



**A UNIDADE DE REFERÊNCIA NO ENSINO DOS NÚMEROS RACIONAIS:  
um olhar sobre manuais da formação de professores do ensino primário em Portugal (1844-1974)**

**THE REFERENCE UNIT IN TEACHING RATIONAL NUMBERS:  
a look at manuals for the training of primary school teachers in Portugal (1844-1974)**

Rui Candeias<sup>1</sup>

ORCID iD: <http://orcid.org/0000-0002-4670-7090>

Cecília Monteiro<sup>2</sup>

ORCID iD: <http://orcid.org/0000-0001-5928-8641>

**RESUMO**

O presente trabalho centra-se na análise do modo como a unidade de referência era abordada no ensino dos números racionais em oito manuais da formação de professores do ensino primário, de diferentes momentos do intervalo de tempo entre 1844 e 1974. Os manuais analisados são de autores de referência na formação de professores em Portugal de diferentes épocas. O estudo é baseado numa análise documental, de natureza descritiva e interpretativa, com uma perspetiva histórica. É possível distinguir dois períodos: de 1884 a 1930 e depois de 1930 até 1974. No primeiro período, os cursos de formação inicial de professores do ensino primário contemplavam disciplinas com conteúdos matemáticos, por exemplo Aritmética e Geometria, e disciplinas de didática e pedagogia. No segundo período, o plano curricular do curso foi reduzido às disciplinas consideradas essenciais para o exercício profissional e as disciplinas com conteúdos de matemática foram retiradas passando os temas de matemática a ser tratados apenas a um nível didático e pedagógico. Verifica-se que, de um modo geral, nos manuais existe o recurso a situações contextualizadas onde se identificam diferentes tipos de grandezas, contínuas e discretas e respetivas unidades de medida, e unidades simples e compostas. No entanto, nos dois manuais do primeiro período cujos autores têm uma formação académica científica, Nunes (1887) e Preto (1903), nota-se uma maior preocupação com a diversidade de unidades escolhidas existindo uma distinção explícita entre grandezas contínuas, como as medidas de comprimento, e grandezas discretas com a apresentação de situações de reconstrução da unidade a partir de uma parte. Nas obras do segundo período é de destacar o trabalho com tarefas de reconstrução da unidade propostas em Gonçalves (1974) e a utilização explícita de diferentes tipos de unidades nos exemplos apresentados por Pimentel Filho (1934) e Gonçalves (1974).

**Palavras-chave:** História da educação matemática. Ensino primário. Formação de professores. Números racionais não negativos. Unidade.

**ABSTRACT**

The present work focuses on the analysis of how the reference unit was approached in the teaching of rational numbers in eight manuals for the training of primary school teachers, from different moments between 1844 and 1974. The analyzed manuals are from authors of reference in the training of teachers in Portugal, from different periods. The study is based on a documentary analysis, of a descriptive and interpretative nature, with a historical perspective. It is possible to distinguish two periods: from 1884 to 1930 and after 1930 until 1974. In the first period, the initial training courses for primary school teachers covered subjects with mathematical content, for example Arithmetic and Geometry, and didactic and pedagogy subjects. In the second period, the curricular plan of the course was reduced to the subjects considered essential for professional practice and the subjects with mathematical content were removed, passing the mathematical themes to be treated only at a didactic and pedagogical level. It appears that, in general, in the manuals there is the use of contextualized situations where different types of quantities are identified, continuous and discrete and the respective units of measurement, and simple and compound units. However, in the two manuals of the first period whose authors have a scientific

<sup>1</sup> Professor do 1.º ciclo – Agrupamento de Escolas Terras de Larus, Seixal, Portugal. Email: rp.candeias@campus.fct.unl.pt

<sup>2</sup> Professora Coordenadora, aposentada da Escola Superior de Educação de Lisboa, Portugal. Email: ceciliam@eselx.ipl.pt

academic background, Nunes (1887) and Preto (1903), there is a greater concern with the diversity of units chosen, with an explicit distinction between continuous quantities, such as measures in length, and discrete quantities with the presentation of situations of reconstruction of the unit from a part. In the works of the second period, the work with tasks of reconstruction of the unit proposed in Gonçalves (1974) and the explicit use of different types of units in the examples presented by Pimentel Filho (1934) and Gonçalves (1974) should be highlighted.

**Keywords:** History of mathematical education. Primary school. Teacher training. Non-negative rational numbers. Unity.

## **INTRODUÇÃO**

O presente texto faz parte de um trabalho mais abrangente onde se estuda a evolução do conhecimento profissional do professor para ensinar matemática nos primeiros anos de escolaridade, desenvolvido nas escolas de formação inicial de professores do ensino primário, no período entre 1844, data que marca uma primeira tentativa de institucionalização da formação dos professores deste nível de ensino, e 1974, momento da história de Portugal que depôs o regime ditatorial do Estado Novo vigente desde 1933, e que marca uma alteração na formação inicial destes professores.

O texto centra-se na forma como, nos manuais utilizados nas escolas de formação de professores do ensino primário, publicados no intervalo de tempo definido no estudo, é trabalhado o conceito de unidade no ensino dos números racionais.

O conhecimento profissional do professor para ensinar matemática e, em particular, para o ensino dos números racionais, tem sido alvo de diversas investigações (ver por exemplo Behr, Harel, Post & Lesh, 1992; Monteiro & Pinto, 2005; Ni & Zhou, 2005; Nunes, Bryant & Watson, 2009; Pinto, 2011). Uma das componentes essenciais no desenvolvimento do sentido de número racional é o trabalho com a unidade de referência (Pinto, 2011), sendo a ideia de unidade uma das dificuldades descritas na literatura (Monteiro & Pinto, 2005; Lamon, 2002, 2006). Apesar dos estudos já realizados em torno desta problemática, a perspetiva histórica tem sido pouco explorada. No entanto, e como refere Matos (2005), o conhecimento da história permite uma ação mais fundamentada no presente.

