

**FRAÇÕES E SUAS MÚLTIPLAS INTERPRETAÇÕES: reflexões sobre o ensino e a aprendizagem****FRACTIONS AND THEIR MULTIPLE INTERPRETATIONS: reflections on teaching and learning**Vania Sara Doneda de Oliveira¹ ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-5229-1880>Maria Ivete Basniak² ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-5172-981X>**RESUMO**

Este ensaio teórico tem como objetivo refletir sobre o ensino e a aprendizagem de frações a partir da problematização das múltiplas interpretações que envolvem esse objeto matemático, em uma perspectiva histórica e epistemológica. As frações não possuem uma definição ou concepção única, mas assumem diferentes interpretações, sendo um emaranhado de ideias com múltiplos significados, articulando-se individualmente e entre si. Nesse sentido, ao menos cinco interpretações devem ser consideradas nas discussões quanto ao ensino de frações: medida, parte-todo, quociente, razão e operador. Comumente, o ensino de frações inicia pela perspectiva do particionamento (parte-todo), o que acarreta obstáculos epistemológicos, visto que, nesta perspectiva de ensino, as regras e procedimentos sobressaem-se à compreensão dos significados, pois parte da contagem do todo e das partes consideradas utilizando números naturais sem que ocorra a escolha da unidade de medida. Com isso, a introdução de frações pela interpretação parte-todo confunde-se com as ideias e as propriedades dos números naturais. A fim de que os alunos compreendam as diferenças entre o conjunto dos números racionais em relação aos números naturais, admite-se que a introdução ao ensino de frações seja realizada pela interpretação medida, compreendida como uma relação de comparação multiplicativa entre quantidades, porque coincide com a gênese histórica das frações, que emergem da necessidade de medir quantidades contínuas.

Palavras-chave: Números Fracionários. Números Racionais. Comparação Multiplicativa.

ABSTRACT

This theoretical essay aims at reflecting on the teaching and learning fractions from multiple interpretations problematization which encompass this mathematic object in a historical and epistemological perspective. Fractions do not have a single definition or interpretations, but They assume different ones and They are a multiple meanings idea tangle that articulate individually among them. Hereupon, at least five interpretations should be considered when teaching fractions: measure, part-whole, quotient, reason, and operator. Commonly, teaching fractions starts by partitioning perspective (part-whole), what entails epistemological obstacles, because by this teaching perspective, rules and procedures stand out in understanding the meanings, by reason of it starts by counting the whole and parts considered, using natural numbers without measurement unit choice. Thereby, introduction of fractions by part-whole interpretation cause confusion with ideas and properties of natural numbers. For students understanding the differences among the elements of rational numbers regarding the natural numbers, it is assumed that introduction of fractions teaching should be carried out by interpretation of measure, understood as a multiplicative comparison relation among quantities, because coincides with the fractions historical genesis, which emerge from the necessity to measure continuous quantities.

Keywords/Palabras clave: Fractional Numbers. Rational Numbers. Multiplicative Comparison.

¹ Mestranda em Educação Matemática no Programa de Pós Graduação em Educação Matemática (PRPGEM). Professora da Secretaria de Estado da Educação do Paraná (SEED-PR). Endereço para correspondência: Rua Elias Farhat, 165, Campo Mourão, Paraná, Brasil, CEP: 87300-130. E-mail: vania.oliveira28@escola.pr.gov.br

² Doutora em Educação. Professora do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR), campus União da Vitória. Paraná, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Professora Amazônia, 713, apto 303, centro, União da Vitória, Paraná, Brasil, CEP 84600-285. E-mail: basniak2000@yahoo.com.br

INTRODUÇÃO

As discussões aqui realizadas foram motivadas pelas inquietações da primeira autora, enquanto professora de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental e Médio da rede estadual de ensino do Paraná, quanto ao ensino de frações.

O *Referencial Curricular do Paraná: Princípios, Direitos e Orientações* (Paraná, 2018), fundamentado na *Base Nacional Comum Curricular – BNCC* (Brasil, 2018), é o documento norteador para todas as instituições de ensino públicas e particulares, de Educação Infantil e de Ensino Fundamental do referido Estado, elaborado pela Secretaria de Estado de Educação - SEED-PR. Esse documento apresenta a contextualização legal para a implantação da BNCC, um breve histórico da educação paranaense, os princípios orientadores que norteiam a elaboração dos currículos escolares, e a definição dos direitos e objetivos de aprendizagem por etapas e anos de escolaridade, segundo suas especificidades.

Contudo, a SEED-PR criou outro documento voltado apenas para a rede estadual de ensino, o *Currículo da Rede Estadual Paranaense - CREP* (Paraná, 2019), que segundo a secretaria, complementa o *Referencial Curricular do Paraná*. Esse documento, apesar de ter sido elaborado em 2019 sem o conhecimento e sem a colaboração dos professores da rede estadual, só foi apresentado na semana anterior ao início das aulas em 2020, não havendo oportunidade de discussão ou contribuição. Isto gerou desconforto aos professores, porque tal documento inclui, altera e exclui elementos da BNCC.

Apesar de a BNCC destacar a importância de propiciar aos alunos tarefas que envolvam medições, para mostrar a necessidade de um novo campo numérico, no *Referencial Curricular do Paraná* (Paraná, 2018) e no CREP (Paraná, 2019), não se encontrou, explicitamente nos objetivos de aprendizagem ou conteúdos, a medição como caminho para construção do campo numérico dos números racionais. Neste último documento identifica-se apenas a associação de frações como parte-todo e como resultado de divisão. Desta forma, o ensino do conceito de frações é orientado apenas para a comparação parte-todo, que se fundamenta na contagem de um todo e na contagem das partes tomadas, utilizando números naturais, e os objetivos estão voltados para que os alunos operem algoritmos com frações, sem a devida preocupação com a construção do novo campo numérico dos números racionais.

Em contrapartida, estudos de Kieren (1976; 1980), Behr *et al.* (1983), Lamon (2012) e outros remetem à importância de ensinar diferentes interpretações de números racionais para os estudantes, de modo que se estabeleça uma base sólida para a compreensão das frações. Tal

compreensão é fundamental para o desempenho matemático do estudante durante toda sua vida escolar, além de ser essencial para o entendimento de outros conteúdos e tópicos importantes da Matemática, como Álgebra (Bailey *et al.*, 2012; Torbeyns *et al.*, 2015; Powell, 2018a, 2018b, 2019a, 2019b, 2019c, 2020; Scheffer & Powell, 2019; Kieren, 1980; Behr *et al.*, 1983; Lamon, 2012).

