lugares geométricos por equações em geometria analítica. Tratava-se pois de levar mais longe esse processo de *formalização*, para dar ao aluno a ideia de que toda a teoria dedutiva pode ser *formalizada*. Em países estrangeiros considera-se como objetivo primacial do ensino da álgebra, nos três primeiros anos, habilitar o aluno a pôr problemas em equação: não conseguindo este objetivo, o ensino pode considerar-se falhado. Na verdade a matemática é essencialmente uma linguagem de tipo especial, que como qualquer idioma estrangeiro, se adquire, usando-a e fazendo traduções, assim como retroversões (Silva, 1959, p. 42, itálicos no original)[8].

A importância deste tema para os estagiários é realçada desde cedo. Por exemplo, Leonor Vieira entendia que a lógica simbólica foi criada para estabelecer com segurança os fundamentos da matemática e inclui "a teoria dos conjuntos e o cálculo proposicional, e desempenha um papel importantíssimo na clarificação do raciocínio matemático" (1960, p. 7). Em sentido semelhante se exprimiu Fernanda Martins, para quem, quando o raciocínio dedutivo e a intuição não conseguem dar resposta a novos problemas, surge a necessidade de reexaminar as "técnicas de dedução" e aposta-se na lógica simbólica "destinada a estabelecer uma correlação íntima e perfeita entre o raciocínio e o meio de expressão" (Martins, 1962, pp. 53-54).

Nestes anos iniciais, ainda antes de qualquer experiência em aula, a expectativa sobre a recepção da simbologia por parte dos alunos é positiva. Como dizia Dulce Nogueira,

---

[8] Optámos por ampliar o texto de Sebastião e Silva originalmente citado por Nogueira, clarificando os destaques originais por ela omitidos e corrigindo em simultâneo o número da página por ela indicado.

> O pôr em equação problemas, o traduzir analiticamente certas propriedades geométricas é já um começo, mas seria para desejar avançar um pouco mais no processo de formalização. O nosso objectivo [do professor de Matemática], afinal, é que o aluno saiba jogar com um simbolismo, que lhe sinta as vantagens e vá ficando com a ideia "de que toda a teoria dedutiva pode ser formalizada".
> Não nos parece que os alunos ofereçam muita resistência ao simbolismo: são eles mesmos a pedir símbolos. Perguntam por exemplo: 'como havemos de indicar que duas rectas, r e t, se encontram?' E chegam a achar engraçado marcar três pontinhos, em triângulo, em vez de 'portanto' (Nogueira, 1961, p. 38).

Segundo outra estagiária, o estudo desta "nova lógica — a lógica matemática ou lógica simbólica" (Martins, 1962, p. 53) tem como finalidade "descobrir e formular, com clareza e rigor, as leis do pensamento. O seu estudo, no início, assenta portanto sobre questões de conteúdo e linguagem, pois é esta que fornece ao pensamento os seus meios de expressão habituais" (Martins, 1962, p. 53). Frege não diria melhor.

As tabelas de verdade características da "álgebra proposicional", apresentadas por Sebastião e Silva em 1959, foram comentadas pela primeira vez por estagiários em 1962. Gomes, que as divulgou, denominou-as de "tabuadas" (1962, p. 24), designação que não se consolidou. O seu trabalho contem diversos exemplos de aplicação da lógica simbólica a silogismos aristotélicos, tema também já tratado em 1959.

No final do período estudado, em que se denota um maior à vontade com o uso dos novos conceitos, e em que o conhecimento pedagógico do conteúdo está a ser gerado nas turmas experimentais, os textos dos estagiários passam a abordar a álgebra das proposições e a teoria dos conjuntos de um modo mais detalhado. Isso é possível de ser observado a propósito de quatro temas: o uso das tabelas de verdade, o uso de quantificadores, as limitações da lógica e a ligação entre proposições e circuitos elétricos.

