Revista de História da Educação Matemática
HISTEMAT

ISSN: 2447-6447 **Submetido**: 05/03/2022
Aprovado: 31/03/2022

HISTORIA DE LA MATEMÁTICA PARA EL DISEÑO DE TAREAS: caracterización de conexiones intramatemáticas asociadas a la clasificación de los grupos de orden cuatro

HISTORY OF MATHEMATICS FOR TASK DESING: characterization of intra-mathematical connections associated with the classification of the groups of order four

Erika Zubillaga-Guerrero[1]
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-4171-5072

Flor Monserrat Rodríguez-Vásquez[2]
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-9596-4253

RESUMEN

Las conexiones matemáticas son competencias necesarias que se deben desarrollar en los estudiantes para la comprensión de conceptos en matemáticas en cualquier nivel educativo. Además, la historia de la matemática es un contexto del que emanan conexiones para la construcción de conocimiento. Por lo cual, en este artículo se presentan algunas conexiones intramatemáticas identificadas al resolver tareas sobre la clasificación de los grupos de orden cuatro fundamentada en un análisis histórico y epistemológico del concepto de grupos isomorfos. La investigación es cualitativa y su diseño es un estudio de caso. Para la recolección de datos se aplicó una entrevista. Los datos se analizaron desde un análisis cualitativo de texto. Los resultados indican que existen, por lo menos, tres conexiones asociadas a los conceptos de grupo, isomorfismo y grupos isomorfos de los siguientes tipos que son comparación a través de características comunes, derivación, procedimiento y relación parte-todo. Se concluye que las tareas diseñadas con una fundamentación histórica favorecen para la apreciación conectada de los conceptos y resultados matemáticos en relación con los problemas e ideas que los generaron, haciendo explícitas las conexiones matemáticas.
Palabras clave: Investigación histórica. Conexiones matemáticas. Grupos isomorfos. Comprensión conceptual. Educación Matemática.

ABSTRACT

Mathematical connections are necessary competencies to be developed in students for the understanding of concepts in mathematics at any educational level. In addition, the history of mathematics is a context from which connections emanate for the construction of knowledge. Therefore, this paper presents some intra-mathematical connections identified when solving tasks on the classification of groups of order four based on a historical and epistemological analysis of the concept of isomorphic groups. The research is qualitative, and its design is a case study. An interview was used for data collection. The data were analyzed from qualitative text analysis. The results indicate that there are at least three connections associated with the concepts of group, isomorphism, and isomorphic groups of the following types which are comparison through common features, derivation, procedure,

[1] Doctora en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa por la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro). Profesora de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro), Chilpancingo, Guerrero, México. Dirección postal: Av. Lázaro Cárdenas, S/N, Colonia Haciendita, Chilpancingo, Guerrero, México, CP. 39070. E-mail: eguerrero@uagro.mx.
[2] Doctora por la Universidad de Salamanca (USAL). Profesora de Tiempo Completo de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro), Chilpancingo, Guerrero, México. Dirección postal: Av. Lázaro Cárdenas S/N, Colonia Haciendita, Chilpancingo, Guerrero, México, CP. 39070. E-mail: flor.rodriguez@uagro.mx.

and part-whole relations. It is concluded that the tasks designed with a historical foundation favor the connected appreciation of mathematical concepts and results in relation to the problems and ideas that generated them, making mathematical connections explicit.
Keywords: Historical research. Mathematical connections. Isomorphic groups. Conceptual understanding. Mathematics Education.

INTRODUCCIÓN

La importancia de la integración de la historia de las matemáticas en los procesos de su enseñanza y aprendizaje comprende diversos argumentos que consideran una mejora en la aprehensión de las matemáticas por parte de los estudiantes, así como el fortalecimiento del conocimiento del contenido por parte de los profesores. Por ejemplo, los resultados de Gençkaya y Tan-Şişman (2021) muestran que los profesores reconocen que el uso de la historia posibilita en los estudiantes experiencias de aprendizaje significativas y una mayor comprensión del proceso de formación del conocimiento matemático. Asimismo, dado que las matemáticas se desarrollaron en un contexto social y son el resultado de un proceso evolutivo (Queiroz, 2020), se vuelve necesario que el profesor tenga conocimiento de su historia (Gençkaya y Tan-Şişman, 2021), en ese sentido, puede favorecer en una mayor apreciación de cómo los contenidos matemáticos enseñados en un nivel específico están conectados con el currículo de otros niveles educativos (Jankvist et al., 2015). También se reconoce que cuando el conocimiento de los orígenes y los contextos históricos ofrecen conexiones matemáticas significativas puede favorecer al desarrollo de ideas matemáticas (Fleener et al., 2002).

Por otra parte, en relación con el álgebra abstracta, la historia de la matemática muestra que la clasificación de los grupos finitos fue uno de los problemas de mayor relevancia en el desarrollo de la teoría de grupos. Un análisis del origen de este problema histórico sugiere que su tratamiento en la enseñanza actual debería ser considerado como fuente de construcción de conocimiento. Por lo que, en esta investigación la historia de la matemática juega un papel fundamental como un medio para la contribución al conocimiento matemático y a la exploración de formas posibles en que este conocimiento puede utilizarse para favorecer en los procesos de enseñanza y aprendizaje, es decir, para desarrollar una comprensión más profunda de las matemáticas en los estudiantes, así como al diseño y análisis de actividades para la enseñanza (Bütüner, 2016, 2020; Bütüner y Baki, 2020; Mendes, 2020; Wang et al., 2018). Específicamente, a partir de un estudio histórico y epistemológico del concepto de grupos isomorfos en la obra de Cayley (1854) "*On the theory of groups, as depending on the symbolic equation* $\theta^n = 1$", se lleva a cabo la recuperación de las ideas y significados que subyacen a este concepto en un momento histórico específico.