Para compreender frações, é necessário um rol de conceitos e relações que se articulam individualmente e entre si (Kieren, 1976; 1980). Desta forma, as frações não possuem uma definição ou concepção única, mas assumem diferentes interpretações, sendo um emaranhado de ideias com múltiplos significados, que se relacionam aos números racionais e outros conteúdos. Enquanto Kieren (1980) nomeou esses múltiplos significados ou interpretações de construtos, Behr *et al.* (1983) chamou-os de subconstrutos.

Assim objetiva-se, neste ensaio teórico, refletir sobre o ensino e a aprendizagem de frações a partir da problematização das múltiplas interpretações que envolvem esse objeto matemático, em uma perspectiva histórica e epistemológica. Conforme Barbosa (2018, p. 43), em um ensaio teórico “não há delimitação prévia de *corpus* da literatura, sendo que o pesquisador mobiliza a bibliografia conforme a necessidade para construir sua argumentação”. Desta forma, a discussão está fundamentada nos autores supracitados, os quais introduzem a problemática referente às múltiplas interpretações das frações e sua importância para o ensino e para a aprendizagem.

Primeiramente, diferenciam-se números fracionários, fração e números racionais, discute-se a imbricação entre o senso numérico e o senso fracionário, e como as características do primeiro refletem no segundo. Em seguida, apresentam-se as diferentes interpretações das frações e suas implicações para a compreensão dos números racionais. Ao final, discute-se a compreensão dessas questões para o ensino e a aprendizagem de Matemática.

INICIANDO A DISCUSSÃO: Números Fracionários, Fração e Números Racionais

No decorrer dos estudos sobre frações, considerou-se necessário esclarecer e discutir os diferentes significados dos termos *números racionais*, *números fracionários*, *fração* e *representação fracionária*. Isto porque a prática docente permite perceber que esses termos se confundem erroneamente e são associados a apenas uma interpretação, a parte-todo.

Caraça (1951) descreve que os números racionais surgiram da necessidade do homem de comparar grandezas, quando apenas os números naturais não eram suficientes para resolver

certos tipos de problemas com medidas. Assim, a importância dos números racionais é inegável (Behr *et al.*, 1983).

Para Behr *et al.* (1983, p. 91, tradução nossa), “o conceito de número racional está entre as ideias matemáticas mais complexas e importantes que as crianças encontram durante o Ensino Fundamental”. Esses autores complementam a importância desse tópico matemático sob três perspectivas: prática, psicológica e matemática. Quanto à perspectiva prática, os autores afirmam que manipular as interpretações de número racional contribui muito para o desenvolvimento da capacidade de compreender e resolver problemas da realidade. Quanto à perspectiva psicológica, os mesmos autores acreditam que a compreensão dos números racionais auxilia na evolução intelectual das crianças, expandindo as estruturas mentais necessárias ao seu desenvolvimento. Por último, sobre a perspectiva matemática, os autores afirmam que o entendimento dos números racionais constitui a base para a compreensão das operações algébricas elementares.

Assim, o ensino tradicional de frações, alicerçado apenas na concepção parte-todo, apresenta diversos obstáculos que podem comprometer o entendimento do conceito de frações, entre os quais salientamos:

- as regras e procedimentos sobressaem-se à compreensão dos significados (interpretações);
- não há necessidade de determinar uma unidade de medida;
- a introdução de frações como parte-todo (contagem) não é desvinculada das ideias e das propriedades dos números naturais, sendo desnecessária a construção do novo campo numérico - números racionais, o que dificulta a compreensão de números fracionários (Behr *et al.*, 1983; Brasil, 1998).

Além disso, muitos professores não aceitam que um número fracionário $\frac{a}{b}$ com $b \neq 0$ pode pertencer ao conjunto dos Números Irracionais, mas aceitam frações algébricas no conjunto dos números reais (Silva, 2005).

De acordo com Lamon (2012), todos os números racionais podem ser escritos na forma de fração $\frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$, mas nem toda fração $\frac{a}{b}$ representa um número racional. Como exemplo deste último caso, a autora cita $\frac{\pi}{2}$, que embora seja uma fração, ou em outras palavras, tenha representação fracionária, não é um número racional. Por outro lado, os números racionais possuem outras representações: números decimais, dízimas periódicas e porcentagem.

Assim, fração ou representação fracionária é qualquer notação do tipo $\frac{a}{b}$, com $b \neq 0$ e

$a, b \in \mathbb{R}$, e o termo número fracionário indica aquele que pode ser representado por uma classe de frações – frações equivalentes – que Silva (2005) expõe como exemplo, o número fracionário $\frac{\sqrt{2}}{2}$, podendo ser representado por uma classe de frações: $\left\{ \frac{2\sqrt{2}}{4}, \frac{\pi\sqrt{2}}{2\pi}, \dots \right\}$.

Esclarecidos esses termos e suas diferenciações, a seção que segue discute a imbricação entre os sentidos numérico e fracionário.

O SENSO NUMÉRICO E O SENSO FRACIONÁRIO

O senso numérico envolve a habilidade de aproximar e julgar o tamanho dos números, o que inclui o conhecimento sobre os números, suas operações e como utilizar esses conhecimentos para resolver problemas e calcular, além da escolha da representação numérica mais adequada dentro de um contexto e/ou para resolver problemas (Powell & Ali, 2018).

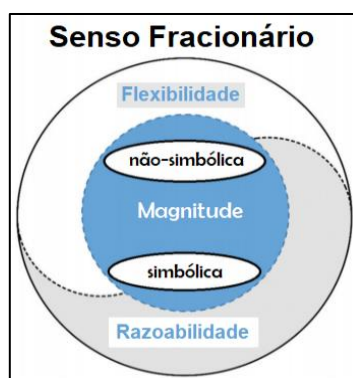
Desta forma, reconhecer a magnitude de um número é essencial para o senso numérico, e se estende para o senso fracionário, um subconjunto do senso numérico. Por isso se faz necessário definir o significado de magnitude. Powell (2019d, p. 3), fundamentado em Carraher (1996), afirma que “magnitude ou magnitude absoluta é o tamanho ou extensão de um objeto sem considerar uma comparação ou medida e a magnitude relativa é o tamanho de um objeto sujeito a comparação com um outro objeto ou medição com uma unidade de medida”. Assim, magnitude é o tamanho de um número, ou seja, a quantidade representada por ele. Essa ideia imediata e intuitiva está implicitamente relacionada à maioria dos processos matemáticos. Portanto, uma pessoa analisa a magnitude de um número sempre que estimar, ordenar, pensar sobre o resultado de um cálculo. Os números naturais e racionais têm magnitude, sendo uma característica de todos os números reais (Powell & Ali, 2018; Powell, 2019a, 2019b, 2019c).