## **OS MANUAIS NA FORMAÇÃO INICIAL DOS PROFESSORES DO ENSINO PRIMÁRIO EM PORTUGAL**

Os manuais utilizados nas escolas de formação inicial dos professores do ensino primário são importantes fontes de pesquisa para fazer a reconstituição histórica de uma determinada disciplina escolar (Chervel, 1990). Referindo-se especificamente aos manuais de pedagogia e metodologia, Pintassilgo (2006) destaca a importância dos mesmos como meios de divulgação de novas ideias e práticas de ensino.

Nas escolas de formação inicial de professores do ensino primário em Portugal, os manuais com conteúdos relacionados com o ensino de matemática apresentam características diferentes conforme o período trabalhado. Nuns casos são manuais dedicados a conteúdos de

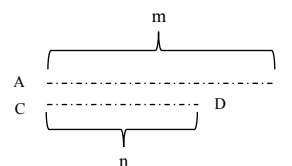
matemática, noutros casos são manuais de disciplinas como pedagogia, metodologia ou de didática, mais centrados nos processos e métodos de ensino.

## O ENSINO DOS NÚMEROS RACIONAIS NÃO NEGATIVOS E A UNIDADE DE REFERÊNCIA

Uma das possíveis caracterizações dos números racionais é através da medição de grandezas (Caraça, 2003; Brousseau, 2007). Caraça (2003) considera que os números racionais surgiram da necessidade de medir através da comparação de duas grandezas da mesma espécie, sendo uma delas tomada como unidade de medida, comparação que nem sempre pode ser traduzido por um número natural, quando a unidade não cabe um número exato de vezes na grandeza a medir.

Na medição, Caraça (2003) destaca três aspetos: escolha da unidade, comparação com a unidade e expressão dessa comparação através de um número, definindo o campo numérico dos números racionais do seguinte modo:

Sejam, fig. 13, os dois segmentos de reta  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ , em cada um dos quais se contém um número inteiro de vezes o segmento  $u$  -  $\overline{AB}$  contém  $m$  vezes e  $\overline{CD}$   $n$  vezes o segmento  $u$ . Diz-se, por definição, que a medida do segmento  $\overline{AB}$ , tomando  $\overline{CD}$  como unidade, é o número  $\frac{m}{n}$  e escreve-se



$$\overline{AB} = \frac{m}{n} \cdot \overline{CD}$$

quaisquer que sejam os números inteiros  $m$  e  $n$  ( $n$  não nulo) (Caraça, 2003, p. 35).

No caso de  $m$  ser divisível por  $n$ , o número  $\frac{m}{n}$  coincide com um número natural, que é o quociente da divisão. No caso de  $m$  não ser divisível por  $n$ , o número diz-se fracionário. No entanto, em qualquer das duas hipóteses anteriores,  $\frac{m}{n}$  diz-se racional, sendo o número  $m$  designado por numerador e o número  $n$  designado por denominador.

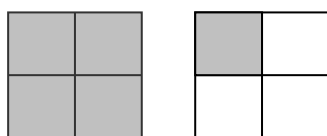
Caraça (2003) define então o conjunto dos números racionais como um conjunto ordenado, infinito, denso, do tipo numerável, mas não contínuo.

O conteúdo dos números racionais não negativos é muitas vezes visto como um dos tópicos mais complexos na matemática do ensino básico e onde os alunos apresentam mais dificuldades (Monteiro & Pinto, 2005; Ni & Zhou, 2005). No desenvolvimento do sentido de

número racional, a ideia de unidade é uma das dificuldades que os alunos enfrentam (Lamon, 2002, 2006; Monteiro & Pinto, 2005).

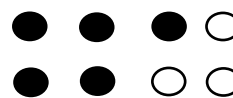
No trabalho escolar com números racionais dois aspetos são fundamentais: a apresentação de situações que permitem aos alunos contactarem com diferentes tipos de unidades, contínuas ou discretas, simples ou compostas (Lamon, 2006; Monteiro & Pinto, 2005) e a explicitação clara da unidade de referência. Por exemplo, nas duas figuras seguintes quando se pede para indicarem que fração está sombreada, a ambiguidade da unidade permite que possa ser interpretada como  $\frac{5}{8}$ , em vez de  $\frac{5}{4}$  na figura 1 (Monteiro & Pinto, 2005) e como figura  $\frac{5}{8}$ ,  $1\frac{1}{4}$  ou 2,5 na figura 2 (Lamon, 2006).

**Figura 1** – Ensino de frações.



**Fonte:** Monteiro & Pinto (2005).

**Figura 2** – Ensino de frações.



**Fonte:** Lamon (2006).

Ainda no trabalho com diferentes tipos de unidades, Monteiro e Pinto (2005) destacam que quando calculamos a metade de uma unidade e depois a metade dessa metade, a unidade de referência muda e, quando dizemos que temos um quarto, estamos novamente a referirmo-nos à primeira unidade. No cálculo *da décima da décima* ( $0,1 \times 0,1$ ) uma das partes em que a unidade é dividida (a décima) funciona agora como um novo tipo de unidade, diferente da inicial.

Um outro aspeto que constitui um trabalho fundamental são as situações de reconstrução da unidade, que poderão levar os alunos a refletir sobre as relações entre a parte e o todo (Lamon, 2006). Monteiro e Pinto (2005) também destacam a importância do desenvolvimento de tarefas que envolvam a reconstrução da unidade, tanto com unidades discretas, como com unidades contínuas.