Relativo a las conexiones matemáticas, se ha identificado que los estudiantes deben establecer conexiones conceptuales precisas para resolver tareas con estructuras desconocidas y clases generales de objetos, con la finalidad de mejorar su comprensión (Melhuish y Fagan, 2018), y se ha identificado también que una sólida comprensión conceptual se caracteriza por un conocimiento rico en conexiones (Hiebert y Lefevre, 1986). Asimismo, la comprensión conceptual puede ser más sustentable para el aprendizaje de las matemáticas (Borji, Radmehr y Font, 2019). Por lo que, para alcanzar una alta comprensión conceptual, las conexiones matemáticas deben fomentarse en los estudiantes de cualquier nivel educativo, ya que permiten conocer a la matemática como un campo sistemático e integral de conocimientos. Sin embargo, en el proceso de enseñanza-aprendizaje se favorece una presentación acabada y puramente formal de los conceptos e ideas matemáticas, mientras que los aspectos epistemológicos y los procesos de construcción teórica no son priorizados, lo cual incide en la comprensión de los estudiantes de cómo se interrelacionan los conceptos.

En este artículo se presenta una caracterización de las conexiones intramatemáticas que emergen en la resolución de tareas asociadas a la clasificación de grupos finitos de orden cuatro, considerando para su diseño la fuente primaria Cayley (1854) a partir de un estudio de caso.

1. REFERENTES TEÓRICOS

1.1. Conexiones matemáticas

Las conexiones matemáticas son un enlace o puente entre ideas matemáticas (Businskas, 2008; Singletary, 2012) y el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), las definió como:

"the ability to recognize and use connections among mathematical ideas; understand how mathematical ideas interconnect and build on one another to produce a coherent whole; recognize and apply mathematics in contexts outside of mathematics" (NCTM, 2000, p. 64).

Más recientemente, García-García y Dolores-Flores (2018) definieron las conexiones matemáticas como un proceso cognitivo por el cual una persona relaciona o asocia dos o más ideas, definiciones, conceptos, procedimientos, teoremas, representaciones y significados entre sí, con otras disciplinas o con la vida real. Y, aquellas conexiones que emergen al interior de la matemática misma y entre entidades matemáticas son denominadas conexiones intramatemáticas (García-García y Dolores-Flores, 2018, 2021a, 2021b; Rodríguez-Nieto et al., 2020), mismas que son objeto de estudio de esta investigación.

A continuación, se muestra la categorización utilizada para estudiar las conexiones intramatemáticas, en donde las componentes de la conexión A, B y C corresponden a ideas, conceptos, definiciones, teoremas, procedimientos, representaciones o significados, según corresponda (ver Cuadro 1).

Cuadro 1 – Categorías de conexiones intramatemáticas

Conexiones intramatemáticas	**Caracterización**
Diferentes representaciones	Emerge cuando se conectan diversas representaciones que pueden ser alternativas o equivalentes. Ahora bien, A es una representación alternativa de B, si ambas se expresan de dos maneras diferentes (por ejemplo, geométrica-algebraica, verbal-algebraica). Asimismo, A es una representación equivalente a B cuando ambas se expresan de dos maneras diferentes, pero dentro de la misma forma de representación
Comparación a través de características comunes	Se manifiesta cuando se establecen relaciones de comparación entre conceptos, es decir, A y B comparten algunas características en común, lo que permite una comparación basada en sus similitudes o diferencias (A es similar a B, A es lo mismo que B, A no es lo mismo que B, A o B define o describe de manera similar a C)
Relación parte-todo	Emerge cuando se establecen relaciones lógicas entre conceptos matemáticos, que pueden ser de dos tipos: generalizaciones (A es una generalización de B, donde B es un caso particular de A) e inclusiones (A está incluido o contenido en B)
Implicación	Se manifiesta cuando se establece una relación de dependencia de un concepto de otro, donde un componente de la conexión se sigue lógicamente de otro (Si A, entonces B, Si A, entonces B y no C)
Procedimiento	Emerge cuando un procedimiento matemático o algorítmico es asociado con un concepto particular. Esta conexión es de la forma A es un procedimiento utilizado para trabajar con el concepto B
Característica/propiedad	Emerge cuando se manifiestan algunas características o se describen las propiedades de los conceptos en términos de otros conceptos que los hacen diferentes o similares de otros
Derivación	Se exterioriza cuando el conocimiento de un concepto es empleado para construir o explicar otro concepto; aunque no se limita al reconocimiento de alguna derivación
Conexión de métodos	Se manifiesta cuando un individuo considera múltiples métodos para resolver un problema, es decir, A o B se pueden usar para encontrar C
Reversibilidad	Emerge cuando el individuo es capaz de reconocer y establecer relaciones bidireccionales entre ideas matemáticas. Por ejemplo, cuando se parte de un concepto A para llegar a un concepto B y se invierte el proceso partiendo de B para regresar al concepto A

Significado	Se manifiesta cuando un individuo atribuye un sentido a un concepto matemático (lo que significa para él o ella). Por lo que puede incluir la definición personal de un concepto y estar limitado por el contexto de uso