Powell & Ali (2018) sintetizam as características do senso numérico que se refletem no senso fracionário. Eles apontam três categorias que se sobrepõem e interagem entre si: flexibilidade, razoabilidade e magnitude. A “flexibilidade se refere a conceitos, representações e estratégias de cálculo. Isso implica na habilidade de trabalhar com frações, sejam elas concebidas como relação parte-todo, quociente, medida, razão ou operador” (Powell & Ali, 2018, p. 236, tradução nossa). Inclui, também, as frações simbólicas e não-simbólicas³, possibilitando uma mudança de representação da forma escrita e visualização dessas frações para a considerada mais adequada. A razoabilidade implica na avaliação dos resultados ao

³ As magnitudes numéricas podem ser representadas de forma simbólica ou não-simbólica. A forma simbólica requer linguagem e é escrita utilizando dígitos que estejam associados a determinadas quantidades (3; 0,25; 27). A forma não simbólica não requer linguagem, utiliza pontos, figuras, objetos que representam uma quantidade de forma abstrata (Espadinha, 2015).

operar, aproximar ou comparar frações, levando a reflexões sobre como uma operação envolvendo frações pode alterar um número; ou, ainda, qual a consequência de realizar uma operação com um número fracionário, sendo este menor, maior ou igual a 1. Assim, “uma vez que o cálculo tenha sido realizado, a razoabilidade do resultado seria considerada. Como uma continuação da expressão de senso fracionário, razoabilidade chama plausibilidade para a questão” (Powell & Ali, 2018, p. 236, tradução nossa). Juntamente com flexibilidade e razoabilidade, a compreensão da magnitude é o conceito central do senso fracionário (Figura 1).

Figura 1 – Senso Fracionário



Fonte: Powell & Ali, 2018, p. 237 (tradução nossa).

Uma observação importante é que, ao pensar na magnitude de uma fração, ela deve ser reconhecida como número, por isso está no centro do senso fracionário, permeada pela flexibilidade e razoabilidade, que se interconectam.

No entanto, há vários obstáculos encontrados por professores para ensinar, e por alunos em compreender e operar com frações. Muitas pesquisas (Bailey *et al.*, 2012; Torbeyns *et al.*, 2015; Powell & Ali, 2018; Powell, 2018a; 2018b; 2019a; 2019b; 2019c) têm procurado identificar falhas no ensino e no aprendizado de frações, além de indicar diferentes abordagens com vistas a superar tais dificuldades.

Para que o senso fracionário seja instigado, o professor deve promover situações que possibilitem experimentações dos diversos significados para os números racionais, de forma que as interconexões possam ser estabelecidas e compreendidas. Powell (2018a) afirma que é necessário encontrar uma nova ontologia para melhorar a epistemologia de frações. Para isso, é necessário recorrer à Ciência Neurocognitiva e à História da Matemática (Powell, 2018a; 2018b). Isto porque os diferentes significados de frações não se resumem no conceito matemático de número racional, e uma revisão histórica e epistemológica desses significados

auxilia na compreensão dos significados das frações nas culturas antigas e no contexto em que elas foram utilizadas.

Os egípcios utilizavam frações como inverso de números inteiros, e por isso há um entendimento de que eles utilizavam, de maneira quase exclusiva, apenas frações unitárias (Roque, 2012). As frações comuns, como $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$, eram representadas por símbolos próprios. As demais frações eram representadas por números inteiros com um símbolo oval em cima, simbolizando frações $\frac{1}{n}$ (Roque, 2012). Gairín (1998) acredita que as frações egípcias surgiram do contexto de resolução de problemas de divisão igualitária de grandes quantidades de magnitudes, e por isso foi necessária a criação de um sistema de representação para quantidades não inteiras.

Diferentemente do povo egípcio, os babilônios usavam um sistema de numeração posicional de base sessenta, e para medir, utilizavam unidades, múltiplos e submúltiplos sexagesimais. Apesar de ser bem parecido com o sistema decimal, eles não tinham um sinal de separação entre a parte inteira e a fracionária. Gairín (1998, p. 38, tradução nossa) afirma que “esse sistema de representação, com o conhecimento que temos atualmente, parece confuso, pois falta um símbolo para nomear as posições vazias (nosso zero atual) e indicar a separação entre partes inteiras e não inteiras (o ponto decimal atual)”. Entretanto, ainda hoje utilizamos essas representações nas medições de horas e de ângulos.

Tanto para egípcios quanto para babilônios, as frações surgiram para registrar a medida de quantidades de terra, área, tempo, peso e impostos (Roque, 2012). Já os pitagóricos não trataram a razão entre dois números inteiros de fração ou outro tipo de número, mas a interpretaram como uma relação de tamanhos de duas magnitudes do mesmo tipo. Mais tarde, os pitagóricos admitiram que havia razões que não podiam ser expressas por números inteiros. Essas razões incomensuráveis, que hoje chamamos de números irracionais, os pitagóricos chamavam de inexprimíveis ou que não estavam certas. Entretanto, os gregos, na astronomia, usavam o sistema importado dos babilônios, o sistema sexagesimal, incluindo as frações, utilizando um grau como equivalente a sessenta minutos, e cada minuto subdividido em sessenta segundos (Gairín, 1998).

Smith (1953), citado por Gairín (1998), acredita que herdamos a forma de representar frações dos hindus, mas a barra foi introduzida pelos árabes. A ideia de frações, para os árabes, está associada a uma razão “como uma relação ou proporção de variação entre valores de diferentes moedas” (Gairín, 1998, p. 40, tradução nossa). Contudo, foi na China que as frações

decimais começaram a ser utilizadas, mas passaram mil anos até serem incorporadas e substituíssem as frações unitárias ou sexagesimais.

Portanto, das discussões acima, percebemos que, historicamente, as frações foram construídas a partir de diferentes necessidades e significações (Kieren, 1980; Berh *et al.*, 1983).

Nesse sentido, pesquisadores como Kieren (1976; 1980) e Berh *et al.* (1983) afirmam que, para aprender frações, é necessário compreender seu conceito, que é bastante complexo, pois as frações não podem ser definidas por um único significado, mas por um emaranhado de relações e de ideias interconectadas. Em outras palavras, para entender frações, é preciso conhecer suas diferentes interpretações (Kieren, 1980), as quais discutimos na subseção que segue.

