



**O ENSINO DE FRAÇÕES POR MEIO DO CUBO MÁGICO  
UTILIZANDO AS UNIDADES DE ENSINO POTENCIALMENTE  
SIGNIFICATIVAS (UEPS)**

**THE TEACHING OF FRACTIONS THROUGH THE MAGIC CUBE  
USING THE POTENTIALLY MEANINGFUL TEACHING UNITS  
(PMTU)**

Bruna Ariceli Schirmann Kolling<sup>1</sup>

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-3394-799X>

Renato Francisco Merli<sup>2</sup>

 ORCID iD: [https:// https://orcid.org/0000-0002-6781-2914](https://orcid.org/0000-0002-6781-2914)

**RESUMO**

Quando se deparam com o conteúdo de frações os alunos apresentam grande dificuldade de compreensão com relação ao conteúdo. Baseado nisso, buscamos apresentar uma proposta de ensino de frações com o uso do cubo mágico, utilizando as Unidades de Ensino Potencialmente Significativas – UEPS (Moreira, 2011) como nosso aporte teórico. O Cubo Mágico pode ser utilizado como ferramenta potencialmente significativa não somente para o ensino de frações, mas também para demais conteúdos matemáticos e, além disso, apresenta interessante usabilidade para aulas inclusivas. A pesquisa pode prosseguir futuramente realizando a aplicação da proposta apresentada seguida de análise dos resultados obtidos.

**Palavras-chave:** Frações. Cubo Mágico. Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS).

**ABSTRACT**

When faced with the content of fractions, students have great difficulty of understanding the content. Based on this, we seek to present a proposal for teaching fractions using the magic cube, using the Potentially Meaningful Teaching Units – PMTU (Moreira, 2011) as our theoretical aport. The Magic Cube can be used as a potentially significant tool not only for the teaching of fractions, but also for other mathematical content and, in addition, it presents interesting usability for inclusive classes. The research

---

<sup>1</sup> Licenciada em Matemática (UTFPR). Assistente de PA na Cooperativa de Crédito SICOOB Confiança, Pato Bragado, Paraná, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Guaratuba, 1796, casa, Continental, Pato Bragado, Paraná, Brasil. CEP: 85.948-000. E-mail: [brunaariceli@gmail.com](mailto:brunaariceli@gmail.com)

<sup>2</sup> Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática (UEL), Mestre em Filosofia (UNIOESTE), Especialista em Educação a Distância (FAP) e licenciado em Matemática com ênfase em Informática (FAP). Professor do Magistério Superior na UTFPR – Toledo, Paraná, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Cristo Rei, 19, Bloco C, Sala 106, Vila Becker, Toledo, Paraná, Brasil. CEP: 85-902-490. E-mail: [renatomerli@utfpr.edu.br](mailto:renatomerli@utfpr.edu.br)

can continue in the future by carrying out the application of the proposal presented, followed by an analysis of the results obtained.

**Keywords:** Fractions. Magic Cube. Potentially Meaningful Teaching Units (PMTU).

## 1 Considerações iniciais

As frações são os pilares para o desenvolvimento de outros conteúdos matemáticos, daí sua importância no processo de aprendizagem dos alunos. Esse processo de aprendizagem perpassa o processo de ensino, o qual precisa ser efetivo e voltado para o aluno. Assim, o professor precisa compreender o que são frações.

Em um recente estudo realizado por Scheffer and Powell (2020), o qual eles analisaram uma amostra de 56 estudos entre 2013 e 2019 sobre o conhecimento de frações na educação básica, eles encontraram que em grande parte as propostas instrucionais para o ensino de frações enfatizam interpretações de parte-todo, de medida e de magnitude.

Além disso, verificaram que muitos dos trabalhos utilizavam como referencial, os trabalhos de Kieren (1976, 1980), o qual afirma a necessidade de os alunos compreenderem frações, pois o estudo da álgebra utiliza os conceitos de fração.

Outro ponto trazido por Scheffer and Powell (2020) diz respeito à predominância de materiais manipuláveis, exploração da representação Figural e da utilização de tecnologias digitais no ensino de frações. Eles salientam que trabalhos envolvendo atividades lúdicas, como dobraduras e montagem de robôs, trazem motivação na participação dos alunos.

A escolha pelo Cubo Mágico deu-se pelo fato de ser um objeto mundialmente conhecido, apreciado e manipulado por pessoas de várias gerações e idades. “O lúdico em sala de aula possibilita ao aluno superar suas dificuldades, experimentar, descobrir, inventar, aprender e conferir suas habilidades, além de estimular sua curiosidade, autoconfiança e autonomia” (Oliveira, 2011, pp. 12-13).

Em pesquisa realizada por Kolling (2019) na plataforma *Qualis* dos periódicos do quadriênio 2013-2016, procurando na área de Ensino e com classificação A1, pelos termos “ensino de frações” e “Cubo Mágico” não foi encontrado qualquer resultado. Nesse aspecto, tratamos das frações a partir dos diferentes significados dados por Kieren (1976, 1980)<sup>3</sup>, a saber:

---

<sup>3</sup> Trazendo de Flôres e Bisognin (2020). O significado parte-todo surge quando é dividido o todo em partes “iguais” e é considerado um número designado dessas partes, sendo que a divisão pode ser realizada tanto em uma grandeza contínua (comprimento, área, volume, etc.) quanto em uma grandeza discreta (coleção de objetos). A razão pode ser entendida como a comparação quantitativa entre duas qualidades e, nesse sentido, a ideia de partição não caberia para esse significado. O significado quociente pode ser visto como a quantificação do resultado da divisão de uma quantidade em um determinado número de partes. A atividade de medir significa atribuir um número a uma região, podendo essa ser unidimensional.

parte-todo, quociente, medida, razão e operador.

Nesse artigo, trazemos uma discussão sobre a utilização das Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS) aliadas com a ideia de se trabalhar de forma lúdica o ensino de frações com a utilização de um dos brinquedos mais vendidos<sup>4</sup> e famosos no mundo, se não o mais, o cubo mágico ou cubo de Rubick.

## 2 Ensino de frações e jogos

A utilização das frações na vida cotidiana tem se tornado cada vez mais rara em função do uso das tecnologias que facilitam os cálculos com números racionais. Segundo Lopes (2008, p. 5) “[...] a notação decimal ganhou a guerra da comunicação e da usabilidade para representar números ‘quebrados’, não inteiros”.

Lopes (2008) ainda faz uma crítica à forma como as frações são ensinadas para as crianças; em um levantamento feito, ele encontrou apenas quatro contextos e situações problema em livros didáticos: a) frações de uma coleção discreta, b) frações em problemas reais de partilha de bens, c) frações em cálculos de indenizações sem justa causa e, d) frações em receitas culinárias; dos quais, segundo ele, são situações de adultos e não crianças.

A falta de contexto e um ensino equivocado podem levar os estudantes a terem dificuldades em diversas outras áreas da matemática. Como apontam Scheffer and Powell (2020, p. 9), a compreensão dos números racionais fornece a base para “[...] as noções de operações algébricas elementares, do inverso multiplicativo, da porcentagem, das operações na forma decimal e fracionária, da probabilidade, do infinito, da densidade, de linha numérica e de limite”.