Fuentes: Businskas (2008), Eli et al. (2011), García-García y Dolores-Flores (2018), Singletary (2012)

1.2. Historia como una herramienta

Diversas investigaciones en Educación Matemática enfatizan que el uso de la historia de la matemática es un auxiliar en los procesos para la enseñanza y el aprendizaje de conceptos, teorías, métodos y algoritmos matemáticos, y con ello, se logra mejorar no solo los procesos correspondientes sino también la compresión de los estudiantes sobre los contenidos matemáticos curriculares (Fauvel y van Maanen, 2000; Furinghetti, 2020; Jankvist, 2009). De acuerdo a Bütüner (2020), el uso de la historia de la matemática como una herramienta tuvo sus inicios en la década de los 70's, con investigaciones como la de McBride y Rollins (1977) en la que se sugirió incorporar actividades en el salón de clase derivadas de la historia de la matemática como un medio para mejorar las actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas, estrategia, además, avalada por el NCTM, y la investigación de Fraser y Koop (1978) en la cual uno de los resultados obtenidos fue que, los profesores manifestaron no estar preparados para utilizar materiales diseñados con base en la historia de la matemática en su propia enseñanza. No obstante, investigaciones recientes, enfatizan que, el conocimiento de los profesores puede subir de nivel luego de tomar lecciones de historia de las matemáticas (Mersin y Durmus, 2021), aunque, se reconoce también que al hablar de historia de la matemática los profesores piensan en su desarrollo histórico o en personajes famosos, y además se sienten inadecuados en utilizarla, lo que lleva al resultado de no incluirla suficientemente en sus clases, sin embargo, resalta que usan la historia de la matemática para desarrollar características afectivas de los estudiantes (Başibüyük y Şahin, 2019), así como profundizar en las creencias de los estudiantes acerca de la matemática, revelarles actividades divertidas, interesantes y útiles (Bütüner y Baki, 2020). Otro uso de la historia de la matemática es el diseño instruccional, que bien puede ser desde la consideración de aspectos históricos para diseñar actividades aplicables en el proceso de enseñanza y aprendizaje (Bütüner, 2020; Goktepe y Ozdemir, 2013).

1.3. La clasificación de los grupos de orden cuatro

En la obra "*On the theory of groups, as depending on the symbolic equation* $\theta^n = 1$" de 1854, Arthur Cayley abordó la clasificación de grupos finitos según su forma y, a partir de un enfoque de generadores y relaciones para grupos, ejemplificó la distinción entre la ecuación ordinaria $x^n - 1 = 0$ y la ecuación simbólica $\theta^n = 1$. También consideró un grupo finito 1, α, $\beta, \gamma, \ldots$ (n símbolos diferentes, donde 1 es la identidad) como un sistema de raíces de la ecuación simbólica $\theta^n = 1$ y exploró la naturaleza de n en dicha ecuación. En particular, para el caso de $n = 4$, Cayley identificó dos grupos *esencialmente distintos* de orden cuatro, donde uno de ellos es *análogo* (isomorfo) al sistema de las raíces de la ecuación ordinaria $x^4 - 1 = 0$, es decir, uno de los grupos es cíclico y el otro no lo es.

En el artículo, Cayley inicia el análisis considerando un grupo G con *símbolos* (elementos) distintos entre sí $\{1, \alpha, \beta, \gamma\}$. Excepto por la identidad, los otros tres elementos o bien son de orden 2 o de orden 4, pues el orden de cualquier elemento α de G es un divisor del orden del grupo: "if any symbol α of the group satisfies the equation $\theta^r = 1$, where r is less than n then that r must be a submultiple of n" (Cayley, 1854, p. 41). Sin embargo, si todos los elementos de G excepto la identidad fueran de orden 4, es decir, generadores, entonces el grupo G es cíclico de orden primo, pero el orden de G es cuatro, por tanto, G debe contener un elemento de orden 2. Sin pérdida de generalidad, Cayley consideró a β como el elemento de orden 2, esto es, $\beta^2 = 1$, de donde se puede verificar que $H = \langle\beta\rangle = \{1, \beta\}$ es un subgrupo de G y si $\alpha \in G$, donde $\alpha \neq 1, \beta$, entonces $\alpha H = \{\alpha, \alpha\beta\}$. Por lo tanto, $G = \{1, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$, ya que se satisface que $H \cap \alpha H = \emptyset$. A continuación, al multiplicar cada término del grupo G por la izquierda (o un *factor más lejano* como refiere Cayley) por α, se obtiene el conjunto $\{\alpha, \alpha^2, \alpha\beta, \alpha^2\beta\}$. Estos elementos resultantes corresponden a alguno de los términos originales $\{1, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$, de modo que $\alpha^2 = 1$ o $\alpha^2 = \beta$.