AS INTERPRETAÇÕES DAS FRAÇÕES E A COMPREENSÃO DOS NÚMEROS RACIONAIS

Nesta subseção são discutidas as múltiplas interpretações das frações a partir dos estudos de Kieren (1976, 1980), Behr *et al.* (1983), Escolano (2007) e Lamon (2012).

Kieren (1976), já na década de 1970, alertava quanto ao pouco interesse na natureza dos números racionais, estando o ensino centrado apenas em procedimentos de resolução, sendo insuficiente para alicerçar a compreensão dos alunos sobre conteúdos matemáticos mais avançados, como Álgebra ou Análise. O autor salienta que, quando o ensino de frações é focado apenas na resolução de cálculos, o aluno precisa adquirir diferentes habilidades para operar, mas elas não auxiliam na compreensão dos diferentes significados das frações. Estudos e experiências docentes demonstraram que tais problemas apontados são os mesmos que o ensino de frações atual ainda não superou, cinco décadas depois. Isto pode ser constatado questionando a um estudante do Ensino Fundamental, Médio e até mesmo do Ensino Superior, sobre, por exemplo, por que, na soma de frações com denominadores iguais repete-se o denominador e soma-se os numeradores, enquanto na soma de frações com denominadores diferentes, recorre-se ao mínimo múltiplo comum? A resposta é: *Porque é a regra!*

Assim, Kieren (1976) destaca a necessidade de o aluno ter oportunidade de estudar as diferentes interpretações de frações, para que seja capaz de compreender adequadamente os aspectos algébricos que são inerentes aos conceitos de números racionais. O autor cita sete interpretações:

1. Os números racionais são frações que podem ser comparadas, adicionadas, subtraídas, etc.;

2. Os números racionais são frações decimais que formam uma extensão natural (pelo nosso sistema numérico) para os números inteiros;
3. Os números racionais são classes de equivalência de frações. Assim, $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \dots\}$ e $\{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \dots\}$ são números racionais;
4. Os números racionais são números na forma $\frac{p}{q}$, onde p, q são inteiros e $q \neq 0$. Nessa forma, os números racionais são números de “proporção”;
5. Os números racionais são operadores multiplicativos;
6. Os números racionais são elementos de um campo quociente ordenado infinito. Eles são números da forma $x = \frac{p}{q}$, onde x satisfaz a equação $qx = p$; e
7. Os números racionais são medidas ou pontos em uma reta numérica (Kieren, 1976, p. 109-110, grifos do autor, tradução nossa).

Segundo Kieren (1976, p.120, tradução nossa), “os elementos de um campo quociente são números da forma $\frac{b}{a}$ que representam soluções para as equações da forma $ax = b$, onde a e b são números inteiros”, e $a \neq 0$. No entanto, em 1980, o autor reorganizou essas sete interpretações em cinco: relação parte-todo, razão, quociente, medida e operador, defendendo a necessidade de serem compreendidas cada uma separadamente, bem como as relações entre elas, para a apropriação dos números racionais.

Ainda para Kieren (1980), as interpretações parte-todo e razão, parte-todo e quociente, e parte-todo e medida estão intimamente ligados. Sobre as interpretações parte-todo e razão, ele distingue que, enquanto nas relações parte-todo, o todo é dividido em partes iguais e destaca-se a ideia de equivalência, as relações de razão ressaltam comparações quantitativas de duas qualidades. Como exemplo desta última interpretação, cita a razão que representa o número de meninos em relação a uma classe, em que o todo inclui todos os alunos, meninos e meninas; e a parte, representa apenas os meninos. O autor conclui que as relações parte-todo são um caso especial de relações de razão, e a interpretação quociente diferencia-se da parte-todo por envolver situações diferentes. Nesta última interpretação, “a quantificação do resultado da divisão de uma quantidade em um determinado número de partes está relacionada, em última instância, à Álgebra de equações lineares” (Kieren, 1980, p. 135, tradução nossa). Sobre a interpretação medida, Kieren (1980, p. 136, grifo do autor, tradução nossa) afirma que

[...] as tarefas de medição significam a atribuição de um número a uma região (tomada aqui no sentido geral desta palavra; pode ser 1-, 2- ou 3-dimensional ou ter alguma outra característica). Isso geralmente ocorre por meio de uma iteração do processo de contagem do número de unidades inteiras utilizáveis para “cobrir” a região e, em seguida, subdividir igualmente uma unidade para fornecer o ajuste apropriado. O foco, aqui, está na unidade arbitrária e sua subdivisão, e não nas relações parte-todo.

O autor relata, ainda, que a interpretação do operador subsidia a compreensão de multiplicação de números racionais como elementos da Álgebra de funções, do tipo $f(x) = \frac{a}{b}x$, com $b \neq 0$. Behr *et al.* (1983) relacionam essa interpretação com ideias contextualizadas,

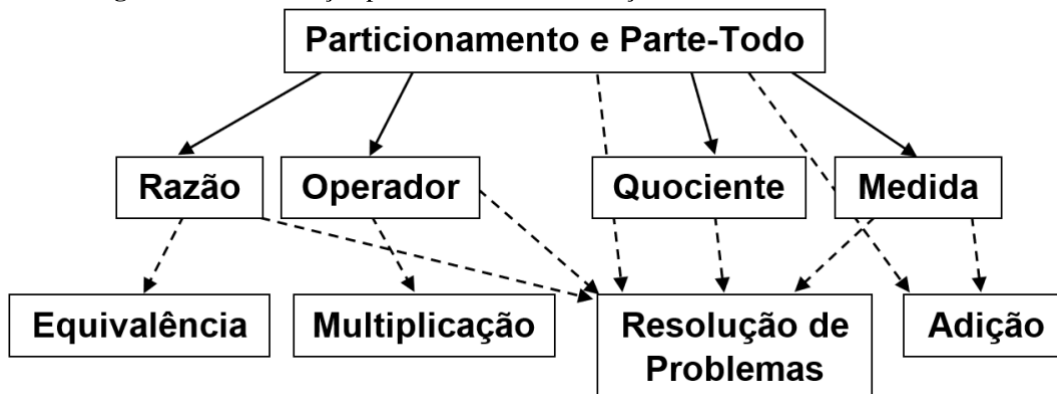
em que a medida de uma quantidade sofre algum tipo de transformação. Neste sentido, Escolano (2007, p. 56, tradução nossa) complementa que o número racional positivo expressa a medida de uma quantidade de magnitude em situações de *parte de parte*, “que quantificam a medida das quantidades de magnitude que sofrem alguma transformação”.