## **ABORDAGEM METODOLÓGICA**

O estudo baseia-se numa análise documental do tipo qualitativo, numa perspetiva histórica. Na análise dos documentos foi privilegiada uma análise de natureza qualitativa, descritiva e interpretativa, destacando-se os elementos comuns e as principais diferenças entre as diferentes abordagens propostas nos manuais, tendo também como referência as propostas

atuais para o trabalho com a unidade no contexto do ensino dos números racionais não negativos.

Na seleção das fontes, privilegiou-se as fontes escritas primárias, no sentido que Berrio (1976) dá à classificação das fontes. O *corpus documental* é constituído por manuais ou livros de texto com publicação entre 1844 e 1974. Começou-se por fazer a identificação dos manuais publicados entre 1844 e 1974 na literatura publicada sobre este tema (Pintassilgo, 2006; Correia & Silva, 2002; Silva 2001) e nos documentos legais, no período em que a adoção destes manuais era publicada na legislação. Foi ainda necessário fazer uma pesquisa de fontes em arquivos das escolas superiores de educação, na Biblioteca Nacional de Portugal e na Secretaria Geral do Ministério da Educação.

Na seleção das fontes seguiu-se os seguintes critérios: livros de texto da área da matemática ou do seu ensino, explicitamente dirigidos aos cursos de formação de professores do ensino primário, publicados no âmbito cronológico do estudo, que fossem de autores portugueses e originais e que estivessem integralmente disponíveis. Foram identificadas 23 obras que correspondiam a estes critérios. Numa segunda fase da seleção das fontes, fez-se um cruzamento dos manuais selecionados inicialmente, com as principais reformas que marcaram a formação inicial dos professores do ensino primário. Chegou-se assim a uma lista final constituída por oito manuais: Nunes (1887), Affreixo e Freire (1890), Preto (1903), Coelho (1892, 1906), Pimentel (1934), Gaspar e Ferreira (1944), Pinheiro (1961) e Gonçalves (1972, 1974). No caso do manual de Coelho (1906) foi necessário consultar e analisar uma outra obra sua, Coelho (1892) onde a abordagem aos números racionais não negativos é aprofundada.

## **OS AUTORES DOS MANUAIS**

Na apresentação e análise dos resultados distinguem-se dois períodos dentro do intervalo de tempo que marca o estudo. O primeiro período vai de 1844 até 1930, momento em que o plano de estudos do curso de formação inicial de professores do ensino primário apresenta uma componente das ciências da especialidade e formação geral, nomeadamente na área da matemática, e uma componente pedagógica<sup>3</sup>. Neste período foram analisados quatro manuais, dois correspondem a disciplinas da componente de ciências da especialidade, Nunes (1887) e Preto (1903), e dois que correspondem a disciplinas da componente pedagógica, Affreixo e

---

<sup>3</sup> Utiliza-se aqui a designação usada por Baptista (2004), que distingue no plano de estudos dos cursos de formação de professores do ensino primário uma componente de ciências de especialidade e formação geral, uma componente pedagógica e uma componente prática.

Freire (1890) e Coelho (1892, 1906). O segundo período vai de 1930 a 1974. As alterações efetuadas no curso em 1930 levou a que fossem praticamente eliminadas as disciplinas da componente de ciências da especialidade e o curso focou-se em grande parte na componente pedagógica. Desta forma, no segundo período os quatro manuais analisados correspondem a disciplinas de didática, focando-se em aspetos do ensino dos números racionais. Neste segundo período foram analisadas as obras de Alberto Pimentel Filho (1937), José Maria Gaspar e Orbelino Geraldês Ferreira (1944), José Moreirinhas Pinheiro (1961) e Gabriel Gonçalves (1972, 1974).

O conhecimento que se tem sobre os autores dos manuais e a sua formação é importante no sentido de compreender a forma como abordam o ensino dos números racionais. Entre os autores analisados no primeiro período estão dois autores com formação na área das ciências. Diogo Nunes tem formação como médico cirurgião, mas exerce a docência como professor de uma escola industrial, onde leciona várias disciplinas, sendo uma delas a Aritmética, e é autor de diversos manuais. Manso Preto é o único dos autores analisados que tem uma formação especificamente em matemática, tendo obtido o grau de doutor na Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra. Dedicou-se à docência no Liceu de Coimbra e na escola normal da mesma cidade. É autor de diversas obras para o ensino na área da matemática. Ainda relativamente ao primeiro período, José Graça Affreixo e Henrique Freire são coautores que passaram pela lecionação no ensino primário, após a formação em escolas normais. Posteriormente exerceram a função de docentes na Escola Normal de Évora tendo escrito diversos manuais na área da pedagogia e da metodologia. José Augusto Coelho, um autor ainda do primeiro período, destacou-se na docência no ensino particular. Frequentou o seminário e a Faculdade de Teologia de Coimbra, mas não terminou qualquer formação superior. Destacou-se na área da pedagogia, tendo exercido a docência na Escola Normal de Lisboa e a direção da Escola Normal de Lisboa para o sexo feminino. Foi um autor destacado de obras na área da pedagogia e teve uma intervenção relevante na introdução da pedagogia científica em Portugal.