Considerando tal dificuldade, é necessária a busca por meios que despertem o interesse e a curiosidade dos alunos em aprender o conteúdo de frações e não ficarem “presos” aos números racionais e ao conceito de frações como parte-todo. Uma das opções que podem ser utilizadas são os jogos. De acordo com Oliveira (2011, pp. 13-14),

[...] o jogo é, por excelência, integrador, há sempre um caráter de novidade, o que é fundamental para despertar o interesse da criança, e à medida que joga ela vai conhecendo melhor, construindo

---

bidimensional, tridimensional, dentre outras. O significado operador retrata os números racionais como mecanismos que mapeiam um conjunto multiplicativamente em outro conjunto. Para maiores informações acesse: Flôres, M. V., & Bisognin, V. (2020). Os significados dos números racionais: um olhar a partir do livro didático. *Vydia - Revista Eletrônica*, 40(1), 29-43. Recuperado de: <https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/2721/2522>

<sup>4</sup> De acordo com o Site Cubo Velocidade, o Cubo Mágico foi um dos brinquedos mais vendidos do mundo, tendo como estimativa, cerca de 350 milhões de cubos vendidos desde seu lançamento internacional em 1980.

interiormente o seu mundo. Esta atividade é um dos meios propícios à construção do conhecimento.

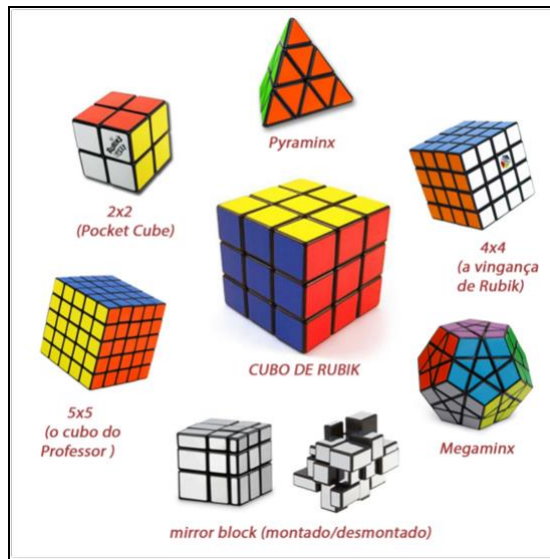
Oliveira (2011, p. 9) ainda afirma que “[...] existe uma relação estreita entre o brincar e a aprendizagem” e relata que nos tempos contemporâneos o brincar por brincar tem perdido forças, visto vários resultados positivos que foram obtidos através do ensino por meio da brincadeira/jogos. Tratando-se especificamente do conteúdo de frações, existem jogos e materiais destinados para serem usados para tal, como por exemplo, a régua de frações, o material Cuisenaire, o material dourado, fora os inúmeros jogos online que encontramos gratuitamente na internet.

Além disso, os jogos como Memória, Tangram, Dominó de Frações, Baralho, entre outros, criados para revisão e superação de dificuldades diagnosticadas com o tema frações, também fazem parte da prática realizada nos estudos, tendo em vista a necessidade de compreensão de como o sujeito aprende frações em qualquer nível e articular questões didáticas e metodológicas, dispondo de estratégias e recursos ao alcance dos estudantes (Scheffer & Powell, 2020).

Segundo Barbosa (2018, pp. 11-12), o Cubo Mágico, também conhecido como Cubo de Rubik, foi criado pelo professor Erno Rubik em 1974 com o intuito de utilizá-lo para ensinar o conteúdo de Geometria Espacial. No ano seguinte o professor requereu o registro de patente do brinquedo, mas a mesma só foi deferida em 1977 e, em 1980, o cubo passou a ser comercializado. Segundo Barbosa (2018, p. 12) “[...] já nos primeiros anos o Cubo Mágico conquistou o prêmio ‘*Toy of year*’ (‘brinquedo do ano’) promovido pela Associação Internacional da Indústria de Brinquedos”.

Existem algumas variações do Cubo Mágico tradicional (3x3), dentre elas podemos citar o Cubo (2x2), (4x4) e (5x5) que são os mais comuns, porém, possuem o mesmo objetivo do Cubo tradicional que é organizá-lo de modo que cada uma de suas faces fique com uma única cor. Além destes, existem vários outros derivados do Cubo como, Pyraminx, Megaminx e Mirror Block (Figura 1).

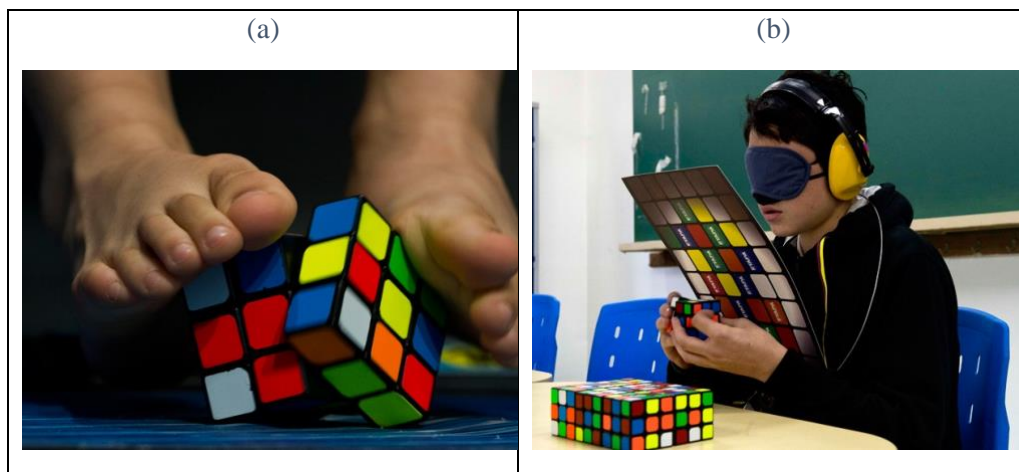
**Figura 1** – Variações do Cubo Mágico



**Fonte:** Jornalismo Junior

Além das variações do Cubo Mágico, outro fato curioso acerca do Cubo são as mais diversas competições e campeonatos. Existem Campeonatos Mundiais onde o vencedor é aquele que resolve o cubo (realizado para todos os tipos de variação) em menor tempo, manuseando-o com as mãos, com os pés, ou até mesmo com os olhos vendados, como mostram as Figuras 2a e 2b. Temos assim, uma possibilidade de utilizar o cubo como ferramenta também com alunos inclusos. Para deficientes visuais, por exemplo, já existem cubos adaptados, porém, o próprio professor consegue adaptar um Cubo, criando diferentes texturas para cada cor do Cubo Mágico.

**Figura 2** – Algumas Modalidades das disputas



**Fonte:** Portal G1

O Cubo Mágico tem se tornado cada vez mais presente no dia-a-dia das pessoas, sua imagem é vista nos mais diversos lugares e objetos, inclusive, na sala de aula. A utilização do Cubo Mágico em sala de aula já foi realizada para trabalhar com alguns conteúdos, conforme apresenta o Quadro 1. Em decorrência da ausência de trabalhos sobre Cubo Mágico e Frações na plataforma *Qualis* (mencionado anteriormente) realizamos uma pesquisa mais ampla para termos alguns dados de propostas já realizadas e também de relatos de experiência acerca da utilização do Cubo Mágico para o ensino de matemática. Para isso, realizamos uma busca no próprio *Google* e encontramos os textos a seguir.