Portanto, Behr *et al.* (1983) redefinem e subdividem algumas das categorias apontadas por Kieren (1976), e listam sete interpretações: medida fracionária, razão, taxa, quociente, coordenada linear, decimal e operador. Não é raro que alguns autores considerem a interpretação parte-todo e medida como sinônimos. Behr *et al.* (1983, p. 100, tradução nossa), por exemplo, acreditam que a “medida do número racional representa uma reconceituação da noção de parte-todo da fração” e afirmam que

[...] parece plausível que o subconstruto parte-todo, baseado tanto em quantidades contínuas quanto discretas, represente uma construção fundamental para o desenvolvimento do conceito de número racional. É, além disso, um ponto de partida para o ensino envolvendo outros subconstrutos (Behr *et al.*, 1983, p. 101, tradução nossa).

Estes mesmos autores apresentam a Figura 2 como significado de uma conceituação prévia das relações mútuas entre as múltiplas interpretações.

Figura 2 – Conceituação preliminar das inter-relações entre os vários subconstrutos



Fonte: Behr *et al.* (1983, p. 100, tradução nossa).

Observamos na imagem que, embora os autores citem sete interpretações, na Figura 2, apenas cinco são identificadas. Isto porque, para os autores, a interpretação da fração como razão pode ser entendida como taxa e proporção. Assim, a ideia de razão está associada à comparação entre duas quantidades de mesma grandeza ou mesma natureza.

Escolano (2007, p. 53, tradução nossa), ao realizar um estudo sobre as diferentes interpretações, afirma que, para reconhecer a fração como razão, é necessário estabelecer uma comparação multiplicativa entre quantidade, e “para cada a unidades de $M1$ há b unidades de $M2$ ”.

1º Uma quantidade de magnitude, au_1 , da magnitude M_1 , é medida com a unidade de medida, u_2 , de outra quantidade de magnitude, b_2 , da magnitude M_2 . A fração como razão $ab u_1/u_2$ expressa a medida da quantidade au_1 , quando considerada como a unidade de medida (u_2), que é a unidade da magnitude M_2 , ou seja, expressa a medida de au_1 por unidade de medida (u_2) da quantidade b_2 .

2º As quantidades envolvidas atendem à condição de proporcionalidade, ou seja, que uma variação multiplicativa em uma das quantidades (au_1 da magnitude M_1 ou b_2 da magnitude M_2) produz o mesmo efeito na outra quantidade. Portanto, as quantidades envolvidas são proporcionais (Escolano, 2007, p. 53, tradução nossa).

Para Behr *et al.* (1983), uma fração pode ser, também, um quociente indicado; isto é, o resultado de uma divisão indicada em que podemos interpretar o símbolo $\frac{a}{b}$ como uma forma de escrever a operação $a \div b$. O resultado dessa divisão é uma equivalência. Exemplos: $\frac{18}{3}$ é equivalente a 6; $\frac{2}{5}$ é equivalente a 0,4. Nesse contexto, esses autores afirmam que os números racionais “[...] podem ser usados para definir equivalência, adição, multiplicação e outras propriedades de uma perspectiva puramente dedutiva; todos os algoritmos são derivados de equações através das propriedades do campo”, e ainda, que “esse nível de sofisticação geralmente requer estruturas intelectuais que ainda não estão prontas em crianças até os 14 anos porque relaciona números naturais a sistemas algébricos abstratos” (Behr *et al.*, 1983, p. 95, tradução nossa).

Portanto, para Behr *et al.* (1983), a interpretação da fração como quociente indicado pode criar obstáculos didáticos, o que ocorre, segundo Escolano (2007), se considerado apenas o uso de divisões exatas, pois os alunos podem acreditar que não existam outras frações além daquelas que resultam nesse tipo de divisão. Por isso devem ser consideradas tarefas contextualizadas, que possibilitem essa interpretação de frações como quociente indicado, não usando apenas divisões exatas, pois é a base para a construção de ideias algébricas abstratas.

Lamon (2012) admite cinco interpretações dos números racionais: comparações parte-todo com unitização, medida, operador, quociente e razão; as quais, segundo a autora, estão muito interligadas. No entanto, para a mesma autora, nem todas as interpretações fornecem acesso igual ao entendimento profundo do conceito de fração, e nenhuma interpretação é perfeita isoladamente. Para a interpretação do operador, Lamon (2012, p. 191, tradução nossa) afirma que é necessário pensar “nos números racionais como funções”.

Simplificando, a noção do operador de números racionais é sobre encolher e aumentar, contrair e expandir, aumentar e reduzir, ou multiplicar e dividir. Operadores são transformadores que

- aumentam ou diminuem segmentos de linha;
- aumentam ou diminuem o número de itens em um conjunto de objetos discretos; ou
- pegam uma figura no plano geométrico, como um triângulo ou retângulo, e a mapeiam em uma figura maior ou menor com a mesma forma (Lamon, 2012, p. 191, tradução nossa).

Lamon (2012) descreve duas interpretações para a compreensão de quociente: a divisão partitiva e a divisão por cota. Na divisão partitiva, a ideia é de uma divisão justa, igualitária; enquanto a divisão por cota é de uma taxa.

Ela ainda compreende que “uma comparação parte-todo designa um número de partes iguais de uma unidade, do número total de partes iguais em que a unidade é dividida”, e a unitização está intimamente relacionada ao conceito de frações equivalentes (Lamon, 2012, p. 145, tradução nossa). Também, ressalta que o professor, ao ensinar frações, deve fazer uso de unidades discretas e contínuas de vários tipos, e que as unidades devem ser compostas por mais de um objeto, além de instruir que não é possível realizar comparações de frações cujas unidades sejam diferentes.

Para a interpretação *medida*, a autora faz referências a pontos na reta numérica, argumentando que esta ideia de indicar a posição da fração na reta numérica auxilia os estudantes a construir a noção de densidade, de senso de ordem e magnitude dos números racionais, além de aprimorar a ação de medir na referida reta.