Suponer $\alpha^2 = \beta$ implica $\alpha\beta = \beta\alpha$ y $\alpha^4 = 1$ (α es de orden 4, pues $\alpha^4 = \alpha^2\alpha^2 = \beta^2 = 1$), por tanto, se obtiene el grupo cíclico $\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, (\alpha^4 = 1)\}$ al realizar la respectiva sustitución en $\{\alpha, \alpha^2, \alpha\beta, \alpha^2\beta\}$. En su artículo, Cayley representa el grupo $\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, (\alpha^4 = 1)\}$ a partir de una tabla denotando al mismo grupo por los símbolos $\{1, \alpha, \beta, \gamma\}$ (ver Figura 1). Como ejemplo de llenado de esta tabla se muestra para la tercera fila, tomando en cuenta que los elementos se obtienen como sigue: para la entrada (i, j), se multiplica el i-ésimo elemento (columna) por el j-ésimo elemento (fila). Por lo tanto, estableciendo la correspondencia $\alpha \leftrightarrow \alpha$, $\alpha^2 \leftrightarrow \beta$, $\alpha^3 \leftrightarrow \gamma$, $\alpha^4 \leftrightarrow 1$, se obtiene: $1\beta = \beta$; $\alpha\beta = \alpha\alpha^2 = \alpha^3 = \gamma$; $\beta\beta = \alpha^2\alpha^2 = \alpha^4 = 1$; $\gamma\beta = \alpha^3\alpha^2 = \alpha^4\alpha = \alpha$.

Figura 1 – El grupo cíclico de orden cuatro

	1,	α,	β,	γ
1	1	α	β	γ
α	α	β	γ	1
β	β	γ	1	α
γ	γ	1	α	β

Fuente: Cayley (1854, p. 42)

Por otra parte, para el caso en que $\alpha^2 = 1$, al multiplicar los elementos de $G = \{1, \alpha, \beta, \alpha\beta, (\beta^2 = 1)\}$ por la izquierda (o un *factor más lejano*) por β, se obtiene el conjunto $\{\beta, \beta\alpha, \beta^2, \beta\alpha\beta\}$, donde cada uno de los elementos se corresponde con alguno de los elementos de G, de lo que se deduce que $\beta\alpha = \alpha\beta$, por lo tanto, $(\alpha\beta)^2 = \alpha^2\beta^2 = 1$. En la representación de este grupo, Cayley construye su tabla, y como ejemplo de llenado de esta se muestra para la tercera fila, tomando $\gamma = \alpha\beta$: $1\beta = \beta$; $\alpha\beta = \gamma$; $\beta\beta = \beta^2 = 1$; $\gamma\beta = \alpha\beta\beta = \alpha\beta^2 = \alpha$ (ver Figura 2).

Figura 2 – El grupo no cíclico de orden cuatro

	1	α	β	γ
1	1	α	β	γ
α	α	1	γ	β
β	β	γ	1	α
γ	γ	β	α	1

Fuente: Cayley (1854, p. 43)

2. METODOLOGÍA

El enfoque es cualitativo, y se realizó un estudio de caso (Creswell, 2014; Njie y Asimiran, 2014). La técnica para recolectar los datos fue la entrevista y el instrumento un cuestionario. Para seleccionar el caso de estudio se llevó a cabo la técnica de observación no participante a un grupo de estudiantes de quinto semestre (20-21 años) de una Licenciatura en Matemáticas, quienes iniciaban un primer curso de Álgebra Abstracta, durante seis meses. Los criterios fueron: 1) que el participante concluyera el curso y; 2) que participara voluntariamente. El caso seleccionado fue Lu. La entrevista constó de dos sesiones de 45 minutos cada una. Además, se videograbaron todas las sesiones y se realizó su transcripción.

2.1. El instrumento

Se diseñó un protocolo de entrevista que consistió en una tarea de carácter intramatemático (ver Figura 3) fundamentada en el análisis de la fuente primaria Cayley (1854). El instrumento se validó tanto por un experto en el área de Álgebra Abstracta con más de quince años de experiencia docente en una Licenciatura en Matemáticas, como por usuarios, considerando los resultados de una prueba piloto aplicado a cinco estudiantes del quinto semestre de la misma Licenciatura, entre ellos Lu.

Figura 3 – Tarea correspondiente a la clasificación de grupos de orden cuatro

Clasificación de los grupos de orden cuatro.

Sea $(G, *)$ un grupo de orden cuatro con elementos $\{1, \alpha, \beta, \gamma\}$ distintos, donde el símbolo 1 representa el neutro.

i. Explica por qué un grupo de orden par tiene al menos un elemento de orden dos. En particular, G tiene al menos un elemento de orden dos.

ii. Sea α el elemento de orden dos en G.
- Determina el conjunto generado por α ($\langle\alpha\rangle$), es decir, el conjunto de todas las potencias de α.
- ¿El generado por α es un subgrupo de G?

iii. Usa el ejercicio anterior para construir la tabla de operaciones de G.
- Si no sabe cómo construir la tabla:
  - Construye la tabla de operaciones para $\langle\alpha\rangle$.
  - Si β es otro elemento de G diferente del neutro y de α, discute lo que sucede al operar por la derecha por β.
  - ¿Por qué el elemento $\alpha\beta$ es diferente de 1, α y β? Es decir, explica por qué $\alpha\beta$ es igual a γ y $G = \{1, \alpha, \beta, \alpha\beta\} = \{1, \alpha, \beta, \gamma\}$.
- Considera la fila de β en la tabla de operaciones del ejercicio anterior.
  - Determina los casos para los cuales $\{\beta, \beta\alpha, \beta^2, \beta\alpha\beta\} = \{1, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$. Es decir, que al operar cada elemento por β se obtienen todos los elementos del grupo reorganizados en un orden diferente.
    - Si hace alguna propuesta:
      - ¿Será el único caso?
      - ¿Cómo sabes que no hay otras posibilidades?
  - Para cada uno de los casos llena la tabla de operaciones obtenida previamente de tal manera que represente un grupo.
    - Reescribe las tablas con los elementos $\{1, \alpha, \beta, \gamma\}$.
  - ¿Los grupos son isomorfos? Justifica tu respuesta.
  - ¿Cuántos grupos hay de orden cuatro?

