Revista de História da Educação Matemática
HISTEMAT

ISSN: 2447-6447

Submetido: 01/03/2021
Aprovado: 17/08/2021

APLICACIÓN DEL CÁLCULO DE LAS PROBABILIDADES A UN PROBLEMA DE GEOMETRÍA PRÁCTICA. ESTUDIO PRAXEOLOGICO Y SOCIOEPISTEMOLOGICO

APPLICATION DU CALCUL DES PROBABILITÉS À UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE PRATIQUE ETUDE PRAXEOLOGIQUE ET SOCIO-EPISTEMOLOGIQUE

Alberto Camacho Ríos[1]
ORCID iD https://orcid.org/0000-0002-0685-4723

RESUMEN

El documento muestra cómo el *método de combinación* establecido por el geómetra alemán Tobías Mayer, sobrevino en una práctica aplicada en el campo de la ingeniería, de amplia utilidad en los levantamientos geodésicos desarrollados por Gauss a principios del siglo XIX. El método de combinación fue transformado por este último en una nueva práctica conocida como *método de compensación o de los mínimos cuadrados*. La ruta seguida para probar esa transición, es el análisis de una propuesta de Gauss para la determinación de las coordenadas desconocidas de un punto sobre el terreno, midiendo los ángulos horizontales desde este último, de una buena cantidad de puntos de coordenadas rectangulares (x, y) conocidas. Los resultados del levantamiento, permitieron a Gauss hacer uso, por primera vez, de matrices triangulares habituales en la enseñanza del Álgebra Lineal actual. Por las condiciones del análisis el artículo se asume al modelo extendido de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, vinculada con elementos de la Socioepistemología.
Palabras clave: método de combinación, geodesia, triangulación, praxeología, práctica social.

RÉSUMÉ

Le document montre comment la méthode de combinaison établie par le géomètre allemand Tobías Mayer a abouti à une pratique appliquée dans le domaine de l'ingénierie, largement utile dans les levés géodésiques développés par Gauss au début du 19ème siècle. La méthode de combinaison a été transformée par cette dernière en une nouvelle pratique connue sous le nom de méthode de compensation ou des moindres carrés. L'itinéraire suivi pour tester cette transition est l'analyse d'une proposition gaussienne pour déterminer les coordonnées inconnues depuis un point sur le terrain, en mesurant les angles horizontaux de ce dernier, d'un bon nombre de points de coordonnées rectangulaires (x, y) connus. Les résultats de la levée ont permis à Gauss d'utiliser, pour la première fois, les matrices triangulaires habituelles dans l'enseignement de l'algèbre linéaire actuel. En raison des conditions de l'analyse, l'article suppose le modèle étendu de la théorie anthropologique de la didactique, lié à des éléments de socioépistémologie.
Mots clés: méthode de combinaison, géodésie, triangulation, praxéologie, pratique sociale.

[1] Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México. Profesor-Investigador del Tecnológico Nacional de México, Campus Chihuahua2, Chihuahua, Chih., México. E-mail: alberto.cr@chihuahua2.tecnm.mx

1. INTRODUCCIÓN

Las prácticas sociales son parte medular de la investigación actual que atraviesa los marcos teóricos conocidos como Socioepistemología (SE) y Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). Es complejo registrar una actividad de esa naturaleza debido a que su origen se remonta a cientos o miles de años. Al reconocer una práctica social mediante un análisis que involucre las condiciones social, histórica y cultural que la originaron, se aprecia luego el contenido matemático que la determina, el cual, en su perfeccionamiento, dio origen a otros conocimientos que fueron llevados al salón de clase, aunque esto último sea difícil de aceptar, o sencillamente se perdieron en el devenir del tiempo. En el artículo mostramos una práctica social engendrada al iniciar el siglo XIX, la cual evolucionó y se difundió hasta convertirse en un método fructífero para la resolución de ecuaciones numéricas de contenido variacional, sedimentándose como una técnica de diagonalización valiosa en la Probabilidad, el Álgebra Lineal y la Estadística, así como en otros resultados de las ciencias de la ingeniería, incluyendo su reformulación a través de conceptos del Cálculo Diferencial. Nuestro objetivo se centra en un intento por develar y modelizar una realidad científica encapsulada por alrededor de doscientos años.

1.1 Levantamiento geodésico de Hannover

El asunto a tratar refiere un problema real que enfrentó Gauss (1777-1855) durante las operaciones geodésicas realizadas para determinar las coordenadas del vértice trigonométrico llamado Holkensbastion en Copenhague. El reporte de los resultados se encuentra en el extracto de una carta que envió al astrónomo y geodesta H. Schumacher[2] durante el año 1823, con el título: Anwendung der Wasrscheinlichkeitsrechnung auf einer Aufgabe der praktischen Geometrie, es decir: *Aplicación del cálculo de las probabilidades a un problema de geometría práctica*,[3] colocado en el documento Werke. Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen[4] (Gauss, 1863, Werke. IX, pp. 231-237), con un enunciado que le antecede: Trigonometrische Punktbestimmung, o sea: *Disposición trigonométrica de puntos*, que apareció por vez primera en los Astronomische Nachrichten publicación de la cual Schumacher era editor.

[2] En esa época Shumacher fungía como director del Observatorio Astronómico de Kiel, ciudad alemana.
[3] La geometría práctica era conocida en la época de Gauss como la topografía o bien la geodesia actual.
[4] *Trabajos. Sociedad Real de Ciencias de Gotinga.*

Gauss desarrolló una vasta labor de trabajo de campo durante el levantamiento de una triangulación geodésica en la región de Hannover entre los años 1820 a 1825.[5] Hubo de sortear problemas que durante el establecimiento de las redes de triángulos fueron surgiendo, principalmente aquellos en los que había que aventurar cuadriláteros combinados con los propios triángulos, concretamente los usados para ampliar o extender más allá de la *base* principal las longitudes de los lados de los demás triángulos.[6] Uno de los problemas importantes que enfrentó, y es el que interesa mostrar en el escrito, fue la determinación de las coordenadas desconocidas de un vértice del terreno midiendo desde este último (con teodolito) los ángulos horizontales entre las rectas formadas desde ese punto y los diferentes vértices de coordenadas rectangulares conocidas.

Los cálculos y mapas que resultaron de la triangulación fueron documentados en varios reportes situados en los ya citados Werke, entre 1863 y 1903, por la Universidad de Gotinga, y refieren, además, una amplia actividad epistolar de Gauss con geómetras y astrónomos como Shumacher, Bessel, Gerling, Olbers, Krüger, y otros, interesados tanto en las técnicas, métodos, instrumentos de observación y conocimientos matemáticos, involucrados por el primero en los levantamientos geodésicos.

Hay que destacar que los vértices de apoyo que sirvieron para la determinación de las coordenadas de la estación Holkensbastion, en este caso los denominados: Pietri, Frueunthurm, Friedrichsberg, Erlösersthurm y Friedrichsthurm, que se comentan en el documento citado, formaron parte de una red de triangulación que unía el condado de Holstein en Alemania con el observatorio de Copenhague en Dinamarca.