Esta interpretação de medida da autora difere daquela de Powell (2018a, 2019c), para quem a medida é compreendida como uma relação de comparação multiplicativa entre quantidades. Powell realiza estudos sobre aprendizagem de frações na perspectiva de medição fazendo uso das barras *Cuisenaire*. Para esse autor, ao utilizar as barras *Cuisenaire*⁴, é possível progredir de frações não-simbólicas para simbólicas, além de oportunizar que os alunos interajam com “objetos ou quantidades visíveis e tangíveis, comensuráveis e contínuos” (Powell, 2019a, p. 9, tradução nossa). Isto porque, diferentemente da perspectiva da partição (parte-todo), em que objetos discretos são contados, a perspectiva da medição permite a comparação de quantidades contínuas. Powell (2018b; 2019b) descreve o Modelo Instrucional 4A, “que consiste em quatro fases de implementação de uma abordagem pedagógica, a subordinação do ensino da matemática ao aprendizado dos alunos, utilizando barras de *Cuisenaire*” (Powell, 2018b, p. 409-410, tradução nossa). Esta “sequência consiste em uma sucessão coerente e flexível de tarefas destinadas a capacitar os alunos a educar sua consciência sobre as ideias de um tópico matemático” (Powell, 2018b, p. 410, tradução nossa), possibilitando que os alunos desenvolvam uma linguagem da relação comparativa multiplicativa entre pares de quantidades utilizando as barras *Cuisenaire*. Além do mais,

⁴ Powell (2019a; 2019c) explica que as barras *Cuisenaire* foram criadas pelo professor belga Emile Georges Cuisenaire (1891-1975), que relacionou atributos, como cores e tamanhos. É um material manipulativo composto de paralelepípedos de “quantidades mensuráveis de dez cores e comprimentos diferentes” (Powell, 2019c, p. 703). As sequências de cores e comprimentos do material físico são: branca (1 cm), vermelha (2 cm), verde-clara (3 cm), roxa (4 cm), amarela (5 cm), verde-escura (6 cm), preta (7 cm), marrom (8 cm), azul (9 cm) e laranja (10 cm). Barras de mesma cor têm o mesmo comprimento.

estudos de Powell (2018a; 2018b; 2019a; 2019b; 2019c) e Powell e Ali (2018) relatam que a neurociência cognitiva reconhece correlatos neurais comuns de frações simbólicas e não-simbólicas.

Essa diversidade de interpretações citados pelos diferentes autores (Kieren, 1976, 1980; Behr *et al.*, 1983; Escolano, 2007; Lamon, 2012) remete à necessidade de trabalhar essas variadas interpretações com os estudantes, de modo que se construa uma base sólida para a compreensão das frações.

Quanto à concepção parte-todo, Kieren (1980) considera que está intimamente ligada às interpretações razão, quociente e medida como discutimos acima; já Behr *et al.* (1983) consideram que ela é reconceituada a partir da interpretação medida do número racional; e Lamon (2012) discute essa interpretação como comparações com unitização, que deve ser estudada associada às frações equivalentes. Entretanto, apesar desses autores compreenderem que a fração como parte-todo é fundamental para a compreensão das demais interpretações, Escolano & Gairín (2005), fundamentados na didática da matemática de Brousseau (1983), alertam que a introdução ao ensino de frações como parte-todo é prejudicial para o ensino de frações, porque causa diversos obstáculos didáticos. Isto porque, normalmente, o conteúdo é introduzido a partir de uma figura dividida em partes iguais, em que algumas dessas partes estão sombreadas e, a partir disso, os alunos devem escrever a fração representada pela parte sombreada. Assim, o ensino de frações inicia a partir de um exercício baseado na dupla contagem, utilizando os números naturais, e desconsidera que

[...] contagem e medição são atividades de natureza diferente que exigem diferentes técnicas e processos. Consequentemente, números naturais e números racionais são representados por sinais diferentes, os relacionamentos e operações entre eles também têm significados diferentes, e os algoritmos de cálculo usados nos dois campos numéricos também são diferentes (Escolano & Gairín, 2005, p. 25, tradução nossa).

Portanto, a relação parte-todo não surge da necessidade de resolver um problema que não tem solução no conjunto dos números naturais, mas das necessidades educacionais. A fração parte-todo é usada apenas para representar uma situação com símbolos, não sendo usada para medir, comparar ou distribuir (Escolano, 2007).

A *relação parte-todo* aparece como consequência de um processo gradual de abandono do significado da medida com objetos reais, que inicialmente se manifesta no fato de os autores dos textos escolares optarem por evocar a medida (medida evocada) e, posteriormente, usar de maneira encoberta a magnitude de superfície, e com a ajuda de gráficos bidimensionais, perguntar “que parte de uma região é outra região” (medição aparente). Consequentemente, trata-se de um recurso didático que surge para evitar atividades de medição com objetos tangíveis, possivelmente porque os processos de medição em sala de aula geram dificuldades, como gerenciamento de materiais, controle da diversidade de resultados obtidos,

ou aparecimento de interferências no ensino do sistema métrico decimal (Escolano, 2007, p. 81, grifos do autor, tradução nossa).

Lamon (2012) corrobora a crítica de Escolano (2007) sobre o ensino de frações, focando apenas na interpretação parte-todo, chamando a atenção para a necessidade de promover situações de ensino que ultrapassem a manipulação de símbolos e permitam fazer conexões entre o significado da representação fracionária em diferentes situações. Isto porque

Ter uma compreensão madura dos números racionais implica muito mais do que ser capaz de manipular símbolos. Significa ser capaz de fazer conexões com muitas situações diferentes modeladas por esses símbolos. As comparações parte-todo não são matematicamente ou psicologicamente independentes de outros significados, mas ignorar essas outras ideias na instrução deixa uma criança com uma compreensão deficiente das próprias frações parte-todo, e com uma base empobrecida do sistema de números racionais, dos números reais, dos números complexos, e todas as ideias matemáticas e científicas superiores que se baseiam nesses sistemas de números (Lamon, 2012, p. 32-33, tradução nossa).

Experiências de docência na Educação Básica levam a concordar com os problemas salientados pela autora, os quais trazem dificuldades à compreensão dos números racionais como campo diverso dos números naturais, causados pelo ensino de frações apenas como parte-todo baseado na dupla contagem utilizando números naturais, como é discutido na seção que segue.

COMPREENSÕES E REFLEXÕES QUANTO AO ENSINO E CONSEQUENTE APRENDIZAGEM DA RELAÇÃO FRAÇÕES X NÚMEROS RACIONAIS

Os estudos e discussões abordadas neste ensaio teórico salientam a importância da compreensão das múltiplas interpretações e significados que as frações podem assumir, bem como a articulação entre elas para que o conceito de fração seja realmente compreendido e se possa minimizar o insucesso no ensino de frações.

Scheffer & Powell (2019) investigaram livros didáticos do 4º ano do Ensino Fundamental contemplados no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), e concluíram que a interpretação parte-todo é predominante em todas as obras analisadas, que os exemplos abordam a ideia de divisão do inteiro em partes iguais e utilizam alimentos. Isso pode ser um indício sobre o insucesso do ensino de frações no Brasil e que preocupa a comunidade de educadores e pesquisadores em Educação Matemática. Apesar disso, autores de livros didáticos insistem em apresentar frações aos alunos trazendo pizzas e figuras divididas.