Fuente: Elaborada por los autores

2.2. Análisis cualitativo de texto

Se usó el método de análisis cualitativo de texto (Kuckartz, 2014) para analizar los datos (ver Cuadro 2):

Cuadro 2 – Fases del análisis cualitativo de texto

Fases	Descripción
1. Lectura e interpretación del texto	La familiarización con los datos se estableció a partir de la lectura y análisis de las transcripciones a la par de las producciones escritas en función del objetivo de investigación
2. Construcción de categorías	Con base en el objetivo de investigación, la construcción de categorías se llevó a cabo de forma deductiva, es decir, previo a la recolección de los datos y en función del marco establecido sobre conexiones matemáticas. En este sentido, se consideraron las siguientes categorías principales (tipología de conexiones matemáticas): diferentes representaciones, comparación a través de características comunes, relación parte-todo, implicación, procedimiento, característica/propiedad, derivación, conexión de métodos, reversibilidad y significado
3. Codificación de segmentos de texto	La codificación de los datos se realizó a partir de las categorías principales, es decir, se designaron códigos en relación con las categorías establecidas en la segunda fase. En específico, se realizó una búsqueda de palabras o frases en las transcripciones asociadas con la tipología de conexiones matemáticas y en consecuencia se asignaron los códigos
4. Análisis	Con base en los resultados de la tercera fase y mediante la triangulación entre los tres autores, se caracterizaron las conexiones matemáticas específicas, en relación con las categorías para las cuales se encontró evidencia, es decir, a partir de una discusión y consenso de su correspondencia con los datos
5. Presentación de resultados	Para su presentación, las conexiones matemáticas identificadas en la clasificación de los grupos de orden cuatro se agruparon atendiendo al concepto matemático asociado a ellas: grupo, isomorfismo y grupos isomorfos. Estas conexiones encajaron en una o más de las categorías propuestas por Businskas (2008), Eli et al. (2011), García-García y Dolores-Flores (2018) y Singletary (2012)

Fuente: Kuckartz (2014)

3. RESULTADOS

En esta sección se presenta la caracterización de las conexiones intramatemáticas realizadas por Lu al resolver la tarea correspondiente a la clasificación de los grupos de orden cuatro, las conexiones se denotan por C_i, i = 1, 2, 3 (ver Cuadro 3).

Cuadro 3 – Conexiones matemáticas identificadas en la tarea resuelta por Lu

Concepto	Conexiones matemáticas	Tipo de conexión
Grupo	(C_1) Un grupo finito de orden par tiene un elemento de orden dos	Derivación
		Relación parte-todo
	(C_2) Existen dos formas posibles de llenar una tabla con cuatro elementos	Procedimiento
Isomorfismo y grupos isomorfos	(C_3) Hay dos grupos estructuralmente diferentes de orden cuatro	Comparación a través de características comunes
		Derivación

Fuente: Elaborado por los autores

3.1. Conexiones intramatemáticas asociadas al concepto de grupo

(C_1) *Un grupo finito de orden par tiene un elemento de orden dos*

Basada en su conocimiento de los axiomas de un grupo, Lu estableció una conexión de tipo *derivación*, ya que utilizó la unicidad del inverso para explicar por qué un grupo *G* de orden par tiene al menos un elemento de orden 2, así como en la relación de igualdad entre el orden de un elemento y el orden de su inverso. La estudiante argumentó que, en un grupo de orden par, la cantidad de elementos sin considerar al neutro siempre es impar y si ninguno de ellos fuese de orden dos, se tendrían que considerar parejas de elementos donde uno es inverso del otro, en cuyo caso, sobra un elemento, el cual necesariamente es su propio inverso, es decir, hay un elemento de orden dos. Por lo tanto, desde el punto de vista de Lu, "en un grupo no puede haber un único elemento de orden distinto de uno y dos, porque se necesitaría otro del mismo orden con el cual *emparejarlo* [su inverso]".

También se considera que Lu hizo una conexión *relación parte-todo*, debido a que su análisis se basó en los grupos de orden cuatro y seis como casos particulares de grupos de orden par y de esta manera logró establecer una generalización sobre la existencia de un elemento de orden dos.

> ***Investigador****: Explica por qué un grupo G de orden par tiene al menos un elemento de orden dos. En particular, G tiene un elemento de orden dos.*

Lu: [...] *en este grupo de orden cuatro, si hay dos que sean del mismo* [orden] *y tenemos el neutro, ya llevamos tres. Entonces el que quede es de orden dos y así va a pasar siempre porque vamos a tener el neutro. Entonces, si los demás van a pares, por ejemplo, ...* $\mathbb{Z}_6$ *de orden seis van, por ejemplo, dos de* [orden] *tres, dos de* [orden] *seis, son cuatro y tenemos el neutro y entonces nos queda uno de orden dos* [...]. *En un grupo de orden par como los que ya mencioné, tengo dos elementos que son inversos entre sí, un elemento que es el neutro, entonces el otro debe ser de orden dos, es decir, inverso de sí mismo.* [...] *Entonces tendría parejas y me queda un sólo elemento, que tendría que ser de orden dos ¿por qué? Porque es su propio inverso.*