- Quanto ao primeiro tema, a expectativa sobre a simplificação trazida pelo uso das tabelas era grande. Graça Ribeiro explicou como espera que o recurso a uma tabela de verdade simplifique a demonstração por conversão demonstrando "a equivalência das implicações (H => T) e (~T => ~H)" (Ribeiro, 1966, pp. 7-8).
- O uso de quantificadores era também abordado, referindo-se, por um lado, a possibilidade de clarificação da linguagem (Rua, 1966) ou, por outro, a importância de aclarar a ordem pela qual eles são colocados nas expressões matemáticas (Ribeiro, 1966).
- As limitações dos princípios fundamentais da lógica bivalente foram também discutidos relatando situações em que eles não se aplicam (M. A. Santos; M. I. Santos, 1966).
- A ligação entre expressões lógicas e circuitos elétricos foi abordada por Marinete Leitão (1966) que recorreu mesmo à lógica simbólica e à teoria dos conjuntos para fazer humor sobre a sua situação profissional.

A nova linguagem que interliga as operações lógicas com as operações sobre conjuntos vai assumir um papel de destaque na cultura da matemática escolar em Portugal e vai modelar as normas e as práticas dos programas de matemática aprovados a partir de 1968 com consequências graves. Por exemplo, muitos professores do 5.º e 6.º anos tiveram muita dificuldade em integrar a nova linguagem na sua prática obrigando a múltiplas intervenções ministeriais. Por outro lado, a partir de 1973, o ensino de boa parte da análise passou a ser integrado no longo capítulo de Lógica do que corresponderia ao atual 10.º ano de escolaridade.

CONCLUINDO

Procurámos destacar neste artigo os diferentes modos como a lógica foi surgindo em tempos de construção do conhecimento pedagógico do conteúdo sobre temas de MM. Numa altura em que a reforma ainda estava a tentar encontrar um rumo, assistimos a reflexões filosóficas sobre o que era entendido como uma crise fundacional da matemática que desaparece em 1962. Registámos ainda as ambivalências no que concerne ao dilema intuição/formalismo na intervenção didática. Relacionado com este tema, observámos como o debate sobre sistemas axiomáticos envolveu muitos estagiários e como terminou quando, a partir de 1970 e 1973, os novos programas excluíram o tema. Vimos, finalmente, como a lógica enquanto linguagem acaba por ocupar um espaço no currículo muito para além da mera discussão de uma álgebra das proposições, moldando a discussão de quase todos os tópicos matemáticos.

O significado amplo que atribuímos ao termo "lógica" no início deste trabalho permitiu-nos identificar cinco significados utilizados na matemática escolar que ocorrem no corpus examinado:

1. *Lógica-organização*. Ocorre nas discussões sobre sistemas axiomáticos quando se pretende discutir sequências didáticas adequadas, estabelecendo precedências ou discutindo alternativas.
2. *Lógica-normativa*. Ocorre quando a lógica determina a validade do conhecimento escolar.
3. *Lógica-linguagem*. Ocorre na discussão sobre a álgebra das proposições e a formalização dos conteúdos matemáticos.
4. *Lógica-raciocínio*. Ocorre quando se atribui ao estudo da lógica e dos sistemas axiomáticos a virtude de moldar a cognição dotando o aluno de hábitos de rigor e de disciplina.
5. *Lógica-conteúdo*. Ocorre quando a lógica, em particular a álgebra das proposições, constitui explicitamente uma secção dos programas.

Para terminar, devemos alertar o leitor para as limitações do nosso trabalho. Apesar de o Liceu Pedro Nunes ter um papel fundamental no desenvolvimento da educação em Portugal, existiram outros dois liceus com responsabilidades na formação de professores e para os quais não conhecemos ainda os modos como este tema foi abordado.

REFERÊNCIAS

Fontes primárias

Bento, M. R. (1964). Como orientar o estudo da geometria sintética elementar, à margem dos atuais programas nos ensinos pré-liceal e liceal? *Palestra, Revista de Pedagogia e Cultura, 20*, 126-140.