**Quadro 1 – Conteúdos Abordados**

Título	Conteúdo	Modalidade	Autores
Ensino de análise combinatória usando o Cubo Mágico	Análise Combinatória	Artigo em evento	Rafael Werneck Cinoto David Pires Dias
O Cubo Mágico: Aplicações do algoritmo euclidiano da divisão	Divisão	Trabalho	Alecio Soares Silva Thalita Alves da Silva Wesley Balbino Barros Valdson Davi Moura Silva
O Cubo Mágico como estratégia mediadora do processamento de ensino e aprendizagem da matemática	Raciocínio lógico	Artigo	Alexandre de Almeida Vasques Ingrid Muniz de Lima Viviane Simões dos Santos
Aprendendo com o Cubo Mágico	Algoritmo	Artigo em evento	João Paulo Gonzaga Vieira Ana Paula de Souza Angela Leite Moreno
Construção tridimensional do Cubo Rubik a partir das propriedades da soma de vetores na Geogebra	Soma de Vetores	Oficina	Charles Gomes Bezerra De Brito Daniela Maurício Silva Da Costa
Cubo Mágico: Propriedade e resolução envolvendo Álgebra e Teoria dos Grupos	Álgebra e Teoria de Grupos	Dissertação	Luis Gustavo Hauff Martins Grimm
Cubo Mágico: Uma ferramenta pedagógica nas aulas de matemática	Geometria espacial, em probabilidade, frações e álgebra	Monografia	Gislaine Aparecida Roncolli

Título	Conteúdo	Modalidade	Autores
Os Benefícios do Cubo Mágico nas aulas de Matemática do Ensino Médio.	Raciocínio lógico e dos conceitos geométricos, análise combinatória, probabilidade e matrizes.	Monografia	Eudes Nascimento Silva Junior
O uso do Cubo Mágico para o Ensino de Geometria Plana e Espacial no Ensino Médio	Geometria Plana e Espacial	Dissertação	Huerllen Vicente Lemos Silva
O uso do Cubo Mágico como estratégia de Ensino de Permutação e funções	Permutação e funções	Monografia	Marlene Gorete de Araújo
Uso do Cubo Mágico como recurso pedagógico para o desenvolvimento de raciocínio lógico-matemático	Lógica	Relato de Experiência	Juliana Moreno Oliveira Gizele Geralda Parreira Luciano Duarte da Silva
Que matemática está por trás do Cubo Mágico	Análise Combinatória	Projeto de Pesquisa	Milca Pires Machado
Aprendendo Álgebra com o Cubo Mágico	Álgebra	Oficina	Waldeck Schutzer
Uma proposta de aprendizagem usando o Cubo Mágico em Malta – PB	Álgebra e Geometria	Monografia	José Vinicius do Nascimento Silva
Uma visão Matemática do Cubo Mágico	Teoria de Grupos	Dissertação	Claudia Salomão Moya
Teoria de Grupo e o Cubo Mágico	Teoria de Grupos	Dissertação	Jocemar Esteves da Silva Junior
O cubo mágico de Rubik: teoria, prática e arte.	Teoria de Grupos	Dissertação	Fernando Vieira Barbosa
Tópicos em Teoria de Grupos: O Desafio do Cubo de Rubik	Teoria de Grupos	Dissertação	Jeferson Saraiva Bezerra
Álgebra e o Cubo de Rubik	Álgebra	Dissertação	Robson Guimarães

Fonte: Kolling (2019, p. 19)

O conteúdo mais trabalhado pelos autores é Teoria dos Grupos, seguido de Álgebra e Análise Combinatória. O conteúdo para o qual nossa pesquisa é voltada, aparece apenas uma vez em uma monografia que traz o Cubo Mágico como uma ferramenta pedagógica nas aulas de matemática, porém, o mesmo estende-se a mais outros três conteúdos, trazendo cada um

deles de forma bem sucinta. Ou seja, há praticamente uma escassez no que tange a utilização do Cubo Mágico como ferramenta para o ensino de frações.

Tendo como base as pesquisas apresentadas, infere-se que o Cubo Mágico pode ser de grande valia quando utilizado como ferramenta de ensino e que agrega valores não somente para o ensino de matemática, pois de acordo com Silva (2015, p. 69) “[...] o Cubo Mágico estimula a participação, desinibindo os mais tímidos e promovendo uma maior interação social”. Santos et al. (2016, p. 2) reiteram que apoderar-se do Cubo Mágico como ferramenta lúdica de ensino é uma “[...] estratégia inovadora de sucesso na sala de aula no processo de ensino e aprendizagem da matemática”. Isso nos motiva a trazê-lo para a sala de aula visando o ensino e a aprendizagem do conteúdo de frações.

Na próxima seção, apresentaremos o aporte teórico de Aprendizagem Significativa, e Unidades de Ensino Potencialmente Significativa – UEPS.

### 3 Aprendizagem significativa

Para Moreira (2012b, p. 12) a aprendizagem que mais ocorre na escola é

[...] aquela praticamente sem significado, puramente memorística, que serve para as provas e é esquecida, apagada, logo após. Em linguagem coloquial, a aprendizagem mecânica é a conhecida decoreba, tão utilizada pelos alunos e tão incentivada na escola.

Quanto à Aprendizagem Mecânica, Moreira (2011, p. 1, tradução nossa) ainda garante que “[...] na prática, é uma grande perda de tempo”. Nesse sentido, um dos objetivos do nosso trabalho é que os alunos aprendam de maneira significativa o conteúdo de frações, que realmente saibam o que estão fazendo, não apenas decorem. De acordo com Moreira (2012b, p. 2) a Aprendizagem Significativa<sup>5</sup> é aquela em que

[...] ideias expressas simbolicamente interagem de maneira substantiva e não-arbitrária com aquilo que o aprendiz já sabe. Substantiva quer dizer não-literal, não ao pé-da-letra, e não-arbitrária significa que a interação não é com qualquer ideia prévia, mas sim com algum conhecimento especificamente relevante já existente na estrutura cognitiva do sujeito que aprende.

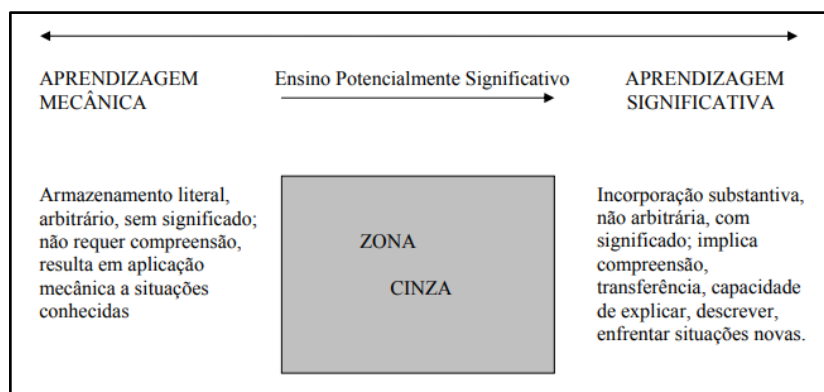
---

<sup>5</sup> Moreira se baseia na visão de David Ausubel quando fala sobre a Aprendizagem Significativa.