El extenso trabajo de la triangulación geodésica sería combinado por Gauss con sus investigaciones teóricas, sobre todo aquellas relacionadas con la matemática y la probabilidad. Uno de los resultados de dichas investigaciones fue su exposición del Método de los Mínimos Cuadrados en la solución de los problemas relativos a la triangulación, del cual se desprenden sistemas de ecuaciones lineales, de naturaleza variacional, en las que los coeficientes de las

[5] Gauss fue llamado en 1818 para realizar el levantamiento geodésico del estado de Hannover, con la intención de unir dicho levantamiento con la red de triangulación danesa ya existente. El levantamiento fue resultado de amplias discusiones en ese respecto, que Gauss tuvo desde 1812, con Shumacher. Desarrolló el levantamiento en condiciones precarias: limitado por la transportación del equipo, pésimas condiciones de vida, malos climas, poca cooperación de los oficiales comisionados, accidentes, limitada salud e inadecuada asistencia y soporte de financiamiento. Desplegó los trabajos de campo por si mismo durante ocho años con un mínimo de ayuda. Gauss se inició como profesor y director del Observatorio Astronómico de la Universidad de Gotinga desde 1807, donde fungió como tal hasta el año de muerte en 1855. http://www.encyclopedia.com/topic/Carl_Friedrich_Gauss.aspx.

[6] El fundamento general de lo que hay que entender por un levantamiento topográfico o geodésico de una *triangulación,* es el siguiente: Si se tienen varios puntos de un plano unidos entre sí por rectas formando una red de triángulos, de los cuales cada uno esté unido al siguiente por un lado común, se puede hallar la forma de toda la red conociendo o midiendo sus ángulos, y basta conocer o medir con precisión un solo lado, que se llama *base,* para poder determinar o deducir las dimensiones de la red.

incógnitas aparecen dos veces simétricamente respecto a la diagonal principal. Resultado que devendría inevitablemente a la matemática escolar.

1.2 Nota IV

Para la traducción al español de la carta enviada por Gauss a Shumacher hemos confiado en la traslación al francés que hizo J. Bertrand,[7] de otro libro de Gauss titulado: Méthode des Moindres Carrés, Mémoires sur la Combinaison des Observations, en el cual fue colocada esta última e insertada con el título de *Nota IV* (Gauss, 1855). Cotejamos el documento original con la traducción al francés sin encontrar diferencias significativas. También se han resuelto las cuestiones de definición de fórmulas y cálculos numéricos desarrollados por Gauss en el reporte, que incorporan conocimientos de geodesia, topografía, cálculo diferencial, solución de ecuaciones lineales, trigonometría, geometría elemental, los métodos de combinación y mínimos cuadrados, técnicas de medición angular y lineal sobre el terreno y su diseño en planta, instrumentos de observación y medición, etc., encontrando al menos un *error personal* de Gauss en el cálculo de un ángulo entre dos rectas, que redunda en la compensación final de las coordenadas de Holkensbastion y que se comenta en el lugar indicado.

Para entender el pensamiento original de Gauss ante el método de los mínimos cuadrados, y posteriormente al estudio de la Nota IV, se analizó la obra de Doerfling (1939) titulada Mathematik fuer Ingenieure und Techniker, en la que se describen la notación primitiva y el método, todavía expedito, fijado por Gauss. En este propósito hemos respetado la notación original, salvo en la forma de exponer la notación numérica, por ejemplo 56.25 en lugar de usar coma 56,25.

Salvo la traducción de Bertrand, pocos estudios refieren el trabajo de Gauss para el vértice-estación de Holkensbastion. Así, en la página Web citada[8] se encuentra una traducción al inglés de la Nota IV realizada por H. Trotter de la Princeton University en 1957.[9] Otro *estudio histórico* fue desarrollado en 2006 por M. Ruiz de la Universidad de Granada. Este último menciona la medición de la estación del Holkensbastion y denomina el proceso como una *intersección inversa*, tal como se le conocía originalmente. Lo mismo ocurre en el

[7] Impreso en 1855 para Mallet-Bachelier.
[8] http://www.york.ac.uk/depts/maths/histstat/gausspractgeom.pdf
[9] Traducido del documento en francés de Bertrand.

documento biográfico que se cita.[10] Si bien son pocos lo que se han interesado por analizar el problema, este último aparece en otro contexto contenido en diversos manuales de topografía y geodesia, escritos en diferentes idiomas y publicados a lo largo de los siglos XIX y XX, reconociéndose como: Problema de los tres Puntos, Problema de Pothenot, Método de Trisección, Vértice de Pirámide, Intersección Inversa, etc. Entre los más sobresalientes se pueden mencionar el texto en lengua germana de Jordan, Reinhertz y Eggert (1981), en E. U el de Breed and Hosmer (1908), así como en México el de Toscano (1955), de entre otros. En estas propuestas el método de los mínimos cuadrados es dejado de lado y el problema se resuelve observando los ángulos horizontales, desde el vértice en cuestión, de solamente tres puntos de coordenadas conocidas.

1.3 Coordenadas aproximadas del Holkensbastion

Gauss planteó la solución del problema en dos partes fijando en la segunda las coordenadas del vértice Holkensbastion como: $x = +2836.44, y = +444.33$ (Gauss, 1855). Estas últimas fueron determinadas por el método de solución del Problema de los tres Puntos, que había sido definido en 1624 por el holandés W. Snellius y revisado por el inglés J. Collins en 1671, así como por el francés L. Pothenot en 1692. El mismo problema sería analizado por Bessel en 1813 y por Gauss en 1823, consignando sus resultados en los Werke IX, como se ha mencionado.

Debido a la limitación de usar solamente tres vértices en las mediciones, se puede estimar que las coordenadas de la estación de Holkensbastion son aproximadas con un *error* de principio que hizo necesario que Gauss observara los ángulos acimutales de una buena cantidad de vértices de la triangulación, al menos cinco, para mejorar la precisión de las coordenadas citadas: "(…) más si el número de puntos considerados es más grande, los errores serán mejor compensados, tomando la media de esas expresiones" (Gauss, 1855, p. 155).

Por las características interdisciplinarias de los cálculos y operaciones asociadas al levantamiento geodésico, de estos últimos destacan una buena cantidad de cuestiones epistemológicas que hay que interpretar y explicar para mejor entender la posición de Gauss ante el problema.

[10] http://www.encyclopedia.com/topic/Carl_Friedrich_Gauss.aspx

2. SOCIOEPISTEMOLOGÍA Y PRAXEOLOGÍAS

La Teoría Antropológica de lo Didáctico admite los *efectos transpositivos* como interacciones entre conocimientos de la matemática (Chevallard, 2007) fincados en praxeologías de la forma [T, τ, θ, Θ]. La estructura es compuesta por una tecnología θ, que simboliza objetos de la matemática como los teoremas y definiciones. De las tecnologías θ se desprenden *técnicas* τ con las que es posible resolver ciertas actividades o *tareas T*. En su conjunto, las praxeologías son organizadas por una teoría Θ centrada en el contexto de la matemática formal. Castela (2009) ha extendido el modelo de Chevallard a través de incorporar a la TAD una *tecnología práctica* θ^p, figura 1, mirando el fenómeno de transposición como una transformación y adaptación del conocimiento matemático para su uso en otras profesiones. Renombró la tecnología θ expresándola como θ^{th} = *tecnología teórica.*

Figura 1 — Unidad básica del modelo extendido de la TAD, que incluye una tecnología práctica θ^p.

$$I \rightarrow \begin{bmatrix} T & \tau & \theta^{th} & \Theta \\ & & \theta^p & \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow I_{th} \\ \leftarrow I_u \end{matrix}$$

Fuente: Castela y Romo-Vázquez (2011)

Según esta última, una praxeología es una *Institución*: "organización social estable; en ésta existen sujetos que realizan ciertas actividades sociales, bajo ciertas restricciones institucionales, aprovechando ciertos recursos disponibles en dicha institución" (Castela, 2009, p. 1196). Los siguientes objetos corresponden a Instituciones: el método de los mínimos cuadrados desarrollado por Gauss, la práctica de la combinación de Mayer, la estocástica y probabilidad, el texto de Álgebra Lineal de Grossman, etc.