Os autores dos manuais analisados no segundo período estão sobretudo ligados à pedagogia e à didática. Neste grupo de autores destaca-se Alberto Pimentel Filho, por ser o único com uma formação na área das ciências, sendo médico. Destacou-se na docência na Escola Normal de Lisboa e foi autor de diversos manuais na área da pedagogia e da história da educação. José Maria Gaspar e Orbelino Geraldês Ferreira, coautores, fizeram a sua formação em escolas de formação de professores do ensino primário, em Coimbra, embora tenham obtido formações complementares posteriormente, nomeadamente em ciências pedagógicas. Exerceram a docência em escolas do ensino primário, antes de ingressarem na docência na

Escola do Magistério Primário de Lisboa. Trajetória de formação e profissional idêntica teve José Moreirinhas Pinheiro que se formou para a docência no ensino primário na Escola do Magistério Primário de Coimbra, tendo obtido uma formação complementar em ciências pedagógicas na Universidade de Coimbra. Exerceu a docência no ensino primário antes de chegar à docência na Escola do Magistério Primário de Lisboa. Foi autor de diversas obras na área da didática e da história da educação. Relativamente a Gabriel Gonçalves não foi possível recolher informação sobre a sua formação académica. Foi professor na Escola do Magistério do Porto, tendo posteriormente exercido a função de inspetor orientador do Ministério da Educação. Editou obras na área da didática, nomeadamente da aritmética e do português.

## RESULTADOS

Os manuais da componente das ciências da especialidade, do primeiro período, referem a unidade logo no início da obra, quando apresentam nos preliminares, definições como grandeza, medida das grandezas, número, contar, duas espécies de números, aritmética e sinais. Nesta característica assemelham-se a outras obras de aritmética da época (ver por exemplo Pegado, 1895).

Nunes (1887) define unidade como a grandeza que serve para medir todas as grandezas da sua espécie e a medida é a comparação “com uma da mesma espécie tomada por *unidade*” (Nunes, 1887, p. 5, itálico no original). Nunes (1887) apresenta exemplos de unidades familiares como o metro, o quilo e o litro e identifica diferentes tipos de unidades, distinguindo a ação de medir, da ação de contar. Para Nunes (1887) no caso da ação de contar, a grandeza é formada por muitas partes distintas e semelhantes, que o autor designa por grandeza descontínua<sup>4</sup> dando exemplos como um grupo de pessoas ou um monte de livros. No caso destas designadas grandezas descontínuas, toma-se como unidade um dos elementos que a constituem. Nunes (1887) refere também exemplos de grandezas contínuas, como as medidas de comprimento.

No final do capítulo dedicado ao estudo das frações, Nunes (1887) apresenta um conjunto de oito problemas resolvidos onde se destaca a utilização de contextos com unidades contínuas, como as medidas de comprimento, de capacidade ou as medidas de tempo, embora não se distinga explicitamente o tipo de unidade utilizada. No exemplo seguinte é utilizada uma grandeza contínua, a capacidade, num problema de mistura:

---

<sup>4</sup> Nos manuais analisados é normalmente utilizada a designação descontínua para se referir a grandezas discretas.



De uma pipa contendo 210 litros de vinho tiram-se 40 litros que se substituem por água; tiram-se de novo 20 litros da mistura que se substituem ainda por água. Quantos litros de vinho e de água contém a pipa depois desta 2.<sup>a</sup> operação? (Nunes, 1887, p. 77)<sup>5</sup>.

No seguinte exemplo parte-se de um determinado conjunto discreto, considerado a unidade sobre a qual vai ser pedido o cálculo da quarta parte, depois a sexta parte da nova unidade resultante e finalmente pede-se a reconstrução da unidade inicial:

Uma camponesa precisa de levar à cidade uma cesta com 125 laranjas; mas sabe que antes de lá chegar deve passar por duas partes: à primeira tomam-lhe  $\frac{1}{4}$  do número de laranjas que levar, e à segunda deve dar  $\frac{1}{6}$  das que lhe restarem. Quantas laranjas deve levar na cesta para satisfazer a estas exigências? (Nunes, 1887, p. 78).

No manual de Preto (1903) a unidade é apresentada de uma forma idêntica ao que acontece no manual de Nunes (1887), nas noções preliminares de um capítulo intitulado numeração. Depois de apresentada a grandeza como “tudo o que é suscetível de aumentar ou diminuir” (Preto, 1903, p. 3) o autor distingue duas espécies de grandezas, que designa por contínuas e descontínuas, e começa por exemplificar o que considera como grandezas descontínuas:

os livros de uma biblioteca, que formam uma grandeza, podemos aumentá-los, juntando-lhe um, dois ou mais livros; e diminuí-los, tirando-lhe um, dois ou mais livros (...) Estas grandezas, que crescem ou diminuem, juntando-lhes objetos da mesma espécie, chamam-se descontínuas.” (Preto, 1903, p. 3).

Preto (1903) diferencia estas grandezas “descontínuas” de outras, como por exemplo os comprimentos, as áreas ou os volumes, que designa por grandezas contínuas, destacando que:

o azeite contido em uma pia, não o podemos fazer aumentar ou diminuir do mesmo modo que fizemos à porção de livros de que há pouco falámos; a porção de azeite varia de uma maneira contínua e insensível, sem passar bruscamente de uma altura para a outra (Preto, 1903, p. 4).

Preto (1903) salienta de seguida que para se avaliar uma grandeza é necessário compará-la com outra conhecida da mesma espécie, a que dá o nome de unidade, definindo unidade como “uma grandeza, tomada as mais das vezes arbitrariamente, que serve para medir as grandezas da mesma espécie”, indicando ainda que “*unidade* é qualquer dos objetos que formam a grandeza.” (p. 5, itálico no original).

Preto (1903) salienta que “para avaliar uma grandeza, é preciso compará-la com outra conhecida da mesma espécie, à qual se dá o nome de *unidade*.” (p. 4, itálico no original). Nas

---

<sup>5</sup> Nas citações textuais optou-se por adaptar a ortografia da época dos manuais à ortografia atual.

duas espécies de grandezas, Preto (1903) destaca que há aquelas que podem avaliar contando-as, que são as grandezas descontínuas, e aquelas que se podem avaliar medindo-as, as grandezas contínuas.