(C_2) *Existen dos formas posibles de llenar una tabla con cuatro elementos*

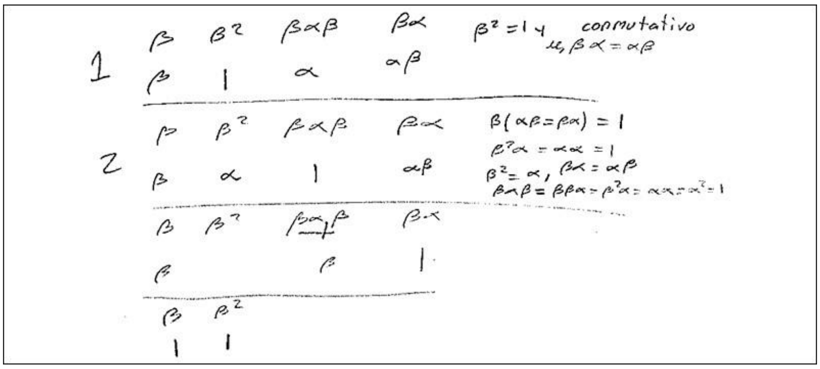
En la construcción de una tabla de operaciones de un grupo de orden cuatro, Lu tenía claro que debía haber un elemento que era su propio inverso, sin embargo, presentó dificultades para realizar el llenado de esta a partir del subgrupo generado por el elemento de orden 2, al cual llamó α. En ese caso, se hizo la sugerencia a Lu de operar por la derecha por β, es decir, efectuar $\langle\alpha\rangle\beta = \{\beta, \alpha\beta\}$, de donde la estudiante pudo explicar por qué el elemento $\alpha\beta$ es distinto de los elementos $1, \alpha$ y β. Además, Lu reconoció que en esta nueva tabla cada uno de los elementos en filas y columnas se deberían corresponder con alguno de los elementos 1, α, β y $\alpha\beta$. En palabras de Lu, "son esos elementos de las filas y columnas porque el grupo es cerrado", por lo que se puede deducir que tenía claro que ninguna fila o columna de la tabla podía tener elementos repetidos, estableciendo una conexión *procedimiento* asociada con el concepto de grupo, ya que, por ejemplo, no relacionó que el operar $\langle\alpha\rangle\beta$ era lo mismo que hallar la clase lateral derecha, módulo el subgrupo considerado.

A partir de la tabla construida, la primera inferencia que Lu hizo fue que el grupo tenía que ser abeliano, es decir, $\alpha\beta = \beta\alpha$ y tomando en cuenta la fila de β inició la exploración de los casos para los cuales $\{\beta, \beta\alpha, \beta^2, \beta\alpha\beta\} = \{1, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$. Lu argumentó que había sólo dos casos posibles para los cuales los elementos se podían relacionar, si: $\beta^2 = 1$ y $\beta^2 = \alpha$ (ver Figura 4). Estos dos casos corresponden a las formas posibles de llenar una tabla con cuatro elementos a partir del método propuesto en la tarea.

Investigador*: En la tabla que construiste, si consideramos cualquier fila, digamos la de β* […] *¿qué relación hay entre éstos y los elementos 1, α, β, αβ?*
Lu*:* […] *Deberían de relacionarse con β, 1, α y αβ.*
Investigador*: ¿Cómo determinas quién es cada uno de ellos?*
Lu*: Pues si fuera conmutativo,* β^2 *sería 1 y así βαβ sería α y éste sería éste* [$\beta\alpha = \alpha\beta$].
Investigador*: ¿Sería el único caso?*
Lu*: No, también puede ser β pues es β,* β^2 *sería α nada más y éste* [el elemento $\beta\alpha\beta$] *al ser conmutativo pues se puede cambiar.* β^2*, aquí es 1 y G conmutativo* [el primer caso]. *El elemento βα es igual a αβ.* […] *Otro caso es* $\beta^2 = \alpha$.
Investigador*: ¿Serán los únicos casos?*
Lu*: Sí.*
Investigador*: ¿Cómo lo sabes?*
Lu*: Porque* […] *éste* [el elemento $\beta\alpha$] *no puede ser identidad porque si lo hacemos identidad, aquí diríamos que éste* [el elemento $\beta\alpha\beta$] *estaría dividido así, entonces sería β y aquí tenemos β, ya está repetida, así que no se puede* [ver Figura 4].
Investigador*: Y, ¿cómo sabes que β no es identidad?*

Lu: ¿β nada más? Pues no se puede.
***Investigador**: ¿Por qué?*
***Lu**: Porque β es un elemento del grupo, y si ya está la identidad del grupo, ¿cómo β va a ser la identidad?*
[…] *Los únicos* [dos] *casos son éstos* [Indicados por los números 1 y 2 en la Figura 4].

Figura 4 – Dos casos posibles para $\{\beta, \beta\alpha, \beta^2, \beta\alpha\beta\} = \{1, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$