Moreira (2011, p. 5) ainda ressalta que “[...] a aprendizagem não é, necessariamente, ou significativa, ou mecânica”. Existe um processo de passagem de uma para a outra que não é natural. Para apresentar melhor essa ideia, o autor apresenta a Figura 33.

**Figura 3 – Zona Cinza**



**Fonte:** Moreira (2012b, p. 12)

Moreira (2012b, p. 12) explica que “[...] na prática grande parte da aprendizagem ocorre na zona intermediária desse contínuo e que um ensino potencialmente significativo pode facilitar ‘a caminhada do aluno nessa zona cinza’”.

Considerando isso, é exatamente nessa área que iremos buscar subsídios para trabalhar com o ensino de frações por meio do Cubo Mágico. Moreira (2011, p. 1, tradução nossa) define as Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS) como “[...] sendo sequências de ensino fundamentadas teoricamente, voltadas para a aprendizagem significativa, não mecânica, que podem estimular a pesquisa aplicada em ensin, aquela voltada diretamente à sala de aula”.

Moreira (2011) defendendo a utilização de Mapas Conceituais<sup>6</sup> e também de Diagramas<sup>7</sup>, apresentou a construção de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS), buscando uma forma sintetizada de apresentação dos principais aspectos das UEPS. Ele utiliza o chamado Diagrama V (Figura 4) como “[...] instrumento heurístico potencialmente facilitador de uma aprendizagem significativa” pois ao utilizá-lo,

[...] o aprendiz deverá identificar os conceitos, as teorias, os registros, as metodologias, utilizados na produção de um determinado conhecimento. Com isso, provavelmente perceberá que tal conhecimento foi produzido como resposta a uma determinada pergunta. Poderá também perceber que nas perguntas está a fonte do conhecimento humano e que se as perguntas forem diferentes o conhecimento também o será. Poderá igualmente se dar conta de que se os conceitos,

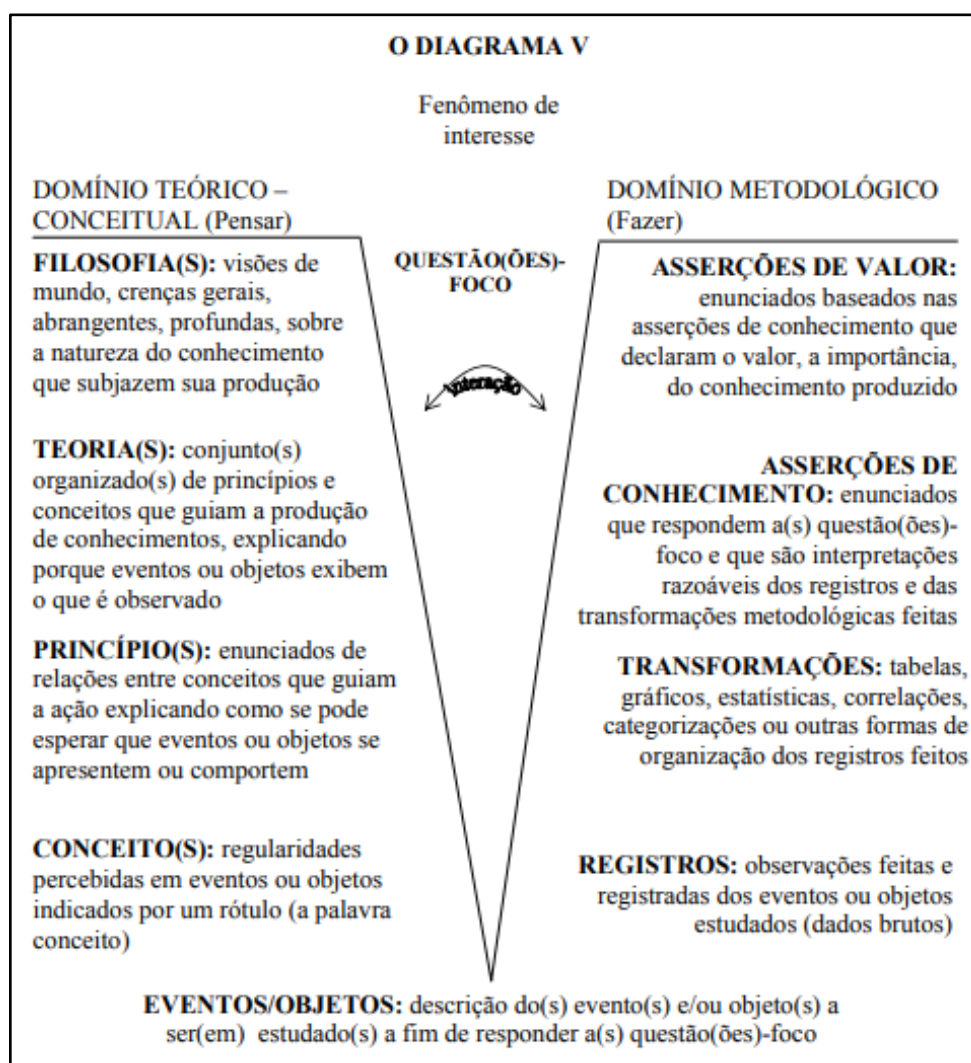
<sup>6</sup> Moreira (2012b) afirma que Mapa Conceitual é “[...] uma estratégia potencialmente facilitadora de uma aprendizagem significativa”.

<sup>7</sup> Moreira (2012a) considera o Diagrama V como um “[...] instrumento heurístico potencialmente facilitador de uma aprendizagem significativa, desde uma perspectiva epistemológica, ou seja, de conhecimento como produção humana”.

as teorias, os registros, as metodologias forem distintos serão outras as respostas (ou seja, o conhecimento) às perguntas-foco (Moreira, 2012a, p. 7).

Para exemplificar, a Figura 4 apresenta a construção de um Diagrama em V. No lado esquerdo do V encontramos a parte teórico-conceitual, que corresponde ao “pensar”, já o lado direito do V está relacionado ao domínio metodológico, que corresponde ao “fazer”. Os objetos a serem estudados encontram-se na base do V e a questão-foco está localizada no centro do V.