En el esquema que se presenta en la figura 1, I es la Institución en la que se plantearon los problemas que dieron origen a la praxeología. A la derecha, las flechas simbolizan prácticas sociales de validación, legitimación e institucionalización. Se desarrollan en dos tipos de instituciones, según:

> las Instituciones teóricas I_{th} que respecto a T están en una posición de espectador, su función social es la producción de saberes; las Instituciones que les utilizan, I_u, en las que algunos de los sujetos tienen que cumplir tareas del tipo T (Castela, 2009, p. 1203).

Una tecnología práctica θ^p se distingue de una tecnología teórica θ^{th} debido a que la segunda se finca desde el marco teórico de la matemática formal, mientras que la primera es resultado de observaciones experimentales que se realizan en ciencias ajenas a la matemática. Por ejemplo, la ley empírica que determina el gasto Q en la hidráulica, la ecuación diferencial que modela la difusión de calor, entre otras que surgen de la física-matemática. Luego, una

Institución es constituida por prácticas sociales, pues acoge, permite y regula, este tipo de actividades de las cuales se sostiene. Según (Bordieu, 2009), en su búsqueda, "las prácticas no se pueden explicar sino a condición de vincular las condiciones sociales en las que se constituyeron los principios que la engendraron". El descubrimiento de la práctica y los principios que la originaron hacen que su producción sea visible, predecible y verificable.

Las prácticas sociales forman parte del estudio de la Socioepistemología, la cual se dedica al análisis de la construcción social del conocimiento. El método socioepistemológico es de naturaleza sistémica y trata los fenómenos de producción y difusión de saberes desde una perspectiva múltiple, situando el conocimiento en tres componentes de investigación, a saber, social, histórica y cultural (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015). Con este enfoque se asume la legitimidad de todo tipo de conocimiento. Se parte del supuesto de "una filiación entre la naturaleza del conocimiento que los seres humanos producen con las actividades mediante las cuales, y en razón de las cuales, dichos conocimientos son producidos" (op, cit., p. 9).

Para fijar la postura de Gauss ante el método utilizado para compensar los errores de las observaciones acimutales-angulares del vértice Holkensbastion, hay que admitir el mismo método como una práctica social fincada y desarrollada inicialmente por el astrónomo y geómetra alemán Tobías Mayer, cerca de 1750, que en la posición de Gauss alcanzó una evolución y transformación en la búsqueda de precisión y rigor sistemático en las observaciones y cálculos involucrados. En si misma la práctica se encuadra en un proceso de geometrización rigurosa del espacio físico, es decir: determinar las coordenadas de un vértice del terreno conociendo las de otros debidamente establecidos. Denominaremos la práctica social utilizada y perfeccionada por Gauss como "práctica de la compensación".

La actividad de geometrización conforma un ciclo que parte de la práctica social de Mayer y finaliza en forma de praxeología matemática, a través de la racionalización y modificación realizada por Gauss, que sirve de vehículo para llevarla al salón de clase.

3. OTRAS TECNOLOGÍAS

3.1 Instrumentos y métodos de observación

Según afirma Gauss, la medición de los ángulos horizontales en la estación de Holkensbastion se efectuó con un teodolito "sin repetición" restando así importancia a la repetición angular, debido a su intención de aplicar la práctica de la compensación en la resolución del problema. Por su lado, la medición de los ángulos horizontales de los vértices de apoyo de la triangulación fue llevada a cabo con un teodolito repetidor de aproximación angular de $10^{\prime\prime}$ sujeto a la tecnología de la época.

El método de repetición consiste en acumular la medida de un ángulo horizontal entre cada vértice que corta dos líneas, de manera que, en la nueva medición, en lugar de iniciar en *ceros* la posición del vernier del círculo horizontal del teodolito, comience con el ángulo en su primera acumulación. Por ejemplo, un ángulo que se ha medido en seis repeticiones es inicialmente de 1ª) $40^{0}20^{\prime}10^{\prime\prime}$, en la siguiente repetición el ángulo se duplica o acumula, más la duplicación no es la misma en los segundos, es decir: 2ª) $80^{0}40^{\prime}30^{\prime\prime}$, con una diferencia de $10^{\prime\prime}$ por exceso, debido a los pequeños errores angulares[11] propios del instrumento y del observador. Las siguientes mediciones acumuladas fueron: 3ª) $121^{0}00^{\prime}00^{\prime\prime}$; 4ª) $161^{0}20^{\prime}20^{\prime\prime}$; 5ª) $201^{0}40^{\prime}30^{\prime\prime}$ y 6ª) $242^{0}00^{\prime}50^{\prime\prime}$.[12] Al dividir entre las seis repeticiones la última acumulación, arroja un promedio del ángulo aproximado a centésimos de segundo como: $40^{0}20^{\prime}08.33^{\prime\prime}$. La aproximación centesimal, en los segundos, es en el sentido de los pequeños errores instrumentales y de observación en juego, lo cual implica que el cierre angular correspondiente tenga un error en el orden de la medición.[13] El método de repetición fue impulsado en Gotinga por T. Mayer en la búsqueda de minimizar los errores de medición angular.

3.2 Herramientas de cálculo

Los largos cálculos necesarios para reducir las operaciones geodésicas y así obtener mejores resultados, se facilitaron gracias al uso de las tablas logarítmicas, las primeras máquinas calculadoras y, sobre todo, la práctica de la compensación que Gauss uso por primera vez en el cálculo de las órbitas de algunos planetas, como fue el caso de Ceres,[14] alrededor de

[11] Cuando se practican mediciones de cualquier índole se comprueba por experiencia que las mediciones están sujetas a errores. Existen dos maneras de verificar la exactitud de las mediciones: una es repetir la medición de nuevo y comparar la diferencia respecto al primer resultado; o bien medir varias magnitudes que deban guardar entre sí cierta relación, observando hasta que punto queda ésta satisfecha. Por ejemplo, en el caso de la medición de los ángulos internos de los polígonos cerrados, la suma de estos es sujeta a la fórmula $(n-2)180^{\mathrm{o}}$, donde *n* indica el número de lados del polígono.

[12] La cantidad de repeticiones, en este caso seis, tiene que ver con la aproximación sexagesimal de los valores angulares; más ello no es determinante, puesto que el número de repeticiones puede ser variable.

[13] En la época de Gauss, un teodolito sin repetición constaba solamente de un disco para la medición de ángulos horizontales que no permitía acumular o repetir los ángulos.

[14] Planeta enano, se encuentra en el cinturón de asteroides entre Marte y Júpiter.

1801. Desde 1630 los logaritmos se habían instituido como parte del equipo de los astrónomos calculadores (Bell, 1985). Las tablas de logaritmos se pudieran mirar con un alcance semejante a las calculadoras científicas de bolsillo. Para la época de Gauss, y a casi 200 años de su invención por parte de Neper, y de la publicación de las primeras tablas logarítmicas de Briggs, con logaritmos era posible realizar operaciones como la multiplicación entre cantidades, división, elevación a potencias, raíces cuadradas, determinación de logaritmos de ángulos definidos por razones trigonométricas, etc., convirtiéndolas en procedimientos elementales de suma y resta de logaritmos, sin necesidad de desarrollar dichas operaciones a mano. Esta actividad hizo que los geómetras se convirtieran en notables calculistas para dar veracidad a sus experimentaciones. Gauss diseñó sus propias tablas de logaritmos de base diez y de cinco cifras decimales, con los cuales realizó los cálculos de los levantamientos ya mencionados (Shubring, 2008).