Ao longo do capítulo dedicado aos “números fracionários”, Preto (1903) não volta a discutir explicitamente os tipos de unidade e de grandeza. No entanto, no final deste capítulo, Preto (1903) apresenta um conjunto de 16 exercícios onde se podem distinguir contextos que utilizam diferentes tipos de unidades. Entre estes exercícios destaca-se a utilização de unidades contínuas como as medidas de tempo e de capacidade. Num outro exemplo apresentado por Preto (1903), a unidade utilizada é a hora como um conjunto discreto: “Quantas horas são os  $\frac{2}{3}$  de  $\frac{3}{4}$  de  $\frac{4}{5}$  de  $\frac{5}{6}$  de 12 horas?” (Preto, 1903, p. 155). É ainda de referir que alguns dos exercícios propostos envolvem a reconstrução da unidade, como na seguinte situação: “A diferença entre os  $\frac{3}{4}$  e os  $\frac{2}{9}$  de uma herança é 1672\$000; qual é o valor da herança?” (Preto, 1903, p. 156).

Ainda no primeiro período, nos manuais dedicados às disciplinas da componente pedagógica é de destacar que o tipo de unidade não é muito aprofundado. Na obra de Affreixo e Freire (1890) a unidade é discutida apenas na apresentação da definição de número:

Contando as crianças diferentes objetos a uma e um, aos pares, às mãos, às dúzias, terão no que denomina *um* a unidade, no *total* dos objetos contados a quantidade, e na palavra de *relação* de grandeza, entre o que denominou um e o total, terá o número. (Affreixo & Freire, 1890, p. 223, itálicos no original).

A obra de Affreixo e Freire (1890) não aprofunda a abordagem aos números racionais, indicando apenas a ordem pela qual a aritmética deveria ser ensinada, onde se inclui o número decimal e a ideia de fração. Por esta razão, não é possível descrever e analisar o tratamento dado à unidade nesse contexto, neste manual.

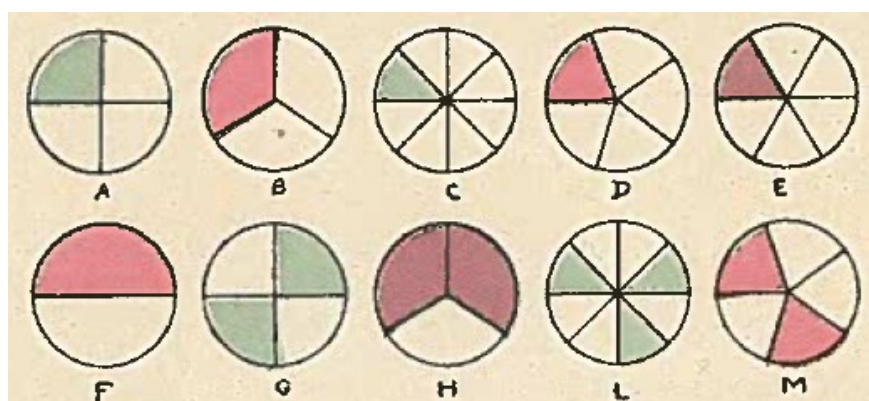
Nas obras de Coelho (1892, 1906) aqui analisadas, este refere-se à unidade quando apresenta uma sequência para o ensino da numeração até 10, salientando que a “geração dos números vai-se sempre efetuando por *adição sucessiva* de unidades” (Coelho, 1906, p. 96, itálico no original). Quando Coelho (1906) aborda o ensino das frações, destaca que o trabalho com “esta nova ordem de relações numéricas” não oferece dificuldades aos alunos. No contexto do ensino das frações não explicita nenhuma distinção de diferentes tipos de unidades, no entanto, no exemplo que apresenta para o ensino inicial das frações refere-se a unidades contínuas, como uma laranja, numa situação em que a fração é tratada como a parte de um todo contínuo:

suponha-se que se pretende, por exemplo, pôr diante dos olhos do aluno o que seja a relação numérica *um quinto* ou seja a fração expressa pelo seguinte símbolo:  $\frac{1}{5}$ ; para o conseguir, bastará mostrar ao aluno, por exemplo, uma laranja dividida em cinco partes iguais: tomando uma dessas partes, ter-se-á  $\frac{1}{5}$  da unidade total.” (Coelho, 1906, p. 99, *itálico no original*).

No que diz respeito aos manuais do segundo período (1930 a 1974), as obras de Pimentel Filho (1934) e Gonçalves (1974) referem-se explicitamente ao trabalho com diferentes tipos de unidade. Pimentel Filho (1934) refere-se pela primeira vez à unidade quando apresenta as noções de quantidade, de unidade e de número. Para este autor, inicialmente deve ser trabalhada a noção de grandeza “descontínua” que associa ao estudo inicial da numeração, sendo a noção de grandeza contínua relacionada com o estudo das frações. Pimentel Filho (1934) também se refere à necessidade de organizar unidades compostas que associa ao estudo do sistema decimal e à organização de novas ordens no sistema de numeração (dezena, centena, milhar).

Na iniciação ao estudo das frações, Pimentel Filho (1934) utiliza essencialmente exemplos com unidades contínuas, como por exemplo círculos divididos em partes iguais como na figura seguinte.

**Figura 3** – Discos seccionados em diferentes partes, representando diferentes frações da unidade, onde surge a representação de frações unitárias e não unitárias.



Fonte: Pimentel Filho (1934, p. 150).