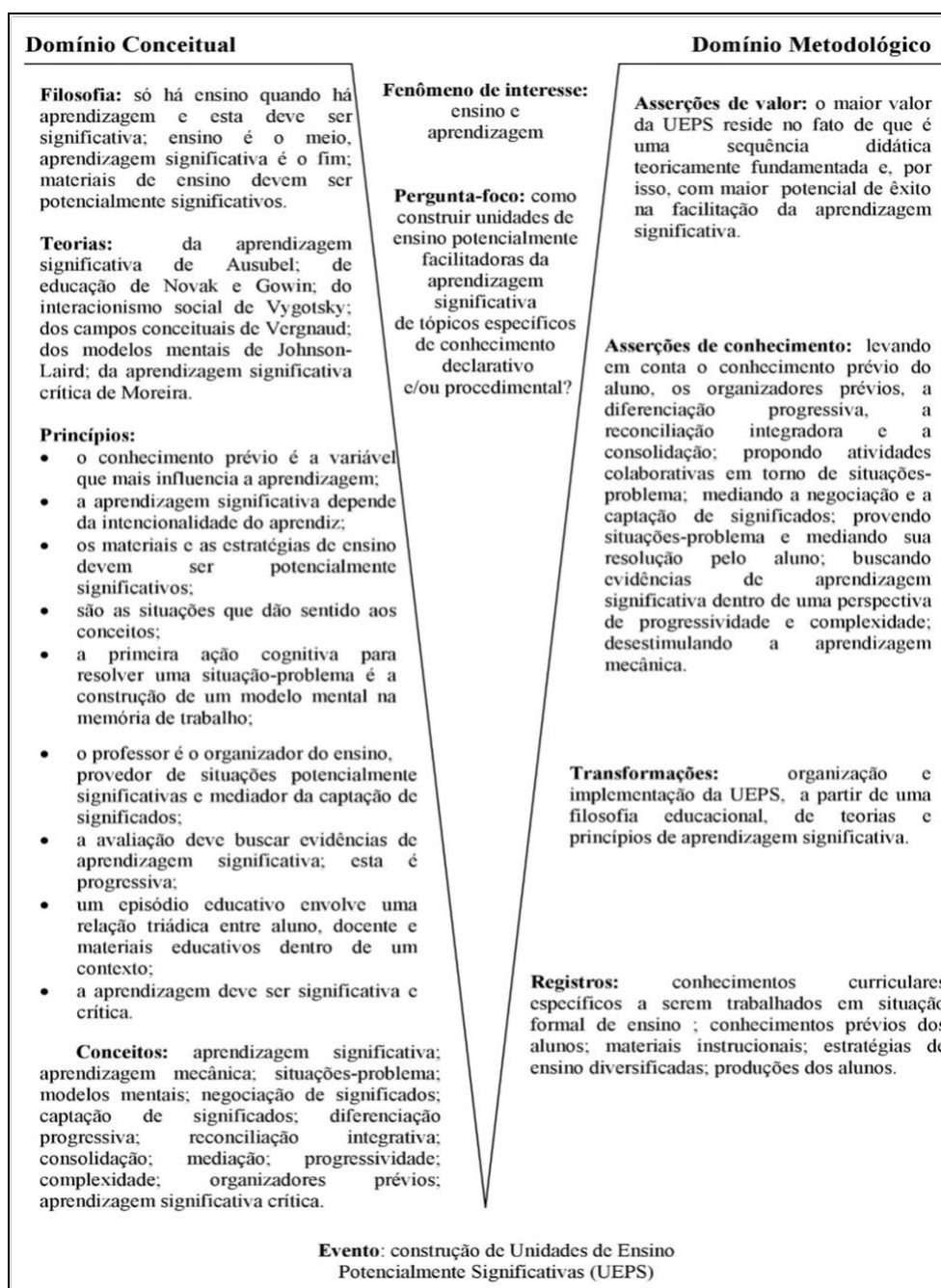
Figura 4 – Diagrama V



Fonte: Moreira (2012a, p. 3)

Para melhor relacionar o Diagrama V com o nosso estudo, temos a Figura 5 que detalha a construção de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa – UEPS.

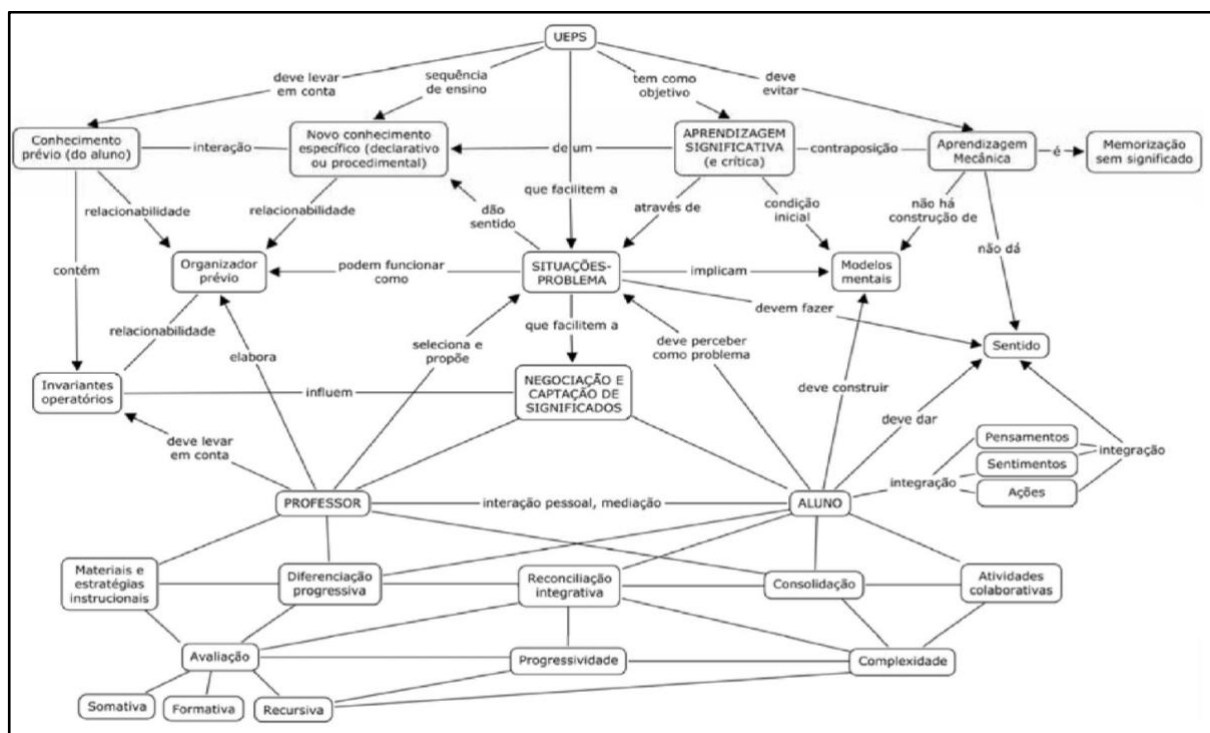
Figura 5 – Diagrama de V para Construção de uma UEPS



Fonte: Moreira (2011, p. 5, tradução nossa)

Outro tipo de representação para a construção de uma UEPS é apresentada em forma de Mapa Conceitual, conforme a Figura 6.

Figura 6 – Construção de uma UEPS por Mapa Conceitual



Fonte: Moreira (2011, p. 6, tradução nossa)

O Mapa Conceitual<sup>8</sup>, apresentado na Figura 5, mostra alguns conceitos extremamente importantes para a Aprendizagem Significativa. Segundo Moreira (2011) os *Invariantes Operacionais* que podem ser do tipo teoremas-em-ação<sup>9</sup>, ou seja, operações que os estudantes entendem como verdadeiro; os conceitos-em-ação que são os pensamentos considerados relevantes. Outro conceito importante é a *Diferenciação Progressiva* que trata do processo que acontece quando se tem uma ideia mais geral de algum assunto e que, progressivamente, vai se diferenciando de ideias mais específicas.

A *Reconciliação Integrativa* é a reorganização e integração de alguns conceitos já aprendidos com novos conceitos. Os *organizadores prévios* podem ser considerados uma espécie de ponte entre os conhecimentos que o aluno já tem com aqueles que deve atingir.

Para a construção de uma UEPS, além da atenção que deve ser dada aos princípios apresentados no Diagrama da Figura 5, existem também alguns passos que devem ser seguidos. Moreira (2011, tradução nossa) os apresenta de maneira detalhada.

1. Definir o tópico específico a ser abordado;

<sup>8</sup> Técnica desenvolvida por Joseph Novak.