Fuente: Producciones escritas de Lu

3.2. Conexiones intramatemáticas asociadas a los conceptos de isomorfismo y grupos isomorfos

(C_3) *Hay dos grupos estructuralmente diferentes de orden cuatro*

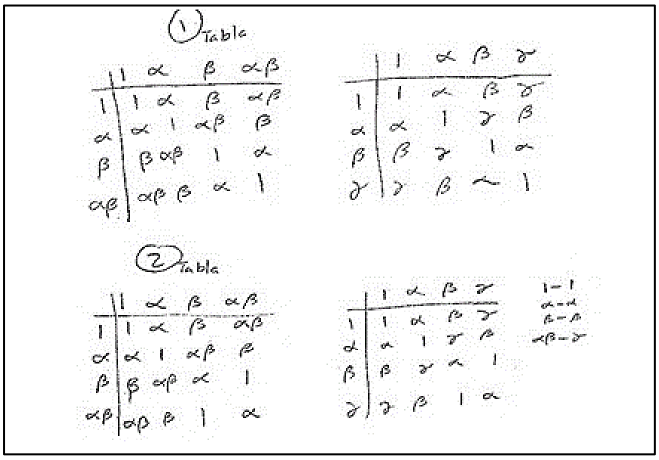
A partir de establecer una conexión de *comparación a través de características comunes*, Lu identificó dos grupos estructuralmente diferentes de orden cuatro, ambos conmutativos: en un grupo todos los elementos diferentes del neutro son de orden dos, mientras que el otro grupo tiene dos elementos de orden cuatro (generadores del grupo) y uno de orden dos. Si bien *tener un elemento de orden finito dado* es una propiedad invariante de un grupo, es decir, una propiedad de *G*, tal que cualquier grupo *H* isomorfo a *G* tiene la misma propiedad, la explicación de la estudiante no consideró este argumento.

Por otra parte, basados en la producción de Lu se considera que hizo una conexión *derivación* al señalar que estos grupos no eran similares (isomorfos) porque al intentar realizar un cambio de nombre resulta imposible establecer una relación entre los elementos de los grupos con diferente orden. Es decir, su argumento se basó en su conocimiento de la propiedad de isomorfismo, que permite el cambio de nombre de los elementos a través de una correspondencia biunívoca, aunque no hizo referencia explícita a este concepto.

***Investigador**: Ahora bien, ¿los grupos resultantes son isomorfos?* [ver Figura 5]. Justifica tu respuesta
***Lu**: No.*
***Investigador**: ¿Por qué?*
***Lu**: En principio, pues si yo quisiera hacer una relación tendría que haber un elemento de un orden igual a otro elemento del mismo orden, podría relacionar a 1 y α con 1 y α, pero β y γ aquí son de orden dos*

[ver tabla 1 en Figura 5] *y aquí son de orden cuatro* [ver tabla 2 en Figura 5], *así que no los puedo hacer relacionar* [...] *no se puede hacer esa relación entre los elementos para hacer un cambio de nombre.*
Investigador: *Entonces, ¿cuántos grupos hay de orden cuatro?*
Lu: *De los grupos de orden cuatro solo hay dos tipos y las otras combinaciones posibles son parecidas a uno de ellos. Bueno, los dos son conmutativos, uno tiene dos elementos generadores y el otro ninguno.*

Figura 5 – Dos grupos distintos de orden cuatro



Fuente: Producciones escritas de Lu

CONCLUSIÓN

El objetivo fue caracterizar las conexiones intramatemáticas comprendidas en la clasificación de los grupos de orden cuatro a partir de un estudio de caso. Se identificaron dos conexiones asociadas al concepto de grupo y una con los conceptos de isomorfismo y grupos isomorfos. Cada una de estas conexiones se vinculó con al menos una categoría de conexiones intramatemáticas (ver Cuadro 3). Los resultados indicaron que el caso llegó a ser consciente de las conexiones matemáticas establecidas una vez que resolvió y reflexionó sobre su procedimiento al resolver la tarea. En el proceso de resolución orientado Lu descubría, construía y utilizaba su nuevo conocimiento para avanzar exitosamente, no obstante, se observó que los conocimientos previos o subyacentes, como por ejemplo el concepto de clases laterales y el de grupos isomorfos, fueron obstáculos para lograr responder correctamente la tarea sobre la clasificación de los grupos de orden cuatro, en ese sentido, las conexiones matemáticas establecidas por el caso están íntimamente relacionadas con su comprensión y el uso de su conocimiento en la resolución de la tarea, por ejemplo, analizar una proposición a partir de la examinación de casos particulares para realizar conjeturas y no a través de argumentos generales; llenar una tabla de operaciones que represente un grupo de orden cuatro de forma procedimental, es decir, solo considerando que en filas y columnas no haya elementos repetidos; así como no poder argumentar por qué el orden de los elementos es una propiedad invariante que satisfacen los grupos isomorfos.

Finalmente, una implicación educativa a partir de la identificación de las conexiones matemáticas concierne al diseño de tareas para establecer conexiones explícitas con el objetivo de fortalecer la compresión de los conceptos y resultados subyacentes a la clasificación de los grupos de orden cuatro. También se destaca el uso de la historia de las matemáticas para favorecer en una presentación de los conceptos, teoremas, algoritmos de forma conectada a los estudiantes, en relación con los problemas e ideas que los generaron, en contraste con la comprensión procedimental que promueve la enseñanza actual en la determinación de todos los grupos de orden cuatro.