Essa introdução do conteúdo de frações a partir de um todo que é dividido em partes iguais destoa da história da matemática, mesmo que, na prática, dificilmente seja possível reparti-lo de forma exatamente igual, como sugerem exemplos comumente encontrados nos

livros didáticos, como o da divisão de uma pizza em tantas fatias do mesmo tamanho. Além disso, as operações com frações são admitidas como regras a serem aplicadas sem associar a adição ou subtração de frações com denominadores diferentes à equivalência de frações, por exemplo, que é utilizada somente para simplificar o resultado final. Outro problema observado nos livros didáticos é que as demais representações de números racionais, como decimais e porcentagens, são trabalhadas como conteúdo à parte, desconectado das frações, como se fossem conteúdos diferentes.

Neste sentido, o entendimento de frações é fundamental para o desempenho matemático do estudante durante toda sua vida escolar, além de ser essencial para a compreensão de outros conteúdos e tópicos importantes da Matemática, como Álgebra, Funções e Equações. Assim, as interpretações das frações aplicam-se não somente aos números racionais, mas a outros campos da Matemática também, porque envolvem a compreensão de que uma mesma representação matemática possui mais de um significado. Isto requer que as frações ocupem lugar de destaque no currículo escolar do Ensino Fundamental e Médio.

Portanto, o estudo de frações pode ocasionar implicações para a compreensão de conteúdos basilares da Matemática, acarretando dificuldades na aprendizagem matemática em toda a vida escolar do aluno, desencadeando problemas também ao ensino de Matemática, uma vez que, sem compreender esses obstáculos didáticos, o professor não sabe como trabalhar com o aluno para que supere essas dificuldades.

Por isso, Powell (2018a, p. 79) reconhece que “as pesquisas em Educação Matemática não têm avançado a prática do ensino de frações e operações com frações para que os estudantes possam construir e apropriar o conhecimento com facilidade”. Este autor vai além, sendo categórico ao afirmar que a compreensão e o entendimento de frações é um marco de justiça social. Citando Ritchie e Bates (2013), Powell (2018a) argumenta que os números fracionários influenciam o futuro dos alunos quanto ao mercado de trabalho e renda familiar, tendo papel fundamental na equidade social. O autor também comenta sobre o americano Bob Moses (defensor dos direitos civis dos afrodescendentes nos anos 60 e fundador do *Algebra Project*) e seus colegas (1989, 1994), que lutam pelo direito de grupos marginalizados e estudantes afrodescendentes a terem acesso à Álgebra. Como as frações são determinantes para o aprendizado de Álgebra, consideram esse conhecimento fundamental para a equidade social.

No Quadro 1, destacamos as interpretações mais comuns citadas pelos autores, as quais exemplificamos.

Quadro 1 – Interpretação X Ideias e Significados Relacionados

Interpretação	Ideias e Significados Relacionados
Parte-todo	<p>Ideia de parte de um todo. Sendo $\frac{a}{b}$ em que a é a parte considerada e b é o todo. É necessário compreender que a é parte de um mesmo todo. Exemplo: um retângulo é dividido em 5 partes iguais e tomam-se 3 partes, temos a fração $\frac{3}{5}$.</p>
Quociente	<p>Ideia de partição e quotização. Na partição, o todo tem que ser repartido em partes iguais para um grupo definido. Exemplo: repartir 12 brigadeiros para 6 crianças. Quantos brigadeiros cada criança irá receber? Na quotização, o total de elementos já está definido, e o que precisamos encontrar é o número de grupos que podem ser feitos com o todo. Exemplo: temos 12 brigadeiros e queremos distribuir 3 brigadeiros para cada criança. Quantas crianças irão receber brigadeiros?</p>
Razão	<p>Ideia de razão ou taxa. A razão é uma comparação multiplicativa entre duas quantidades de mesma grandeza. Exemplo: em uma sala de aula de 20 meninas e 10 meninos, podemos afirmar que a razão do número de meninas para o número de meninos é $\frac{2}{1}$ ou 2:1. A taxa é uma extensão do construto de razão e é uma comparação multiplicativa entre duas quantidades de grandezas diferentes, em que a segunda grandeza depende da primeira. Exemplo: a velocidade que normalmente é expressa em quilômetro por hora ou metro por segundo.</p>
Operador	<p>Ideia de <i>encolher</i> ou <i>esticar</i>, ou ainda, <i>ampliar</i> ou <i>reduzir</i>. Está associado à ideia de função $f(x) = \frac{a}{b}x$, com $b \neq 0$. Ao ser aplicada em grandezas contínuas, tem-se a noção de <i>encolher</i> ou <i>esticar</i>, ou ainda, <i>ampliar</i> ou <i>reduzir</i>, e o todo é transformado. Exemplo: Ao calcular $\frac{2}{5}$ do número 30, aplicamos uma redução do número 30. Se calcularmos $\frac{5}{2}$ do número 30, o efeito é de ampliação.</p>
Medida	<p>Ideia de medir como ação. Medir exige comparação e ordenação. Para expressar essa magnitude, é necessária a representação fracionária, caso a medida não seja inteira; e a escolha de uma unidade de medida. Exemplo: Medir o comprimento de uma folha de papel e expressar essa medida com representação fracionária, utilizando um lápis como unidade de medida.</p>

Fonte: As autoras, 2020.

Observamos, no Quadro 1, as diferentes ideias associadas às variadas interpretações e à complexidade, necessidade e importância de que sejam discutidas com os alunos no ensino de frações. Assim, mais do que habilitar os alunos a operar com frações, temos que ofertar a eles situações com experiências variadas com as múltiplas interpretações. Por isso, o ensino e a aprendizagem de frações devem ser uma preocupação dos educadores matemáticos. Kieren (1976) já defendia que a compreensão dos números racionais era mais importante do que a simples habilidade de operar com esse sistema numérico. Isto também fica claro quando esse mesmo autor associa uma ou outra interpretação ao número real, à Álgebra de equações, à probabilidade e às estatísticas descritivas e inferenciais (Kieren, 1980).

Então, assim como Powell (2018a, 2019c), acredita-se que a introdução ao ensino de frações deve ser realizada com a interpretação das frações como medida, compreendida como uma relação de comparação multiplicativa entre quantidades, porque:

- coincide com a gênese histórica das frações, que surgiu da necessidade de medir quantidades contínuas;
- a magnitude numérica é considerada;
- há necessidade de determinar uma unidade de medida;
- há ruptura com a ideia e propriedades dos números naturais, sendo necessário um novo campo numérico dos números racionais, favorecendo a compreensão dos números fracionários.