<sup>9</sup> Moreira trás os teoremas-em-ação e conceitos-em-ação baseando-se na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud.

2. Criar/propor situação(ções) que levem o aluno a externalizar os conhecimentos prévios;
3. Propor situações-problema em nível bem introdutório;
4. Apresentar o conhecimento a ser ensinado;
5. Retomar aspectos mais gerais em nível mais alto de complexidade;
6. Retomar as características mais relevantes do conteúdo em questão;
7. A avaliação acontece de maneira somativa individual a partir do sexto passo;
8. A UEPS somente será considerada exitosa se os alunos conseguirem compreender, explicar e resolver as situações-problema.

Esses serão os passos que seguiremos para montar nossa proposta de ensino e aprendizagem. Em uma experiência, Nunes (2015) utilizou uma UEPS para trabalhar estatística com alunos do Ensino Médio e, em suas conclusões sobre as atividades realizadas, afirmou que

[...] a participação de forma mais ativa dos estudantes favoreceu o processo de ensino e aprendizagem e, por consequência, proporcionou a construção de um conhecimento mais rico em significados. A partir da análise dos dados produzidos, observou-se que o material construído, fundamentado nos conhecimentos prévios dos alunos, constitui-se uma alternativa muito rica, eficiente e viável no processo de construção do conhecimento (Nunes, 2015, p. 75).

Diferente de Nunes (2015), Santos and Rosa (2018) utilizaram uma UEPS para trabalhar o mesmo conteúdo, porém, com o Ensino Fundamental. As autoras também tiveram um aproveitamento positivo após a aplicação das atividades, afirmando que a UEPS em termos didáticos,

[...] se mostrou uma importante ferramenta favorecendo a motivação, o envolvimento, a participação e a busca por conhecimentos. Em relação aos objetivos educacionais, a UEPS demonstrou sua potencialidade em termos de ativação dos conhecimentos prévios e de confronto entre os novos conhecimentos (Santos & Rosa, 2018, p. 70).

A partir desses resultados positivos, na próxima seção, apresentamos uma das cinco UEPS já elaboradas para o ensino de frações utilizando o Cubo Mágico em Kolling (2019).

#### 4 Proposta de ensino

Após realizar um estudo sobre a abordagem do ensino de frações nos Livros Didáticos, detectou-se uma lacuna com relação a conceitualização do conteúdo e, o fato do ensino estar sendo voltado, em grande parte dos casos, apenas para a fração como parte-todo, deixando de lado, suas outras quatro interpretações que são: número, medida, quociente e operador multiplicativo.

Considerando isso, Kolling (2019) apresentou cinco propostas de ensino baseadas em Unidades de Ensino Potencialmente Significativas - UEPS sobre frações, cada uma voltada a uma das interpretações já mencionadas. Todas as propostas utilizaram o Cubo Mágico para o ensino de frações.

Sucintamente serão apresentadas cada uma dessas propostas, dando uma ênfase maior a interpretação de fração como número.

*Fração como parte-todo:* Na UEPS elaborada para o ensino de frações focada na interpretação parte-todo, Kolling (2019) optou por utilizar o Cubo Mágico de forma online, visto que, dependendo da quantidade de alunos em determinada turma pode haver a dificuldade de aquisição de um cubo mágico para cada aluno manusear. Tal UEPS, parte do pressuposto que os alunos ainda não conheçam as frações e a partir da face de um cubo o(a) professor(a) pode introduzir o conteúdo e posteriormente pedir aos alunos para que deem os comandos no *software* até determinada face do cubo representar uma fração específica, como por exemplo,  $\frac{3}{9}$  de quadrinhos verdes, alterando sempre a fração e a cor. Os alunos deverão printar cada representação para que haja um material a ser avaliado. Posteriormente, os alunos receberão um passo a passo para que consigam manusear o Cubo de modo a atingir a meta do mesmo, que é deixar cada uma das faces com apenas uma cor. A cada passo os alunos serão questionados sobre as frações presentes no momento, a resposta a essas questões também serão utilizadas como avaliação dos alunos.

*Fração como medida:* Nesta UEPS as frações como medida foram relacionadas com probabilidade. A escolha foi de utilizar uma réplica gigante de um Cubo Mágico, confeccionado pelos próprios alunos, este Cubo é arremessado e com base nesses arremessos surgem alguns questionamentos, como por exemplo, qual a chance de a cor vermelha ficar em cima? A partir disso, a explicação que a probabilidade de algo acontecer pode ser representada por uma fração. Dando sequência a atividade, agora com dois cubos normais organizados com uma face de cada cor. Estes cubos são depositados em uma caixa e volta-se a fazer os mesmos questionamentos

da atividade anterior. A atividade pode ir aumentando de dificuldade com o aumento do número de Cubos.

*Fração como quociente:* Para essa UEPS, a ideia inicial é que os alunos já tenham conhecimento sobre a soma, subtração e multiplicação para então aprenderem a multiplicação que é de fato, a interpretação de fração como quociente. Tal atividade será realizada em grupos identificados por A, B e C. Define-se uma cor e então os grupos A e B escolhem uma face do Cubo para apresentar ao grupo C qual a fração encontrada que representa determinada cor na face escolhida para que o grupo C, tendo as frações dadas pelo grupo A e B realize as operações de soma, subtração e multiplicação. Seguindo a atividade, após explicação sobre o processo de divisão de frações agora os grupos devem repetir a atividade realizando a operação de divisão.

*Fração como operador multiplicativo:* Esta interpretação de frações foi relacionada a escalas com o auxílio de imagem das variações que existem do Cubo Mágico (2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6, 7x7...).

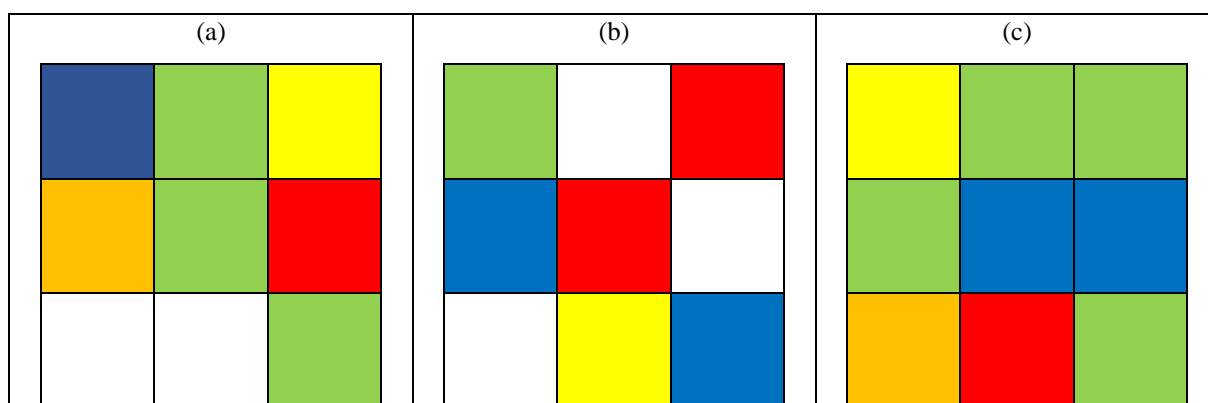
*Fração como número:*

*Objetivo:* ensinar aos alunos a interpretação de frações como número utilizando o Cubo Mágico.