Este trabalho com as frações mais centrado nas unidades contínuas decorre da opção que Pimentel Filho (1934) faz ao trabalhar a introdução da fração como a parte de um todo de uma unidade contínua. Na proposta de Pimentel Filho (1934) ressalta também os exercícios em que sabendo que a fração corresponde a uma determinada parte da figura, se pede ao aluno que faça a reconstituição da unidade “Este quadrado é o oitavo de um retângulo. Construa o retângulo respetivo.” (Pimentel Filho, 1934, p. 150).

Apesar de na apresentação inicial das frações, Pimentel Filho (1934) usar apenas exemplos com unidades contínuas, nos exercícios propostos no final do capítulo apresenta

exemplos, que designa por exercícios, onde as unidades utilizadas são conjuntos discretos. Dois exemplos são estes dois exercícios: “O João tem 12 soldados de chumbo.  $\zeta$  Se der metade da metade, com quantos ficará? Quantos lápis serão os  $\frac{2}{5}$  de 25 lápis?” Pimentel Filho (1934, p. 155).

No trabalho que Pimentel Filho (1934) propõe para as operações com frações, também são apresentados exemplos que utilizam unidades contínuas e unidades discretas. É de destacar que nos contextos com a representação decimal são privilegiadas as unidades contínuas, sendo os contextos de medida os mais utilizados.

Na obra de Gonçalves (1972, 1974) também se faz uma distinção explícita dos diferentes tipos de unidades. Este autor refere-se pela primeira vez à unidade quando trabalha o estudo inicial do sistema de numeração, apresentando exemplos de unidades discretas simples. Ainda no trabalho com o sistema decimal, Gonçalves (1972) destaca o que designa por conjuntos-unidade, referindo-se a unidades discretas compostas como a dezena, a centena, a dúzia ou o quarteirão. Para Gonçalves (1972) esta é uma ampliação do conceito de unidade.

No estudo dos números racionais não negativos, as primeiras referências de Gonçalves (1974) à unidade surgem no estudo dos decimais porque este autor aborda este conjunto numérico através da sua representação decimal. As unidades destacadas são as unidades contínuas, porque as medidas de comprimento são o contexto privilegiado por Gonçalves (1974) para fazer a abordagem aos decimais. Quando se centra no ensino das frações, Gonçalves (1974) também explicita a utilização de diferentes unidades quando distingue os diferentes conceitos que a fração pode representar, referindo explicitamente conjuntos contínuos e discretos “1) Na partilha de um conjunto contínuo ele significa «uma ou mais das partes iguais em que se dividiu esse conjunto».”. No segundo exemplo, Gonçalves (1974) apresenta a fração como parte de um todo de um conjunto discreto “2) Na partilha de um conjunto “descontínuo”, ele significa «uma ou mais das partes iguais desse conjunto» (de coisas, pessoas, etc.).” (Gonçalves, 1974, p. 143, aspas no original). Para Gonçalves (1974) a iniciação do estudo das frações deveria começar pela partilha equitativa de unidades contínuas. Apenas numa das fases trabalho com as frações são utilizadas unidades discretas, como no exemplo seguinte:

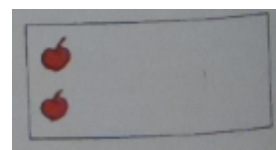
4) Procedam também as crianças à partição em duas partes iguais de conjuntos determinados: «separe, com uma linha (ponteiro, régua, etc.) metade das coisas deste conjunto». (Gonçalves, 1974, p. 147, aspas no original)



Na obra de Gonçalves (1974) é explícito o cuidado que apresenta na definição da unidade de referência e que no mesmo exercício as unidades de referência utilizadas não levem a equívocos. Numa das fases do trabalho com as frações, Gonçalves (1974) refere que os alunos devem obter metades, terços, da mesma unidade ou de unidades diferentes e compará-las.

Gonçalves (1974) dá destaque ao trabalho com a unidade porque isso lhe permite tipificar os problemas a propor aos alunos no âmbito do conteúdo dos números racionais. Gonçalves (1974) distingue três tipos de problemas: 1) encontrar a fração; 2) achar o valor da parte de um todo; 3) achar o valor do todo. No terceiro tipo de problemas, as propostas envolvem a reconstrução da unidade, como no exemplo seguinte, onde Gonçalves (1974) apresenta o conjunto recorrendo a uma representação pictórica.

3.º As duas maçãs desenhadas representam duas décimas das que havia no tabuleiro. Desenha as que de lá se tiraram. (Gonçalves, 1974, p. 84)



Nos exemplos que apresenta para cada um destes três tipos de problemas, Gonçalves (1974) utiliza grandezas contínuas e grandezas discretas.

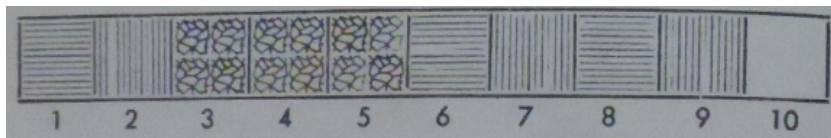
Nos manuais de Gaspar e Ferreira (1944) e de Pinheiro (1961) as primeiras referências à unidade são feitas no âmbito do estudo dos números naturais, com a apresentação de exemplos com unidades simples e compostas (caso das dezenas, centenas, etc.). No caso dos racionais aparecem exemplos de unidades discretas e contínuas sem, no entanto, as identificarem como tal.

No manual de Gaspar e Ferreira (1944) as primeiras noções apresentadas no contexto do estudo dos números racionais referem-se a grandezas contínuas, que se deve principalmente ao facto da abordagem proposta por estes autores relacionar, quase desde o início, a representação dos números racionais na forma de fração e na representação decimal. Esta relação leva os autores a utilizar maioritariamente as unidades de medida, de comprimento e de capacidade. As referências a conjuntos discretos são apenas apresentadas quando os autores destacam os materiais que podem ser utilizados no ensino das frações, onde se referem a desenhos de grupos de objetos ou de animais.