3.3 Método de combinación de Tobías Mayer

Camacho y Sánchez (2011) mencionan que Mayer estableció el método de combinación entre 1746 y 1751, con el cual era posible que por medio de simples operaciones algebraicas se lograran determinar los errores que resultaban de las observaciones astronómicas y levantamientos topográficos, los cuales eran condensados en *ecuaciones de condición* y que en un principio fueron desarrollados por el mismo Mayer. El procedimiento es consignado de la siguiente manera:

> El método partía del principio de hacer un buen número de repeticiones de las observaciones, de manera que con ello fuera posible *pesar* los errores cometidos con los instrumentos de observación, determinando en cada etapa una *ecuación de condición* para cada uno de éstos. El objetivo era determinar y *compensar* los errores instrumentales en las variables del sistema de ecuaciones de condición resultante, para *diluirlos* en éstas, más que tratar de eliminarlos (…)
> (…) El planteamiento para resolver el primero de estos, consistía en cambiar los signos de las ecuaciones, de manera que resultaran positivos todos los términos que contienen a *x*, y hacer enseguida una suma de todas ellas. La misma operación de sumar se debía repetir respecto de cada una de las otras incógnitas, obteniéndose de esa manera tantas ecuaciones finales como incógnitas hubiera. El sistema de valores que resultaba de *combinar* y sumar todas las ecuaciones era considerado como el más independiente del efecto de los *pequeños errores instrumentales.* (Camacho y Sánchez, 2011, pp. 35-36).

Para entender la "práctica de la combinación" se muestra enseguida un ejemplo sencillo, que guía para comprender más adelante la aplicación que hizo Gauss de este último en la Nota IV. Supongamos una recta $y = ax + b$ dibujada en un sistema de coordenadas rectangulares, de modo que se desean determinar las constantes a y b. Para ello se han medido con una regla graduada, de aproximación de un centímetro, una serie de valores de *x* e *y*, en un intervalo que va de $x = 2$ a $x = 3$, para obtener un número suficiente de ecuaciones de condición. Los resultados se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1 — Serie de valores de *x*, *y*

X	*Y*	*x*	*Y*
-2	3.45	1	-0.90
-1	1.95	2	-2.35
0	0.55	3	-3.75

Fuente: Elaboración del autor

Al sustituirlos en la expresión $y = ax + b$, obtendremos el siguiente sistema de ecuaciones de condición:

$$\begin{cases} -2a + b = 3.45 \\ -a + b = 1.95 \\ b = 0.55 \\ a + b = -0.90 \\ 2a + b = -2.35 \\ 3a - b = -3.75 \end{cases}$$

Como estas últimas son siempre positivas en la constante *b*, obtendremos sumándolas la siguiente ecuación: $3a + 6b = -1.05$. Cambiando enseguida los signos de las dos primeras ecuaciones, de manera que los coeficientes de *a* resulten todos positivos, y sumando, se tendrá:

$$9a + 2b = -11.85$$

Del sistema que forman las dos últimas ecuaciones se obtiene el promedio:

$$a = -1.4357, b = 0.54375$$

La ecuación de la recta viene a ser: $y = -1.4357x + 0.54375$. Si enseguida se pasan los términos de la derecha de las ecuaciones de condición a la izquierda y se sustituyen en cada caso los valores obtenidos de *a* y *b*, resultarán pequeñas diferencias llamadas *residuos*, en lugar de obtener rigurosamente cero, como debiera observarse si no hubiera error en las medidas. Para el ejemplo los residuos son:

$$\begin{matrix} -0.0187 & 0.0063 & 0.0312 \\ 0.0188 & -0.0062 & -0.0313 \end{matrix}$$

Estos últimos deben considerarse como los valores numéricos de los errores de observación, cuya magnitud indica que las mediciones se hicieron con una precisión suficiente, sujeta a las circunstancias del problema. De aquí que la suma de los cuadrados de los residuos se obtiene de la siguiente manera:

$$v^2 = (-0.0187)^2 + (0.0063)^2 + (0.0312)^2 + (0.0188)^2 + (-0.0062)^2 + (-0.0313)^2$$

O sea: $v = 0.0520$.

Se puede resumir la práctica de combinación de Mayer en la siguiente técnica:

a) El establecimiento de una buena cantidad de ecuaciones de condición,

b) En combinar estas últimas partiendo del principio de dejarles el mismo signo a los coeficientes, para cada incógnita, y

c) En sumarlas n veces de manera que reste un sistema de ecuaciones cuyo tamaño sea igual al número de incógnitas.

4. NOTA IV: APLICACIÓN DEL CÁLCULO DE LAS PROBABILIDADES A UN PROBLEMA DE GEOMETRÍA PRÁCTICA

Gauss envió a Schumacher los resultados de los cálculos realizados para determinar las coordenadas de la estación de Holkensbastion, cuyo objetivo, según el segundo, y como ya mencionamos, era: "Determinar la posición de un punto después de haber observado los ángulos horizontales de ese punto entre otros exactamente conocidos. Esta cuestión, muy elemental, no puede desconcertar a aquellos que conocen bien el método de los mínimos cuadrados" (Gauss, 1855, p.153).

4.1 Solución del problema del vértice de Holkensbastion

La solución fue presentada por Gauss de la siguiente manera:

> (…) siendo *x* e *y* las coordenadas aproximadas del punto desconocido y dy y dx las correcciones aún desconocidas que hace falta atribuirles. Determinaremos dos cantidades φ y r por las fórmulas:
>
> $$\text{tang}\varphi = \frac{b-y}{a-x},\ r = \frac{a-x}{\cos\varphi} = \frac{b-y}{\text{sen}\varphi}$$
>
> φ es tomado en un cuadrante tal, de manera que el valor de r sea positivo.
>
> Coloquemos luego $\alpha = \frac{206265''(b-y)}{r^2}, \beta = -\frac{206265''(a-x)}{r^2}$ (Ibid, pp. 153-154).

Las expresiones, $\text{tang}\varphi = \frac{b-y}{a-x}, r = \frac{a-x}{\cos\varphi} = \frac{b-y}{\text{sen}\varphi}$, determinan relaciones que llevan a calcular el valor del ángulo acimutal φ y la distancia r que se colocan entre el punto de coordenadas aproximadas $x = +2836.44, y = +444.33$ y los demás vértices de coordenadas trigonométricas[15] que se obtuvieron de la triangulación. El ángulo φ representa el acimut aproximado que se forma entre cada recta cuyo vértice de partida son las coordenadas de Holkensbastion y cualquiera otro de los observados en el levantamiento. En tanto los valores:

$$\alpha = \frac{206265''(b-y)}{r^2}, \beta = -\frac{206265''(a-x)}{r^2},$$

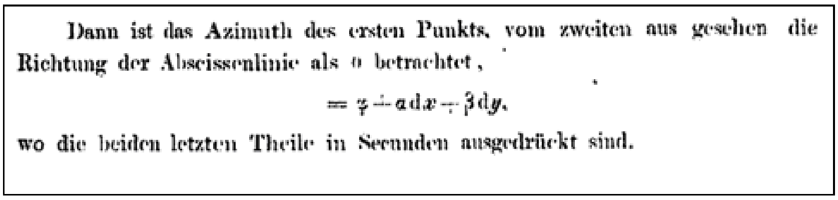
son sugeridos como los coeficientes $\alpha = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\beta = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$, asociados a las cantidades diferenciales que determinan el mínimo *error* $d\varphi$ para el valor del acimut φ, en la forma del primer diferencial total en dos variables, es decir: $d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy$.