*Sequência:*

1. *Tópico Abordado:* Considerando que os alunos já tenham conhecimento do que é uma fração, a proposta da sequência é utilizar o Cubo Mágico como instrumento para que os alunos consigam interpretar como número. O trabalho é proposto em três grupos, ou seja, temos três Cubos Mágicos em sala de aula (conforme citado anteriormente, a atividade pode se estender a mais grupos ou até mesmo de forma individual).
2. *Situação Inicial:* Entrega-se a cada um dos grupos um Cubo Mágico de modo que esteja embaralhado. Inicialmente, cada grupo deve escolher aleatoriamente uma face do cubo. Após cada grupo ter escolhido uma face, pede-se para que um aluno de cada grupo apresente a face para o restante da sala e deixe o Cubo Mágico em cima de uma mesa disposta em frente ao quadro. Tendo as três faces escolhidas e apresentadas a turma, escolhe-se então uma cor. Para melhor exemplificar, apresentamos nas Figuras 7a, 7b e 7c três faces montadas arbitrariamente e consideramos a cor verde, como a escolhida.

**Figura 7** – Possíveis faces escolhidas pelos alunos



Fonte: Kolling (2019, p. 34)

Pede-se para que aos alunos representem essas faces em seus cadernos e escrevam ao lado de cada uma delas a fração que representa os quadradinhos verdes com relação a cada uma das três faces. Supondo que eles encontrem as frações corretas, ou seja, para as faces a, b e c temos respectivamente  $\frac{3}{9}$ ,  $\frac{1}{9}$  e  $\frac{4}{9}$ .

3. *Situação – Problema introdutório:* Cada grupo deve organizar essas três faces de maneira crescente e explicar aos outros grupos como chegaram a essa ordem. Essa atividade deve se repetir alterando as cores. No decorrer da atividade alguns questionamentos também devem aparecer, como por exemplo:
  - De que maneira a face do Cubo Mágico deve estar organizado para que represente a menor fração de quadradinhos verdes (por exemplo) com relação a face?
  - De que maneira a face do Cubo Mágico deve estar organizado para que represente a maior fração de quadradinhos verdes (por exemplo) com relação a face?
4. *As frações como número:* Nesse momento, cabe ao professor realizar uma breve exposição oral sobre o tratamento das frações como número.
5. *Situação – Problema em nível mais alto de complexidade:* Os alunos devem realizar a mesma atividade proposta anteriormente, porém, considerando agora não apenas uma das faces, mas sim o Cubo Todo. Nesse momento é interessante que o cubo esteja marcado para que possa ser possível analisar e coletar os dados de todas as faces. Para melhor exemplificar, vamos utilizar as mesmas faces da atividade anterior (Figuras 7a, 7b e 7c). Encontramos respectivamente  $\frac{3}{27}$ ,  $\frac{1}{27}$  e  $\frac{4}{27}$  de



quadrinhos verdes na face com relação ao Cubo. Os alunos devem registrar todas as frações que representam os quadrinhos de todas as cores, uma a uma, em relação ao Cubo Mágico conforme a Tabela 1, que foi preenchida de forma arbitrária.

**Tabela 1** – Possíveis frações encontradas

	<i>Face 1</i>	<i>Face 2</i>	<i>Face 3</i>	<i>Face 4</i>	<i>Face 5</i>	<i>Face 6</i>
<i>Azul</i>	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	0	$\frac{2}{9}$
<i>Amarelo</i>	$\frac{3}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	0
<i>Branco</i>	0	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
<i>Laranjada</i>	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{3}{9}$	0
<i>Verde</i>	$\frac{3}{9}$	0	$\frac{3}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
<i>Vermelho</i>	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{5}{9}$

**Fonte:** Kolling (2019, p. 35)

Com base no preenchimento da Tabela, os alunos devem novamente colocar as frações em ordem crescente. Posteriormente os Cubos serão comparados entre si utilizando as frações encontradas. Eles devem buscar, por exemplo, dentre os 3 Cubos, qual a face que tem a maior representação de quadrinhos vermelhos com relação ao cubo.

6. *Revisão:* Cabe ao professor nesse momento retomar os aspectos mais importantes sobre as frações como números, podendo por exemplo, comparar as frações encontradas na primeira atividade com as encontradas na segunda, visto que, até o momento, os alunos só compararam frações com o mesmo denominador.
7. *Avaliação*<sup>10</sup>: A avaliação dos alunos é realizada de maneira formativa, ou seja, serão considerados os registros feitos pelos alunos, bem como realizados pelo professor e também, através de uma avaliação somativa individual com questões/situações.
8. *Avaliação da UEPS:* Esta se dará de acordo com evidências identificadas sobre aspectos que apresentem uma aprendizagem significativa por parte dos alunos.

<sup>10</sup> De acordo com Moreira (2011) a avaliação da aprendizagem através da UEPS deve ser feita ao longo de sua implementação, registrando tudo que possa ser considerado evidência de aprendizagem significativa do conteúdo trabalhado; além disso, deve haver uma avaliação somativa individual após o sexto passo, na qual deverão ser propostas questões/situações que impliquem compreensão, que evidenciem captação de significados e, idealmente, alguma capacidade de transferência; tais questões/situações deverão ser previamente validadas por cinco professores experientes na matéria de ensino; a avaliação do desempenho do aluno na UEPS deverá estar baseada, em pé de igualdade, tanto na avaliação formativa (situações, tarefas resolvidas colaborativamente, registros do professor) como na avaliação somativa.

Assim, essas Unidades de Ensino Potencialmente Significativas – UEPS buscam criar um ambiente lúdico de ensino de frações utilizando o Cubo Mágico. E mais do que isso, procura ensinar os cinco tipos de fração apresentados por Campos et al. (2006), ou seja, número, parte-todo, medida, quociente e operador multiplicativo.

## **5 Considerações finais**

Nosso ponto de partida para a presente pesquisa era verificar a possibilidade de elaborar uma sequência lúdica para o ensino de frações. O lúdico escolhido para elaborar tal sequência foi o Cubo Mágico, considerado um objeto/brinquedo/jogo que prende a atenção e que é mundialmente conhecido. Após realizar um levantamento bibliográfico sobre a utilização do mesmo como ferramenta de ensino, percebemos a existência de algumas propostas e também de algumas experiências que trouxeram resultados positivos e satisfatórios. Esses resultados nos motivaram ainda mais na decisão de continuar utilizando o Cubo Mágico enquanto material para o ensino de frações.

O Cubo Mágico possui uma usabilidade muito vasta para o ensino. Percebemos por meio da pesquisa bibliográfica realizada que o Cubo pode ser utilizado não somente para o ensino de frações, mas também para outros conteúdos matemáticos. Além disso, é uma alternativa para ser utilizado não somente na Educação Básica, mas também no Ensino Superior. Sua possibilidade como ferramenta de ensino para alunos inclusos também pode ser viabilizada.

A partir do referencial teórico, evidenciamos, com base em outros autores, que uma das grandes falhas no processo de ensino do conteúdo de frações está relacionada à parte conceitual, que normalmente está voltada apenas para o conceito de fração como parte-todo, deixando de lado o entendimento de frações como: número, medida, quociente e operador multiplicativo.