No caso de Pinheiro (1961). No contexto do ensino dos números racionais, o trabalho centra-se inicialmente na representação decimal, razão pela qual o autor privilegia grandezas contínuas, essencialmente relacionadas com as respetivas unidades de medida. No ensino das operações com decimais, Pinheiro (1961) também privilegia unidades contínuas para exemplificar e representar pictoricamente as operações a efetuar. Nestes casos, a unidade de

referência é usualmente uma tira de papel, como no exemplo seguinte onde ilustra uma unidade contínua dividida em 10 partes iguais:

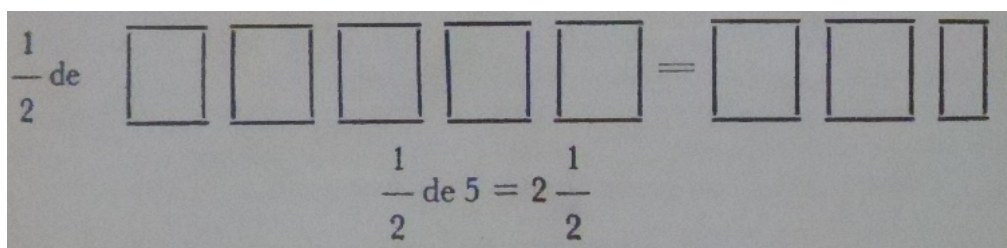
Um menino tinha um bolo. Deu 0,2 ao José, 0,3 ao João e 0,4 ao Carlos. Que quantidade de bolo deu aos três? Concretizamos com uma unidade representada graficamente:



Fonte: Pinheiro (1961, p. 72).

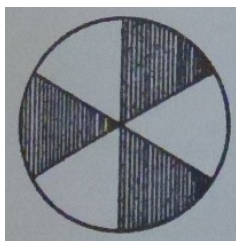
No início do trabalho com a fração, Pinheiro (1961) também recorre às tiras de papel que vai dobrando para obter as diferentes frações. Neste trabalho, Pinheiro (1961) também apresenta situações onde recorre a conjuntos discretos, principalmente quando trabalha a fração como operador partitivo multiplicativo.

Figura 4 – Exercícios de concretização das frações, onde se recorre a unidades discretas.



Fonte: Pinheiro (1961, p. 80, digitalização, 100% do original).

Na abordagem às noções de numerador, denominador e nomenclatura das frações também é utilizada uma unidade contínua, circular.



Dividi a unidade em 6 partes iguais e tomei 3 dessas partes. A fração que eu tomei da unidade escreve-se (três sextos). (Pinheiro, 1961, p. 81)

É de salientar ainda que Pinheiro (1961) atribui importância à definição da unidade de referência que serve de contexto aos exemplos, para depois ser feita a generalização a qualquer unidade.

## COMENTÁRIOS FINAIS

Quando se procede à comparação e ao cálculo algorítmico com frações, parte-se do princípio que elas têm forçosamente de ter como referência a mesma unidade. No entanto, em problemas concretos a unidade subjacente às frações em causa pode variar e é necessário definir a unidade de referência. Essa é uma preocupação que parece estar presente em todos os manuais analisados. É de salientar, no entanto, que apenas o autor, Preto (1903) apresenta sequências de cálculo que envolvem sucessivas mudanças da unidade de referência.

Uma outra preocupação no ensino dos números racionais é que os alunos contactem com contextos onde se utilizem diferentes tipos de unidades. Apesar da maioria dos manuais analisados apresentar situações que revelam a utilização de diferentes tipos de unidades, nem todos distinguem de uma forma explícita essas unidades. No que diz respeito aos manuais do primeiro período, é em Nunes (1887) e Preto (1903) que se destaca uma maior importância atribuída aos diferentes tipos de unidade, existindo uma distinção explícita entre grandezas contínuas, como as medidas de comprimento, e a grandezas discretas, designadas pelos autores como grandezas descontínuas. Nestas duas obras é estabelecida uma distinção entre o ato de medir, associado às grandezas contínuas, e o ato de contar, associado às grandezas discretas. Embora estes dois manuais sejam da área das ciências da especialidade, não existe na apresentação da noção de fração e dos diferentes tipos de unidades um formalismo simbólico, como existe por exemplo em Caraça (2003).

Nos manuais da componente pedagógica do primeiro período, Affreixo e Freire (1890) e Coelho (1892, 1906), não existe uma discussão explícita sobre os diferentes tipos de unidade no contexto do ensino dos números racionais. Na obra de Affreixo e Freire (1890) o ensino deste conteúdo é pouco destacado, existindo apenas uma referência ao ensino dos decimais e das frações quando se elenca os temas a trabalhar na formação de professores. Na obra destes autores a questão da unidade só é abordada quando apresentam a definição de número natural, sendo destacadas as unidades discretas. Na obra de Coelho (1892, 1906), apesar de não existir uma discussão explícita sobre os tipos de unidades, através da análise dos exemplos apresentados é possível perceber que no contexto do ensino das frações a abordagem é feita com a utilização exclusiva de unidades contínuas. No entanto, quando Coelho (1892) trabalha a iniciação ao sistema de numeração decimal faz referência a unidades compostas, como a dezena ou a centena.