Calado, J. (1958). Sobre o ensino das matemáticas elementares. *Palestra, Revista de Pedagogia e Cultura, 1*, 89-105.

Decreto n.º 39 807. (1954). *Diário do Governo, I.ª Série*(198, 7 de Setembro de 1954), 977-1071.

Domingues, M. C. (1960). *Influência da crítica dos fundamentos e do material moderno de ensino na estruturação e aprendizagem da matemática elementar*. Arquivo Escola Secundária Pedro Nunes, Lisboa.

Gomes, A. E. (1962). *Linha de rumo do aprendizado da matemática elementar: A - o trabalho de equipa, B - o modelo, C - os princípios de lógica matemática, D - os princípios de álgebra dos conjuntos*. Arquivo Escola Secundária Pedro Nunes, Lisboa.

Leitão, M. N. (1966). *Algumas considerações sobre o 6.º ano de Matemática das turmas experimentais: conteúdos, métodos de ensino, relacionação com outras disciplinas do curriculum escolar, influência na formação humana do aluno.* Arquivo Escola Secundária Pedro Nunes, Lisboa.

Lima, I. M. (1958). O ensino da matemática elementar: finalidade, conteúdo e didática. *Palestra, Revista de Pedagogia e Cultura, 3*, 58-74.

Martins, M. F. (1962). Linha de rumo do aprendizado da matemática elementar. O modelo; os princípios da lógica matemática e da álgebra dos conjuntos. *Palestra, Revista de Pedagogia e Cultura, 15*, 48-71.

Nogueira, M. D. (1961). Algumas reflexões sobre o ensino e a aprendizagem das matemáticas elementares. *Palestra, Revista de Pedagogia e Cultura, 12*, 32-53.

Pais, M. M. (1963). A estruturação atual da aritmética e da geometria no grau secundário elementar. *Palestra, Revista de Pedagogia e Cultura, 17*, 107-125.

Piaget, J. (1955). Les structures mathématique et les structures opératoires de l'intelligence. In J. Piaget, E. W. Beth, J. Dieudonné, A. Lichnerowicz, G. Choquet, & C. Gattegno (Eds.), *L'enseignement des mathématiques* (pp. 11-33). Neuchatel: Delachaux et Niestlé.

Reis, M. C. (1958). O ensino da matemática elementar considerado do ponto de vista da sua finalidade, do seu conteúdo e da sua didática. *Palestra, Revista de Pedagogia e Cultura, 1*, 127-128.

Ribeiro, M. G. (1966). *Algumas considerações sobre o 6.º ano de Matemática das turmas experimentais: conteúdos, métodos de ensino, relacionação com outras disciplinas do curriculum escolar, influência na formação humana do aluno.* Arquivo Escola Secundária Pedro Nunes, Lisboa.

Rodrigues, M. O. (1961). *A didática atual da matemática no 2.º ciclo liceal: preocupação de rigor lógico; movimento e percepção.* Arquivo Escola Secundária Pedro Nunes, Lisboa.

Rosa, M. A. (1968). A atualização do ensino da Matemática no 2.º ciclo liceal. *Palestra, Revista de Pedagogia e Cultura, 32*(Abril), 95-115.

Rua, M. J. (1966). *Algumas considerações sobre o 6.º ano de Matemática das turmas experimentais: conteúdos, métodos de ensino, relacionação com outras disciplinas do curriculum escolar, influência na formação humana do aluno.* Arquivo Escola Secundária Pedro Nunes, Lisboa.

Ruiz, M. L. (1964). Concepção dinâmica do ensino da Geometria. *Palestra, Revista de Pedagogia e Cultura, 20*, 141-148.

Ruiz, M. L. (1964b). *Como orientar o estudo da geometria sintética elementar, à margem dos atuais programas, nos ensinos pré-liceal e liceal?* Arquivo Escola Secundária Pedro Nunes, Lisboa.