Considera-se que cada uma das interpretações de fração é importante, e todas devem ser apresentadas e discutidas com os estudantes para construir, de maneira sólida, o conceito de números racionais como campo diverso dos números naturais, pelos motivos já apresentados.

Quanto à introdução de frações, aponta-se que a perspectiva da medição é a mais apropriada pelos motivos já elencados. No entanto, é necessário discutir as diferentes concepções das frações e suas devidas diferenciações e associações, sem serem ensinadas como conteúdos diversos como, por exemplo, a fração como quociente, que muitas vezes só é usada na transformação da fração para números decimais. Assim, a questão está em como e quando cada interpretação deve ser ensinada, o que precisa levar em consideração para a apropriação e compreensão dos alunos de que contar e medir são atividades associadas, porém distintas.

Para isso, são necessários estudos empíricos que esclareçam quando e como ensinar cada interpretação de fração, favorecendo sua compreensão, diferenciação e associação aos demais conteúdos matemáticos.

REFERÊNCIAS

- Bailey, D.; Hoard, M. K.; Nugent, L. & Geary, D. C. (2012). Competence with fractions predicts gains in mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology*, v. 113, p. 447-455.
- Barbosa, J. C. Abordagens teóricas e metodológicas na Educação Matemática: aproximações e Distanciamentos. In: Oliveira, A. M. P. de & Ramalho, M. I. Abordagens teóricas e metodológicas nas pesquisas em educação matemática [livro eletrônico]. Ortigão. Brasília: SBEM, 2018. Coleção SBEM.
- Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R. & Silver, E. A. (1983). Rational Numbers Concepts. In: Lesh, R. & Landau, M. (Eds.). *Acquisition of Mathematics Concepts and Process*. New York, NY: Academic Press.
- Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática - Secretaria de Educação Fundamental*. Brasília: MEC /SEF.
- Brasil. Ministério da Educação. (2018). *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)*. Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNC_C_20dez_site.pdf. Acesso em: 22 de fevereiro de 2020.
- Caraça, B. J. (1951). *Conceitos Fundamentais de Matemática*. Lisboa: Portugal.
- Escolano, R. V. & Gairín, J. M. S. (2005). Modelos de Medida para la Enseñanza del Número Racional en Educación Primaria. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, n. 1, p. 17-35.
- Escolano, R. V. (2007). *Enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria: un estudio desde modelos de medida y cociente*. Tese (Doutorado em Matemática), Universidad de Zaragoza.
- Espadinha, T. B. (2015). *O Desenvolvimento das Representações da Magnitude de Números Fracionários*. 2015. 72 f. – Faculdade de Psicologia, Medicina, Ciências e Letras, Universidade de Lisboa, Lisboa.
- Gairín, J. M. (1998). *Sistemas de representación de números racionales positivos - Un estudio con maestros en formación*. Tese, Universidad de Zaragoza.
- Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In: Lesh, R. (Org.). *Number and measurement: papers from a research workshop*. Columbus, Ohio: Eric/Smeac, p. 101-144.
- Kieren, T. E. (1980). The rational number construct – its elements and mechanisms. In: KIEREN, T. (ed.) *Recent Research on Number Learning*. Columbus: Eric/Smeac, p.125-150.

- Lamon, S. J. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding – essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. 3. ed. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers Mahwah.
- Paraná. Secretaria de Estado da Educação. (2018). *Referencial Curricular Do Paraná: Princípios, Direitos e Orientações*. Curitiba, PR: SEED/PR. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=1669>. Acesso em: 10 fev. 2020.
- Paraná. Secretaria de Estado da Educação. (2019). *Currículo da Rede Estadual Paranaense*. Curitiba, PR: SEED/PR. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=1669>. Acesso em: 10 fev. 2020.
- Powell, A. B. (2018a). Melhorando a epistemologia de números fracionários: Uma ontologia baseada na história e neurociência. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura - REMATEC*, v. 13, n. 29, p. 78-93.
- Powell, A. B. (2018b). Reaching back to advance: Towards a 21st-century approach to fraction knowledge with the 4A-Instructional Model. *Revista Perspectiva*, v. 36, n. 2, p. 399-420.
- Powell, A. B. (2019a). Measuring Perspective of Fraction Knowledge: Integrating Historical and Neurocognitive Findings. *ReviSeM*, n. 1, p. 1-19.
- Powell, A. B. (2019b). Aprimorando o Conhecimento dos Estudantes sobre a Magnitude da Fração: Um Estudo Preliminar com Alunos nos Anos Iniciais. *RIPEM: Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, v. 9, n. 2, p.50-68.
- Powell, A. B. (2019c). Como uma Fração Recebe seu Nome. *Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática: ReBECeM*, Cascavel, Pr, v.3, n.3, p. 700-713.
- Powell, A. B. (2019d). Aprimorando o Conhecimento dos Estudantes sobre a Magnitude da Fração: um Estudo Preliminar com Alunos nos Anos Iniciais. *XIII ENEM*, Brasil, jun. Disponível em: <https://www.sbemmatogrosso.com.br/eventos/index.php/enem/2019/paper/view/1258/1834>. Acesso em: 05 maio 2020.
- Powell, A. B. (2020). Consequências de Olhares Filosóficos e Históricos na Aprendizagem de Frações. In: *Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática - XXIV EBRAPEM*, 2020, Cascavel, Pr. Palestra de abertura. Cascavel: Universidade Estadual do Oeste do Paraná. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=K02feUaQzRA>. Data de acesso: 25 nov. 2020.
- Powell, A. B. & Ali, K. V. (2018). Design research in mathematics education: investigating a measuring approach to fraction sense. In: Custódio, J. F. et al. (Org.). *Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT): Contribuições para Pesquisa e Ensino*. São Paulo: Livraria da Física, p. 221-242.
- Roque, T. (2012). *História da matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar - versão Kindle.

- Scheffer, N. F. & Powell, A. B. (2019). Frações nos livros brasileiros do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). *Revemop*, Ouro Preto, MG, v. 1, n. 3, p. 476-503, set./dez.
- Silva, M. J. F. (2005). *Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série*. 302 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.
- Torbeyns, J.; Schneider, M.; Xin, Z. & Siegler, R. S. (2015). Bridging the gap: Fraction understanding is central to mathematics achievement in students from three different continents, *Learning and Instruction*, v. 37, p. 5-13, <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.03.002>.