Puesto que dicho valor angular es solamente aproximado, no sujeto a medición en el terreno, Gauss estimó que los acimutes debían corregirse sumando ese error al acimut calculado como: $\varphi + \alpha dx + \beta dy$. Donde α y β se contemplan en segundos sexagesimales, puesto que la cantidad 206265´´ deviene a radianes convertidos a segundos, o sea: $206265'' = \frac{180^0}{\pi} \times 60 \times 60$. De aquí que la parte centesimal de los segundos sexagesimales de cada acimut debiera así corregirse. De manera semejante se debe hacer con los demás acimutes:

$$\varphi' + \alpha' dx + \beta' dy, \varphi'' + \alpha'' dx + \beta'' dy, \text{ etc.}$$

En este caso los diferenciales dy y dx corresponden a errores numéricos en el sistema de ecuaciones de condición y como tales se deben calcular.

Figura 2 — Párrafo que muestra parte del cálculo desarrollado por Gauss para la solución del problema.



Dann ist das Azimuth des ersten Punkts, vom zweiten aus gesehen die Richtung der Abscissenlinie als 0 betrachtet,

$$= \varphi + \alpha dx + \beta dy,$$

wo die beiden letzten Theile in Secunden ausgedrückt sind.

Fuente: Gauss (1863, Werke, IX, p. 231)

La expresión: $\varphi + \alpha dx + \beta dy$, representa la probabilidad de que los errores lineales dx y dy sean comprendidos entre los límites $x + dx$, $y + dy$. En esta última, "$\varphi(x)$ es una función discontinua difícil de conocer en la práctica" (Gauss, 1855, p. 4), más es aquella que gobierna el proceso de cálculo y al problema planteado. Con ello se busca optimizar los valores dx y dy que hagan mínimos los residuos en las ecuaciones de condición, como por ejemplo en la expresión que se verá más adelante: $73^0 34' 3''.10 - 6.15dx + 81.7dy = 0$.

[15] Las coordenadas determinadas a partir del levantamiento geodésico o topográfico, vía la triangulación, fueron denominadas como *coordenadas trigonométricas*. En lo que sigue son llamadas de esa manera.

Gauss se exigía una solución de orden variacional en la forma: $\varphi(dx, dy) = 0$, la cual le llevó a usar un procedimiento numérico como el que se verá enseguida.

4.2 Acimutes calculados y acimutes medidos

La técnica usada por Gauss para medir con el teodolito los ángulos de los acimutes del Holkensbastion, fue la siguiente:

> Supongamos que, para las medidas angulares tomadas desde el punto donde la posición es desconocida, hicimos uso de un teodolito sin repetición; de modo que se dirige sucesivamente la visual hacia los puntos conocidos, sin cambiar de lugar el instrumento. Si h, h', h'', son los acimutes observados, tendríamos, suponiendo las observaciones rigurosamente exactas, y dx, dy suficientemente conocidas,
>
> $$(1)\begin{cases} \varphi - h + \alpha dx + \beta dy = \varphi' - h' + \alpha' dx + \beta' dy \\ \qquad = \varphi'' - h'' + \alpha'' dx + \beta'' dy \end{cases}$$ (Ibid, p. 154)

Se cuenta, luego, con acimutes φ *calculados* determinados a través de la diferencia de coordenadas entre los vértices como $\tan g\varphi = \frac{b-y}{a-x}$, y los mismos acimutes *medidos* u observados en el terreno con el teodolito. La resta de acimutes, $\varphi - h$, establece la aproximación entre ambos modelos que geometrizan el problema. La diferencia es compensada al sumarle la corrección $\alpha dx + \beta dy$, y se esperaría que con esa operación los residuos $(\varphi - h) - (\alpha dx + \beta dy)$ fueran mínimos.

Gauss generalizó esta última expresión, que como se dijo es el residuo o error que resulta de la compensación, pensando en hacerlo nulo. Lo estimó como:

$$\varphi' - \varphi - i + (\alpha' - \alpha)dx + (\beta' - \beta)dy = 0$$

$$\varphi'' - \varphi' - i + (\alpha'' - \alpha')dx + (\beta'' - \beta')dy = 0,$$

donde *i* es el ángulo horizontal entre cada dos rectas, medido directamente en el terreno; en tanto $\varphi' - \varphi$, es el mismo ángulo, *calculado* a partir de las coordenadas imprecisas del punto en cuestión. De aquí se esperaría que, por el método de los mínimos cuadrados:

$$\varphi' - \varphi - i + (\alpha' - \alpha)dx + (\beta' - \beta)dy = 0$$

Ello para el primero de los ángulos horizontales:

> Apliquemos las indicaciones que preceden a las observaciones que realizamos en común sobre el Holkensbastion, en Copenhague. Debo prevenir que los resultados en estas no son más que de una exactitud rigurosa. Los puntos observados eran muy próximos a la estación, una

inexactitud de una décima de pie[16] sobre su posición puede ejercer una influencia mucho más grande que los errores temidos habitualmente sobre los ángulos medidos (Gauss, 1855, p. 156).

Tabla 2 — La tabla muestra los ángulos horizontales medidos desde la estación de Holkenbastion a cada dos vértices consecutivos.

Estación Holkensbastion	Ángulo Horizontal
Friedrichsberg-Pietri	$73^0 35' 22''.8$
Pietri- Erlösersthurm	$104^0 57' 33''.0$
Erlösersthurm-Friedrichsberg	$181^0 27' 05''.0$
Friedrichsberg-Fraueunthurm	$80^0 37' 10''.8$
Frueunthurm-Friedrichsthurm	$101^0 11' 50''.8$
Friedrichsthurm-Friedrichsberg	$178^0 11' 01''.5$

Fuente: Elaboración del autor a partir de datos tomados de los Werke.

Los ángulos horizontales medidos desde la estación de Holkensbastion y las otras dos estaciones, consecutivas, correspondientes se aprecian en la Tabla 2. Mientras que las coordenadas trigonométricas de los vértices, determinadas a partir del levantamiento de la triangulación, tomadas en pies de París y con origen en el observatorio de Copenague, se consignan en la Tabla 3. En tanto las coordenadas aproximadas del Holkensbastion, como se vio, se estimaron en: $x = +2836{,}44, y = +444{,}33$ (figura 3).

Tabla 3 — Coordenadas trigonométricas *x, y* de los vértices de apoyo

Estación	Coordenadas
Pietri	$+487.7, +1007.7$
Frueunthurm	$+710.0, +684.2$
Friedrichsberg	$+2430.6, +8835.0$
Erlösersthurm	$+2940.0, -3536.0$
Friedrichsthurm	$+3059.3, -2231.2$

Fuente: Elaboración del autor a partir de datos tomados de los Werke.

Los acimutes calculados a partir de los ángulos horizontales, incluyendo su respectiva corrección, del Holkensbastion a cada vértice del terreno,[17] se aprecian en la Tabla 4.

Tabla 4 — Acimutes de la estación de Holkensbastion a cada vértice y la corrección correspondiente.