Nos manuais do segundo período, a preocupação explícita com a utilização de diferentes tipos de unidades está presente nos manuais de Pimentel Filho (1934) e de Gonçalves (1972,

1974). Estes dois autores distinguem explicitamente no seu trabalho as unidades contínuas e as unidades discretas, assim como unidades simples e compostas associadas ao estudo do sistema decimal (unidades, dezenas, centenas). No contexto do ensino dos números racionais, destaca-se nas obras destes dois autores o trabalho com as unidades contínuas. Em Gonçalves (1974) o realce dado às unidades contínuas é motivado por este autor privilegiar as medidas de comprimento como contexto para fazer a abordagem aos decimais, embora também apresente exemplos com unidades discretas. Nas obras de Gaspar e Ferreira (1944) e de Pinheiro (1961) não existe uma referência explícita aos diferentes tipos de unidades. Da análise efetuada aos exemplos apresentados por estes autores ressalta o trabalho com unidades contínuas no contexto do ensino dos números racionais.

Relativamente à reconstrução da unidade, nos manuais analisados este tipo de situação não surge explicitamente, sendo apenas possível encontrar propostas com este tipo de situações em Preto (1903), Pimentel Filho (1934) e Gonçalves (1974). Em Preto (1903) são apresentados exemplos que envolvem a reconstrução da unidade a partir de uma parte, nomeadamente com unidades discretas. No manual de Gonçalves (1974) destacam-se os tipos de problemas que envolvem a reconstrução da unidade, nomeadamente com a utilização de unidades discretas. No manual de Pimentel Filho (1934) são apresentados exemplos da reconstrução da unidade, com referência a unidades contínuas.

## REFERÊNCIAS

- Baptista, M. (2004). *O ensino normal primário: currículo, práticas e políticas de formação*. Lisboa: Educa.
- Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. In D. Grouws (Org.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 296-333). NY: Macmillan.
- Berrio, J. (1976). El método histórico en la investigación histórica de la educación. *Revista Española de Pedagogía*, XXXIV, 134 (10-11), 449-475.
- Brousseau, G., Brousseau, N. & Warfield, V. (2007). Rationals and decimals as required in the school curriculum: part 2 from rationals to decimals. In *The Journal of Mathematical Behavior*, 26, 281-300. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.09.001>
- Caraça, B. (2003). *Conceitos fundamentais da matemática*. (5.<sup>a</sup> ed.). Lisboa: Gradiva. (Obra original publicada em 1941).
- Chervel, A. (1990). *História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa*. Teoria & Educação, 2, 177-229.



- Correia, A., & Silva, V. (2002). *Manuais pedagógicos – Portugal e Brasil – 1930 a 1971: produção e circulação internacional de saberes pedagógicos*. Lisboa: Educa.
- Lamon, S. (2002). Part-whole comparisons with unitizing. In Litwiller, B; Bright, G. (Editor) *Making sense of fractions, ratios and proportions*. Virginia, USA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Lamon, S. (2006). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Matos, J. (2005). História do ensino da matemática em Portugal. In *Actas do XIII Encontro de Investigação em Educação em Matemática*. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.
- Monteiro, C., & Pinto, H. (2005). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante, Revista de Investigação em Educação Matemática*, 14, 89-107. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Ni, Y., & Zhou, Y. (2005) Teaching and learning fraction and rational numbers: The Origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, 40(1), 27-52, doi:10.1207/s15326985ep4001\_3
- Nunes, T., Bryant, P. & Watson, A. (2009). *Keys understandings in mathematics learning*. Recuperado de [http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/MATHS\\_COMBINEDv\\_FINAL\(1\).pdf](http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/MATHS_COMBINEDv_FINAL(1).pdf)
- Pintassilgo, J. (2006). Os manuais de pedagogia no primeiro terço do século XX: entre a tradição e a inovação. In J. Pintassilgo, M. Freitas, M. Mogarro, & M. Carvalho (Orgs.). *História da escola em Portugal e no Brasil: circulação e apropriação de modelos culturais*, 175-200. Lisboa: Edições Colibri.
- Pinto, H. (2011). *O desenvolvimento do sentido da multiplicação e da divisão de números racionais*. Tese de doutoramento: Universidade de Lisboa.
- Silva, V. (2001). História de leituras para professores: um estudo da produção e circulação de saberes especializados nos “manuais pedagógicos” brasileiros (1930-1971) (2 vols.). Dissertação de mestrado, Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil.

## FONTES

- Nunes, D. (1887). *Elementos de aritmética, teoria e prática, para uso das escolas normais*. Covilhã: Cruz & Irmãos Editores.
- Afreixo, J. & Freire, H. (1890). *Pedagogia para uso do magistério português*. 8.<sup>a</sup> ed. Lisboa: Livraria Ferreira.

- Preto, A. (1903). *Aritmética prática e geometria elementar para o ensino das escolas normais*. Coimbra: Imprensa da Universidade.
- Coelho, J. (1892). *Princípios de pedagogia, Tomo II*. Porto: S. Paulo Teixeira & Irmãos Editores.
- Coelho, J. (1906). *Pedagogia elementar*. 2.<sup>a</sup> ed. Lisboa: Livraria Moderna – Editora.
- Pimentel Filho, A. (1934). *Súmula didáctica*. Lisboa: Livraria Editora.
- Gaspar, J. & Ferreira, O. (1944). *Notas de Didáctica Especial*. Lisboa: B.U. Amaral.
- Pinheiro, J. (1961). *Introdução ao estudo da didáctica especial*. Lisboa: Escola do Magistério Primário de Lisboa.
- Gonçalves, G. (1972). *Didáctica do cálculo (apontamentos), 1.º volume*. 2.<sup>a</sup> ed. Porto: Porto Editora.
- Gonçalves, G. (1974). *Didáctica do cálculo (apontamentos), 2.º volume*. 2.<sup>a</sup> ed. Porto: Porto Editora.