REFERENCIAS

Başibüyük, K. & Şahin, Ö. (2019). Mathematics Teachers' Opinion about the History of Mathematics. *Acta Didactica Napocensia,* 12(2), 117-132, http://doi.org/10.24193/adn.12.2.9

Borji, V., Radmehr, F., & Font, V. (2019). The impact of procedural and conceptual teaching on students' mathematical performance over time. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 52(3), 404-423. http://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1688404

Businskas, A. (2008). *Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections.* (Doctoral dissertation). Simon Fraser University. Canada. Recuperado de: https://summit.sfu.ca/item/9245

Bütüner, S. Ö. (2016). The use of concrete learning objects taken from the history of mathematics in mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 47(8), 1156-1178. https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1184336

Bütüner, S. Ö. (2020). An evaluation of activities based on the use of the history of mathematics as a tool. *Journal of Pedagogical Research*, 4(2), 139-164. http://dx.doi.org/10.33902/JPR.2020062216

Bütüner, S. Ö. & Baki, A. (2020). The use of history of mathematics in the mathematics classroom: An action study. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology* (IJEMST), 8(2), 92-117. https://doi.org/10.46328/ijemst.v8i2.843

Cayley, A. (1854). VII. On the theory of groups, as depending on the symbolic equation $\theta^n = 1$. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 7(42), 40-47. https://doi.org/10.1080/14786445408647421

Creswell, J. W. (2014). *Research Design: Qualitative, Quantitative and Mixed Methods Approaches*. 4 ed. Thousand Oaks: Sage Publications.

Eli, J., Mohr-Schroeder, M., & Lee, C. (2011). Exploring mathematical connections of prospective middle-grades teachers through card-sorting tasks. *Mathematics Education Research Journal*, 23(3), 297-319. https://doi.org/10.1007/s13394-011-0017-0

Fauvel, J., & van Maanen, J. (Eds.) (2000). *History in mathematics education: the ICMI study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Fleener, M. J., Reeder, S. L., Young, E., & Reynolds, A. M. (2002). History of mathematics: Building relationships for teaching and learning. *Action in Teacher Education*, 24(3), 73-84. https://doi.org/10.1080/01626620.2002.10734433

Fraser, J. B., & Koop, J. A. (1978). Teachers‟ opinions about some teaching material involving history of mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 9(2), 147-151. https://doi.org/10.1080/0020739780090203

Furinghetti, F. (2020). Rethinking history and epistemology in mathematics education*. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 51(6), 967-994. https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1565454

García-García, J., & Dolores-Flores, C. (2018). Intra-mathematical connections made by high school students in performing Calculus tasks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49(2), 227-252. https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1355994

García-García, J., & Dolores-Flores, C. (2021a). Pre- university students' mathematical connections when sketching the graph of derivative and antiderivative functions. *Mathematics Education Research Journal*, 33, 1-22. https://doi.org/10.1007/ s13394-019-00286-x

García-García, J., & Dolores-Flores, C. (2021b). Exploring pre-university students' mathematical connections when solving Calculus application problems. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 52(6), 912-936. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1729429

Gençkaya, Ş., & Tan-Şişman, G. (2021). The use of the history of mathematics in teaching-learning process: The perspectives of faculty members and teachers. *Psycho-Educational Research Reviews*, 10(2), 241-257. https://doi.org/10.52963/PERR_Biruni_V10.N2.17

Goktepe, S., & Ozdemir, A. S. (2013). An example of using history of mathematics in classes. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 1(3), 125-136. https://doi.org/10.30935/scimath/9392

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.). *Conceptual and Procedural Knowledge: the Case of Mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 71(3), 235-261. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9174-9

Jankvist, U. T., Mosvold, R., Fauskanger, J., & Jakobsen, A. (2015). Analysing the use of history of mathematics through MKT. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 46(4), 495-507. https://doi.org/10.1080/0020739X.2014.990528

Kuckartz, U. (2014). *Qualitative Text Analysis: A Guide to Methods, Practice and Using Software*. Los Angeles: Sage.

McBride, C. C., & Rollins, H. J. (1977). The effects of history of mathematics on attitudes toward mathematics of college algebra students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 8(1), 57-61. https://doi.org/10.2307/748568

Melhuish, K., & Fagan, J. (2018). Connecting the Group Theory Concept Assessment to Core Concepts at the Secondary Level. In N. H. Wasserman (Ed.). *Connecting Abstract Algebra to Secondary Mathematics, for Secondary Mathematics Teachers* (pp. 19-45). Netherlands: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-99214-3_2

Mendes, I. A. (2020). History for the Teaching of Mathematics: Transformation and Mobilization of Mathematical Knowledge for School. *Pedagogical Research,* 5(3), em0072. https://doi.org/10.29333/pr/8284

Mersin, N., & Durmus, S. (2021). Effects of the Enriched History of Mathematics Course on Prospective Mathematics Teachers. *International Journal of Curriculum and Instruction*, 13(1), 635-668. Recuperado de: https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1285556.pdf

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics: An Overview*. National Council of Teachers of Mathematics.

Njie, B., & Asimiran, S. (2014). Case study as a choice in qualitative methodology. *IOSR Journal of Research & Method in Education*, 4(3), 35-40. https://doi.org/10.9790/7388-04313540

Queiroz, D. S. (2020). HISTÓRIA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. *Revista De História Da Educação Matemática*, 6(1). Recuperado de: https://www.histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/294

Rodríguez-Nieto, C., Rodríguez-Vásquez, F. M., & Font, V. (2020). A new view about connections. The mathematical connections established by a teacher when teaching the derivative. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1799254

Singletary, L. M. (2012). *Mathematical Connections Made in Practice: An Examination of Teachers' Beliefs and Practices*. (Doctoral dissertation). University of Georgia. Athens. Recuperado de: https://getd.libs.uga.edu/pdfs/singletary_laura_m_201208_phd.pdf

Wang, K., Wang, X. Q., Li, Y., & Rugh, M. S. (2018). A framework for integrating the history of mathematics into teaching in Shanghai. *Educational Studies in Mathematics*, 98(2), 135-155. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9811-x