Holkensbastion	Acimutes
Pietri	$166^0 30' 42''.56 + 19.92dx + 83.04dy$
Frueunthurm	$177^0 33' 50''.54 + 10.80dx + 95.78dy$
Friedrichsberg	$92^0 56' 29''.46 + 26.07dx + 1.34dy$
Erlösersthurm	$271^0 29' 25.38 - 51.79dx - 1.35dy$
Friedrichsthurm	$274^0 45' 41.48 - 76.56dx - 6.38dy$

[16] Un pie geométrico era aproximadamente de 0.2777 m.

[17] En la actualidad la medición de las direcciones de las líneas se hace tomando sus *rumbos*, ya sean astronómicos o magnéticos. La medición a través de acimutes cayó en desuso desde principios del siglo XX. No obstante, estos se medían tomando como referencia de inicio para el ángulo correspondiente el norte verdadero o astronómico, o bien el Norte magnético, iniciando el giro del ángulo en la parte positiva del eje *y*, hacia la línea en cuestión, en el sentido de las manecillas del reloj. Sin embargo, en el caso de los acimutes calculados y medidos por Gauss a partir de los ángulos horizontales, estos últimos son considerados tomando como referencia el eje de las *x*, o bien el eje donde se coloca el Este, girando el ángulo en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

Fuente: Elaboración del autor a partir de datos tomados de los Werke.

"El ángulo bajo el cual vemos la distancia de Pietri a Friedrichsberg es, por consiguiente, $73^0 34'3'',10 - 6.15dx + 81.7dy = 0$".[18] Igualando este último con el ángulo observado, se tiene:

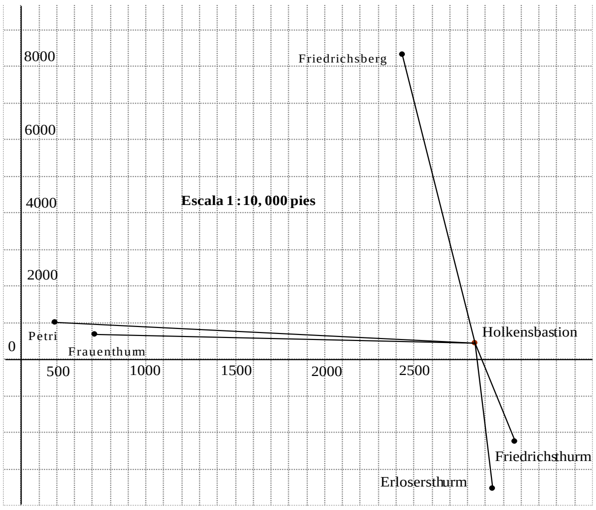
$$-79''.70 - 6.15dx + 81.7dy = 0$$

Siguiendo este procedimiento, Gauss estableció el sistema de ecuaciones de condición para cada acimut, como se ve en (2):

$$\begin{cases} -79''.70 - 6.15dx + 81.7dy = 0 \\ 69''.82 - 71.71dx - 84.39dy = 0 \\ 9''.08 + 77.86dx + 2.69dy = 0 \\ 0''.28 - 15.27dx + 94.44dy = 0 \\ 0''.04 - 87.36dx - 102.16dy = 0 \\ -3''.42 + 102.63dx + 7.72dy = 0 \end{cases} \quad \ldots(2)$$

> Suponiendo las observaciones igualmente precisas, deducimos de estas últimas las ecuaciones normales
>
> $$29640dx + 14033dy = 4168''$$
> $$14033dx + 33219dy = 12383,''$$
>
> y por consecuencia,
>
> $$dx = -0.05, dy = 0.40;$$
>
> las coordenadas *medias* de Holkensbastion son luego $x = 2836.39, y = 444.73$

Figura 3 — Posición en planta de las coordenadas rectangulares del vértice Holkensbastion respecto a los demás vértices de coordenadas trigonométricas usadas por Gauss para corregir las del primero.



Fuente: Elaboración del autor.

[18] El ángulo de $73^0 34'3''.10$, resultado de la diferencia entre los acimutes de las líneas Holkensbastion-Petri y Holkensbastion-Friedrissberg, es equivocado, puesto que la diferencia angular entre ambos es, de acuerdo a los acimutes que aparecen en la Nota IV, p. 157: $(166^0 30'42''.56) - (92^0 56'29''.46) = 73^0 34'\mathbf{13}''.10$. El error, que es de 10´´sexagesimales, y aparece desde la versión original en idioma alemán, así como en la traducción al francés de Bertrand, pareciera corresponder a un error personal de cálculo de Gauss, no tipográfico, ya que en los cálculos subsecuentes, dispone del ángulo equivocado, $73^0 34'3''.10$, determinando así por el método de los mínimos cuadrados los errores: $dx = -0.05$ y $dy = 0.4$, de manera que las coordenadas de Holkensbastion, ya corregidas, resultan ser: $x = 3836.39, y = 444.73$. Si se sigue el cálculo con el ángulo real de $73^0 34'13''.10$, usando de igual forma el método de los mínimos cuadrados, los errores resultan: $dx = -0.03$ y $dy = 0.36$, siendo de este modo las coordenadas corregidas: $x = 3836.41, y = 444.69$.

La práctica de la combinación dispone de un procedimiento compuesto por la técnica antes enunciada, organizado por un conocimiento en forma de discurso matemático al cual da sentido. Si se miran con detalle los dos modelos que geometrizan el problema, principalmente la parte en la cual se usan dos técnicas diferentes para medir los ángulos que determinan los acimutes; una de ellas aproximada con la incertidumbre de los errores arrojados por lo limitado del cálculo de las coordenadas de Holkensbastion, y la otra con una mejor precisión debido al uso del teodolito, estas dejan suponer que la incertidumbre de la primera, comparada con la precisión de la segunda, dan para elegir procedimientos expeditos que ayudan a establecer las ecuaciones de condición, los cuales tienen la significación por propiedad intrínseca, que permite a su vez la geometrización del problema. Combinados procedimiento y conocimiento dan sentido a la Geometría Práctica (topografía), la cual deviene ciencia empírica, sobre todo en los casos de investigación como el que se trata.

Sin embargo, en la Nota IV, el método de los mínimos cuadrados de Gauss no es explícito, incluso, no se aclaran las decisiones argumentativas del proceso de cálculo que hasta aquí se ha mostrado.

5. RESULTADOS

5.1 Definición de la praxeología: Establecimiento de las ecuaciones normales

El sistema de ecuaciones normales (2) al que finalmente llegó Gauss para determinar los valores numéricos de las correcciones dx y dy para las coordenadas aproximadas $x = +2836.44,\ y = 444.33,$ que se calcularon a través del problema de los tres puntos del Holkensbastion, se originó a partir del sistema de ecuaciones de condición (1) vistas anteriormente[19] el cual se reproduce enseguida:

$$\begin{cases} -79''.70 - 6.15dx + 81.7dy = 0 \\ 69''.82 - 71.71dx - 84.39dy = 0 \\ 9''.08 + 77.86dx + 2.69dy = 0 \\ 0''.28 - 15.27dx + 94.44dy = 0 \\ 0''.04 - 87.36dx - 102.16dy = 0 \\ -3''.42 + 102.63dx + 7{,}72dy = 0 \end{cases} \ldots(1) \qquad \begin{matrix} 29640dx + 14033dy = 4186'' \\ 14033dx + 33219dy = 12383'' \ldots(2) \end{matrix}$$

[19] En este apartado los cálculos de los errores dx y dy se refieren al sistema de ecuaciones de condición que contienen el error de cálculo del ángulo antes mencionado, puesto que Gauss siguió con este último los cálculos respectivos; en este caso el que encabeza el sistema cuyo valor es de 69.7´´, que como vimos debe ser de 79.7´´.