Santos, M. A. (1967). *O 7.º ano de matemática das turmas experimentais: alguns conteúdos e respectivas didáticas. Contribuição deste programa para uma nova estrutura da geometria liceal.* Arquivo Escola Secundária Pedro Nunes, Lisboa.

Santos, M. I. (1967). *O 7.º ano de matemática das turmas experimentais: alguns conteúdos e respectivas didáticas. Contribuição deste programa para uma nova estrutura da geometria liceal.* Arquivo Escola Secundária Pedro Nunes, Lisboa.

Serrote, P. C. (1966). Algumas considerações sobre o 6.º ano de Matemática das turmas experimentais: Conteúdos, métodos de ensino, relacionação com outras disciplinas do curriculum escolar, influência na formação humana do aluno. *Palestra, Revista de Pedagogia e Cultura, 26*(Abril), 108-121.

Silva, J. S. (1959). Introdução à lógica simbólica e aos fundamentos da matemática (Lições proferidas no Liceu Normal de Pedro Nunes). *Palestra, Revista de Pedagogia e Cultura, 6*, 3-65.

Ventura, M. S. (1959). Didática da Matemática. *Labor, Revista de Ensino Liceal*, *23*(182), 305-318.

Viegas, M. L. (1960). *Influência da crítica dos fundamentos e do material moderno de ensino na estruturação e aprendizagem da matemática elementar*. Arquivo Escola Secundária Pedro Nunes, Lisboa.

Vieira, L. M. (1960). *Influência da crítica dos fundamentos e do material moderno de ensino na estruturação e aprendizagem da matemática elementar*. Arquivo Escola Secundária Pedro Nunes, Lisboa.

Fontes secundárias

Burke, P. (2005). *O que é história cultural?* Rio de Janeiro: Zahar.

Matos, J. M. (2020, em impressão). História da Educação Matemática e Educação Matemática. *Anais do ENAPHEM*.

Matos, J. M., & Almeida, M. C. (2018). A reforma da matemática moderna em Portugal. *HISTEMAT – Revista de História da Educação Matemática, 4*(2), 5-30.

Matos, J. M., & Monteiro, T. M. (2018). Elaborando o conhecimento pedagógico do conteúdo matemático na década de 1960 no Liceu Pedro Nunes. In J. M. Matos (Ed.), *A matemática e o seu ensino na formação de professores. Uma abordagem histórica* (pp. 273-308). Lisboa: APM.

Monteiro, T. M. (2016). Da crítica dos fundamentos da matemática à busca de um maior rigor no ensino: Uma reflexão por via dos estagiários do Liceu Normal de Pedro Nunes (1956-1969). In M. H. Martinho, R. A. T. Ferreira, I. Vale, & H. Guimarães (Eds.), *Atas do XXVII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 49-62). Porto: APM.

Monteiro, T. M. (2018). *Formação de Professores de Matemática no Liceu Normal de Pedro Nunes (1956-1969).* (Tese de Doutoramento), Universidade Nova de Lisboa, Lisboa.

Oliveira, A. F. (s/d). José Sebastião e Silva e a Lógica Matemática — pioneirismo e actualidade. Obtido de http://jss100.campus.ciencias.ulisboa.pt/Testemunhos/Outros/Augusto_J_Franco_de_Oliveira.pdf, acedido em 10/7/2020.

Santiago, A., & Matos, J. M. (2019). Norms and practices of secondary teachers' formation. The Portuguese case (1915-1930). In F. K. Bjarnadóttir, A. Karp, J. Prytz, G. Schubring (Eds.), *Proceedings of the Fifth International Conference on the History of Mathematics Education* (pp. 339-356). Nieuwerkerk aan den Ijssel: Drukkerij Baas.

Schreier, M. (2013). *Qualitative Content Analysis in Practice*. London: SAGE Publications.

Shulman, L. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.