A respeito da aprendizagem, buscamos na Aprendizagem Significativa, meios de compreender como passar da aprendizagem mecânica para uma aprendizagem que seja potencialmente significativa. Nesse contexto, a utilização das Unidades de Ensino Potencialmente Significativas – UEPS puderam nos direcionar na elaboração de propostas de ensino que atendessem aos critérios de apresentar as diferentes compreensões de fração.

Assim, elaboramos cinco<sup>11</sup> propostas (mas por questão de espaço apresentamos apenas uma) para o ensino de frações tendo o Cubo Mágico como ferramenta de ensino e as Unidades de Ensino Potencialmente Significativas – UEPS foram nosso guia. A utilização das UEPS permitiram, utilizando o Cubo Mágico, a oportunidade de trabalhar com frações englobando as diferentes perspectivas do conceito de fração, cobrindo assim, uma das possíveis lacunas existentes no processo de ensino deste conteúdo. Vale ressaltar que cada uma das propostas elaboradas apresenta as frações com uma de suas nuances, visando assim apresentar essa diferença aos alunos. As sequências podem ser utilizadas em qualquer ordem, já que não existe uma prioridade de ensino em relação às diferentes formas de compreender as frações.

Destacamos que as sequências foram elaboradas com o intuito de auxiliar professores que buscam novas metodologias de ensino e estão dispostos a trabalhar com aulas diferenciadas. Além disso, acreditamos que o uso dessas sequências em consonância com o Cubo Mágico podem ser motivadores para os alunos, tornando a aprendizagem menos complicada e mais prazerosa. Esperamos que os alunos demonstrem interesse e consigam compreender de forma significativa os conteúdos relacionados a frações que estão presentes nas sequências didáticas elaboradas.

Uma das implicações com a qual nos deparamos no decorrer da pesquisa foi o custo para trabalhar com Cubo Mágico, visto que, normalmente as turmas são numerosas. Justamente para resolver esse problema, nossas UEPS foram elaboradas pensando na utilização de três Cubos Mágicos por turma. Além disso, pensamos na utilização de tecnologias digitais (como *smartphones*), o que reduz consideravelmente o gasto para trabalhar com tal. Caso exista a possibilidade de cada aluno ter seu próprio Cubo Mágico para manusear, as propostas podem ser adaptadas.

Por fim, acreditamos que o Cubo Mágico pode ser um material potencialmente significativo com inúmeras possibilidades. Em nosso trabalho, apresentamos apenas uma, não aplicando a proposta. Assim, como sugestão de uma pesquisa futura, pensamos que seja importante aplicar a sequência e realizar uma análise a partir dos dados coletados, afim de sugerir melhorias.

## AGRADECIMENTOS

---

<sup>11</sup> Todas as propostas podem ser vistas em Kolling (2019).

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

## REFERÊNCIAS

- Barbosa, F. V. (2018). *O Cubo Mágico de Rubik: teoria, prática e arte*. (Mestrado em Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT). Universidade de Brasília, Brasília – DF. Recuperado de: <https://repositorio.unb.br/handle/10482/32008>
- Campos, T. M. M., Magina, S., & Nunes, T. (2006). O professor polivalente e a fração: conceitos e estratégias de ensino. *Educação Matemática Pesquisa*, 8(1), 125-136. Recuperado de: <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/viewFile/545/433>
- Flôres, M. V., & Bisognin, V. (2020). OS SIGNIFICADOS DOS NÚMEROS RACIONAIS: UM OLHAR A PARTIR DO LIVRO DIDÁTICO. *Vydia - Revista Eletrônica*, 40(1), 29-43. Recuperado de: <https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/2721/2522>
- Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In: *Anais de 1 Workshop on Number and measurement*. Columbus, Ohio: ERIC/MEAC. Recuperado de: <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED120027.pdf>.
- Kieren, T. E. (1980). Personal Knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development. In M. Behr & J. Hiebert (Eds.). *Numbers Concepts and Operations in the Middle Grades* (1 ed., Vol. 2, pp. 162-181). Lawrence Erlbaum Associates.
- Kolling, B. A. S. (2019). *O ensino de frações por meio do cubo mágico*. (Trabalho de Conclusão de Curso em Licenciatura em Matemática). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo. Recuperado de: <http://repositorio.roca.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/12653>
- Lopes, A. J. (2008). O Que Nossos Alunos Podem Estar Deixando de Aprender Sobre Frações, Quando Tentamos lhes Ensinar Frações. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, 21(31), 1-22. Recuperado de: <https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/2102>
- Moreira, M. A. (2011). Unidades de enseñanza potencialmente significativas. *Aprendizagem Significativa em Revista*, 1(2), 43-63. Recuperado de: [http://www.if.ufrgs.br/asr/artigos/Artigo\\_ID10/v1\\_n2\\_a2011.pdf](http://www.if.ufrgs.br/asr/artigos/Artigo_ID10/v1_n2_a2011.pdf)
- Moreira, M. A. (2012a). Diagrama V e Aprendizagem Significativa. *Revista Chilena de Educação Científica*, 6(2), 3-12. Recuperado de: <http://moreira.if.ufrgs.br/DIAGRAMASpor.pdf>
- Moreira, M. A. (2012b). O que é afinal aprendizagem significativa? *Curriculum*, 25, 29-56. Recuperado de: <http://hdl.handle.net/10183/96956>
- Nunes, C. d. S. (2015). *Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS) para o ensino de estatística na Educação Básica*. (Mestrado em Programa de Pós-Graduação em

- Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Luterana do Brasil. Recuperado de: <http://www.ppgecim.ulbra.br/teses/index.php/ppgecim/article/view/218/210>
- Oliveira, J. R. d. (2011). *O prazer de aprender brincando*. (Especialização em Psicopedagogia em Programa de Pós-Graduação Lato “Sensu” em Psicopedagogia). Universidade Candido Mendes. Recuperado de: [http://www.avm.edu.br/docpdf/monografias\\_publicadas/N203980.pdf](http://www.avm.edu.br/docpdf/monografias_publicadas/N203980.pdf)
- Santos, S. M. d., & Rosa, C. T. W. d. (2018). UEPS para o ensino de Estatística na Educação Básica. *Produtos Educacionais do PPGECEM, 1*, 1-75. Recuperado de: [https://www.upf.br/uploads/Conteudo/produtos-educacionais/Scheila\\_Produto.pdf](https://www.upf.br/uploads/Conteudo/produtos-educacionais/Scheila_Produto.pdf)
- Santos, V. S. d., Vasques, A. d. A., & Lima, I. M. (2016). O Cubo Mágico como estratégia mediadora do processo de ensino e aprendizagem da matemática. *Madre Ciência Educação, 1*(1), 1-11. Recuperado de: <http://madretereza.edu.br/revista/index.php/educacao/article/view/8>
- Scheffer, N., & Powell, A. (2020). Frações na Educação Básica: o que revelam as pesquisas publicadas no Brasil de 2013 a 2019. *Revista Paranaense De Educação Matemática, 9*(20), 8-37. Recuperado de: <https://doi.org/10.33871/22385800.2020.9.20.8-37>
- Silva, J. V. d. N. (2015). *Uma proposta de aprendizagem usando o cubo mágico em Malta – PB*. (Mestrado em Matemática em Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática - PROFMAT). Universidade Estadual da Paraíba. Recuperado de: <http://tede.bc.uepb.edu.br/tede/jspui/handle/tede/2390>