El procedimiento que siguió Gauss para llegar al sistema de ecuaciones *normales* (2), como fueron originalmente llamadas, es expresado en el siguiente principio, el cual es el motor de origen del método de los mínimos cuadrados:

> Multiplíquese cada ecuación de condición por el coeficiente que en ella tenga una de las incógnitas, tomado con su propio signo, e iguálese a cero la suma algebraica de los productos. (Doerfling, 1939, pp. 587-595)

El argumento sugiere un esquema de cálculo numérico del que se desprenden tres sistemas cuyas sumas dan por resultado tres ecuaciones lineales con dos incógnitas,[20] semejante a las que se muestran en la figura 4:

Figura 4 —Resultado de la aplicación del principio original de los mínimos cuadrados.

$$\begin{cases} a_1a_1 + a_1b_1 + a_1c_1 = 0 \\ a_2a_2 + a_2b_2 + a_2c_2 = 0 \\ a_3a_3 + a_3b_3 + a_3c_3 = 0 \end{cases}, \begin{cases} a_1b_1 + b_1b_1 + b_1c_1 = 0 \\ a_2b_2 + b_2b_2 + b_2c_2 = 0 \\ b_3a_3 + b_3b_3 + b_3c_3 = 0 \end{cases}, \begin{cases} a_1c_1 + b_1c_1 + c_1c_1 = 0 \\ a_2c_2 + a_2c_2 + c_2c_2 = 0 \\ a_3c_3 + b_3c_3 + c_3c_3 = 0 \end{cases}$$

Fuente. Doerfling (1939).

En los tres sistemas se repiten aquellos productos que no lo son por el mismo coeficiente, de manera que se repiten también las sumas respectivas. Siendo así, los coeficientes de las incógnitas en el sistema resultante aparecerán dos veces, y en posición simétrica respecto a la diagonal principal. Para el caso de los cálculos que realizó Gauss a las ecuaciones de condición (1) el sistema resultante debió quedarle como se aprecia en (3):[21]

$$\begin{gathered} 29640dx + \mathbf{14033}dy = \mathbf{4168} \\ \mathbf{14033}dx + 33219dy = \mathbf{12383} \ldots(3) \\ \mathbf{4168} + \mathbf{12383}dy = 11321 \end{gathered}$$

Dado que el objetivo era solamente determinar los errores dx y dy, la tercera ecuación fue para Gauss innecesaria, al menos no se sugiere en la Nota IV, obteniendo solamente el sistema de ecuaciones normales expuesto en (2), cuya solución por el método común de eliminación arroja los valores calculados para los errores: $dx = -0.05$, $dy = 0.40$.[22] Si se sustituyen estas últimas correcciones en el sistema de ecuaciones de condición (1), se obtendrán los ángulos horizontales en segundos sexagesimales, ya corregidos, como se puede ver en (4).

[20] Para ejemplificar se tomaron como modelo las ecuaciones de condición (1).

[21] Se resaltaron en negritas las cantidades simétricas respecto a la diagonal principal.

[22] Los valores calculados a partir de las ecuaciones normales del sistema de ecuaciones (3) difieren un poco de los estimados usando logaritmos por Gauss, siendo los valores determinados con calculadora: $dx = -0.045$ y $dy = 0.392$. Sin pérdida de generalidad en el problema, usamos estos últimos en (3) y (4) para los cálculos de los valores residuales.

$$\begin{cases} -79''.70 - 6.15(-0.045) + 81.7(0.392) = -47''.95 = v_1 \\ 69''.82 - 71.71(-0.045) - 84.39(0.392) = 39''.95 = v_2 \\ 9''.08 + 77.86(-0.045) + 2.69(0.392) = 7''.02 = v_3 \\ 0''.28 - 15.27(-0.045) + 94.44(0.392) = 37''.91 = v_4 \\ 0''.04 - 87.36(-0.045) - 102.16(0.392) = -36.51 = v_5 \\ -3''.42 + 102.63(-0.045) + 7.72(0.392) = -4.50 = v_6 \end{cases} \ldots(4)$$

Siendo el residuo promedio que arroja el sistema: $v^2 = 6707{,}83''$, o sea: $v = 81'',9$

5.2 Ecuación condicionante

A partir del principio que dio origen al método de los mínimos cuadrados, el sistema (3) puede reformularse como se muestra en (5). Usando la notación original de Gauss:

$$\begin{aligned} [a_1a_1]dx + [a_1b_1]dy + [a_1c_1] = 0 \\ [a_1b_1]dx + [b_1b_2]dy + [b_1c_2] = 0\ldots(5) \\ [a_1c_1]dx + [b_2c_1]dy + [b_1c_2] = v^2 \end{aligned}$$

(Doerfling, 1939, pp. 585-588)[23]

La última ecuación fue llamada por Gauss *mediata* o *condicionante*, ya que no mide directamente a las magnitudes dx y dy, que en este caso interesa determinar, sino a la magnitud residual media del sistema, es decir los errores v^2. Las primeras dos ecuaciones se citan como *normales*, ya se mencionó, y son de las que se desprenden los valores dx y dy. Las ecuaciones normales se escriben a partir del sistema (4) como:

$$\begin{cases} [av] = 0 \\ [bv] = 0 \end{cases} \ldots(6)$$

De aquí que:

$$[av] = [bv] = 0\ldots(7)$$

La determinación del cuadrado del residuo $[vv] = v^2$, contenido en (5), puede obtenerse directamente al resolver las ecuaciones normales como sigue. Multiplicándolas por *v* y sumándolas, se obtiene:

$$[vv] = [av]dx + [bv]dy + [cv]$$

Pero por (7), $[av] = [bv] = 0$, luego $[vv] = [cv]$, y si se multiplican por c las ecuaciones normales de (5) y enseguida se suman, resulta: $[cv] = [ac]dx + [bc]dy + [cc]$. Se tiene finalmente:

[23] Doerfling (1939) repite las simplificaciones y notación original utilizada por Gauss en la resolución de las ecuaciones normales.

$$[vv] = [ac]dx + [bc]dy + [cc]\ldots(8)$$

Volviendo al problema resuelto por Gauss:

$$[vv] = [4186](-0.045) + [12383](0.392) - [11321] = 6654,$$

o sea: $v = 81.57''$.

Para verificar el valor residual de la compensación del sistema (4), como originalmente debió hacerlo Gauss, se reduce el sistema (3), ello se aprecia en (9):

$$\begin{aligned} 29640dx + \mathbf{14033}dy &= \mathbf{4168} \\ \mathbf{14033}dx + 33219dy &= \mathbf{12383}\ldots(3), \\ \mathbf{4168} + \mathbf{12383}dy &= 11321 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [29640]dx + [14033]dy &= 4168 \\ [26575]dy &= [10410]\ldots(9) \\ [vv] &= [6654] \end{aligned}$$

De donde $vv = 6654$ y $v = 81''.57$, como se deja ver en (4).[24]

Figura 5 — Aplicación que hizo Gauss de la regla original de los mínimos cuadrados a un conjunto de ecuaciones de condición en la solución de un problema de astronomía, *p, q* y *r* corresponden a los diferenciales $dx, dy,$ y dz.

$$\begin{aligned} (an) + (aa)p + (ab)q + (ac)r + \ldots &= 0, \\ (bn) + (ab)p + (bb)q + (bc)r + \ldots &= 0, \\ (cn) + (ac)p + (bc)q + (cc)r + \ldots &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Fuente: Gauss (1855/1821, p. 137, Nota II)

5.3 Solución del problema usando la práctica de combinación

Si se aplica al problema visto la práctica de la combinación de Mayer, los resultados en los errores dx y dy son idénticos, al menos hasta los centésimos, a los determinados por Gauss a partir de la práctica de la compensación, es decir:

$$dx = -0.04, dy = 0.39,$$

los cuales resultan del siguiente sistema de ecuaciones normales, sujetas al sistema de ecuaciones de condición (1):

$$360.98dx + 20.82dy = -5.22$$

$$318.14dx + 373.10dy = 133.62$$

Mientras que, con la práctica de compensación, como se vio: $dx = -0.045, dy = 0.392$. Siendo el valor residual de los valores de Mayer, al sustituirles en las ecuaciones de condición (1), $v^2 = 6641$, o bien el error medio $v = 81''.5$, el cual no guarda diferencia significativa respecto al determinado por Gauss, como se verifica.

[24] La pequeña diferencia numérica del residuo en (9) respecto a (4) tiene que ver con el redondeo de los coeficientes del sistema de ecuaciones que hizo Gauss, en tanto para el sistema (4) se tomaron las cantidades respectivas hasta los centésimos.

Se puede estimar que la parte que hace diferente la práctica de la compensación respecto a la práctica de combinación es, en primera instancia, el resultado que otorga la ecuación condicionante del valor que corresponde al cuadrado de los residuos, en tanto valores mínimos. Sin embargo, desde el punto de vista de los problemas de ingeniería en los que la función $\varphi(x, y)$ es conocida, el recurso del diferencial total:

$$\varphi(x, y) \to \varphi'(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0,$$

deviene fundamental, toda vez que corresponde a la tecnología matemática θ^{th} involucrada en el modelo reformulado de Castela (2009): [T, τ, θ^{th}, Θ], la cual organiza la praxeología que contiene el sistema de ecuaciones diagonalizado, como el que se aprecia en (9).

CONCLUSIONES

La geometrización de la estación de Holkensbastion fue llevada a cabo partiendo de estándares y tolerancias donde la exigencia angular tuvo por norma los centésimos de segundo, lo cual destaca un amplio progreso científico y tecnológico de la época en estas disciplinas, debido al perfeccionamiento al que se habían sometido los métodos y herramientas de cálculo, así como los propios instrumentos de observación.

El conocimiento matemático que surge después de la reformulación que hace Gauss del procedimiento al método de combinación de Mayer, es decir el principio ya citado, es colocado en el establecimiento de sistemas de ecuaciones lineales, con una notación entre corchetes que tuvo utilidad hasta mediados del siglo XX, en las que los coeficientes de las incógnitas aparecen dos veces y en posición simétrica respecto a la diagonal principal. Esta idea dio a Gauss la posibilidad de extender dicho conocimiento a una diagonalización más fina en la solución de sistemas de ecuaciones lineales de tres incógnitas, semejante, sin ser igual, al que aparece en el sistema (9), la cual sufrió un proceso lento de racionalización para su arribo al aula, terminando actualmente encapsulado en los sistemas de matrices, determinando así una praxeología matemática.

La técnica original ya comentada de Mayer, fue inmersa por Gauss en el método de los mínimos cuadrados, es decir: “establecimiento de una buena cantidad de ecuaciones de condición, combinar estas últimas partiendo del principio de dejarles el mismo signo a los coeficientes para cada incógnita, y sumarlas n veces de manera que reste un sistema de ecuaciones cuyo tamaño sea igual al número de incógnitas”. Este última fue incorporada íntegramente en la práctica de compensación, haciendo modificaciones principalmente a la primera regla, al sugerir: “Multiplíquese cada ecuación de condición por el coeficiente que en ella tenga una de las incógnitas, tomado con su propio signo”, sobre la cual se fincó el principio de la práctica de la compensación.

La transformación de la práctica de la combinación tuvo alcance, ya como método de los mínimos cuadrados de Gauss, en diferentes disciplinas como la física, astronomía, geodesia, etc., diluyéndose en las ciencias sociales contemporáneas a través de la estocástica.

Las investigaciones matemáticas relacionadas con los levantamientos geodésicos de la región de Hannover, los cuales dirigió Gauss hasta 1825, dieron lugar a las obras ya citadas, los Werke, así como a las Disquisitiones Circa Superficies Curvas publicadas en 1827. En estas últimas se percibe una teoría abstracta de la noción de *espacio,* pensado por Gauss como un *espacio físico geodésico* (Jammer, 2008, pp. 160-161), descubierto solamente mediante los procedimientos de la ingeniería,[25] el cual dejaría de lado el punto de vista newtoniano de *espacio matemático* y daría lugar a los estudios en esa dirección de Riemann.

Más que de esfuerzo físico, la vasta actividad desarrollada por Gauss durante la triangulación de Hannover lo fue también de meditación intelectual.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bell, E. T (1985). *Historia de las matemáticas.* México: Fondo de Cultura Económica, 2ª edición en español.

Bourdieu, P. (2009). El sentido práctico. México: Siglo XXI.

Breed and Hosmer (1908). *Higher surveying*. London: John Wiley and Sons Inc. Seventh edition.

Camacho, A y Sánchez, B. I. (2011). Geometrización del espacio real. Presentado en la *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática CIAEM*. Recife Brasil.

Cantoral, R., Montiel, G., y Reyes-Gasperini, D. (2015). El programa socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa: el caso de Latinoamérica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(1), 5-17 https://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1810

[25] En la Teoría de la Relatividad de Einstein los objetos se mueven en el espacio curvo sobre *geodésicas*.

Castela, C. (2009). La noción de praxeología: Un instrumento de la Teoría Antropológica de lo Didáctico posible útil para la Socioepistemología. En Lestón Patricia (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa ALME-22* (pp. 1195-1205). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Castela C., et Romo-Vázquez A. (2011). Des mathématiques a l´Automatique: Étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 31(1), 79-130.

Chevallard Y. (2007). Passé et présent de la Théorie Anthropologique du Didactique. En Ruíz-Higueras L., Estepa A., García F. J. (Eds.) *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones a la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 705-746). Jaén: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Doerfling, R., (1939). *Mathematik für Ingenieure und Techniker*. Ein Lehrbuch, mit 290 Bildern. München: Auflage Oldenburg.

Gauss, Ch. F (1855). *Méthode des moindres carrés. Mémoires sur la combinaison des observations.*(Bertrand, M. J., Trad.). Paris: Mallet Bachelier.

Gauss, Ch. F (1863). *Werke. Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*. Leipzig: vol. 8.

Jammer, M. (2008). Concepts d´espace. Una histoire des théories de l´espace en physique. Paris: Mathesis Vrin. Préface d´Albert Einstein.

Jordan, W., Reinhertz, C. y Eggert, O. (1981). *Topografía*. (Mantero, J. M., Trad.). Barcelona, España: Gustavo Gili. (Trabajo original publicado en 1890).

Shubring, G (2008). Gauss e a tábua dos logaritmos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11*(3), 383-412.

Toscano, R. (1955). *Métodos topográficos*. México: Editorial Porrúa, S. A.