




A INTUIÇÃO E O SABER GEOMÉTRICO: contribuições das pesquisas historiográficas para produção de uma epistemologia do ensino

L'INTUITION ET LE SAVOIR GÉOMÉTRIQUE: contributions des recherches historiographiques à la production d'une épistémologie de l'enseignement

MARCIO OLIVEIRA D'ESQUIVEL¹

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-3146-0160>

RESUMO

O presente artigo analisa as implicações didático, pedagógicas, e também epistemológicas, que a noção de intuição exerceu sobre o saber geométrico. De forma particular, discute-se as possíveis contribuições do intercruzamento dos resultados das pesquisas envolvendo História da Educação Matemática e História da Matemática para compreensão dos saberes que caracterizam o trabalho profissional do professor que ensina geometria. Como referência para as análises desenvolvidas neste artigo tomaremos produções sobre o tema, sobretudo de origem francesas. As análises indicam que a noção da intuição, ora tomada como pressuposto para analisar os processos de elaboração dos mecanismos internos de compreensão daquele que aprende, ora compreendida como uma dimensão do próprio saber disciplinar, parece participar efetivamente da produção dos saberes que caracterizam o ensino de geometria.

Palavras-chave: História da Educação Matemática. História da Matemática. Geometria. Intuição. Ensino.

RÉSUMÉ

Cet article analyse les implications didactiques, pédagogiques, mais aussi épistémologiques, que la notion d'intuition a exercées sur le savoir géométrique. En particulier, on discute des contributions possibles de l'échange des résultats des recherches impliquant l'histoire de l'éducation mathématique et l'histoire des mathématiques pour comprendre les savoirs qui caractérisent le travail professionnel de l'enseignant enseignant qui enseigne la géométrie. Comme référence pour les analyses développées dans cet article, nous prendrons des productions sur le thème, surtout d'origine française. Les analyses indiquent que la notion d'intuition, désormais prise comme condition pour analyser les processus d'élaboration des mécanismes internes de compréhension de celui qui apprend, désormais comprise comme une dimension du savoir disciplinaire lui-même, semble participer effectivement à la production des savoirs qui caractérisent l'enseignement de la géométrie.

Mots-clés: Histoire de L'éducation Mathématique. Histoire des Mathématiques. Géométrie. Intuition. Enseignement.

¹Doutor em Ciências pela Universidade Federal do Estado de São Paulo (UNIFESP). Professor da Universidade do Estado da Bahia (UNEB), Caetité, Bahia, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Jovita Lemos de Menezes nº27, Edifício Vila de Itália, Ap. 01, Candeias, Vitória da Conquista, Bahia, Brasil, CEP:45.028-496. E-mail: mdesquivel@uneb.br

INTRODUÇÃO

“Contar é muito, muito dificultoso. Não pelos anos que se já passaram. Mas pela astúcia que têm certas coisas passadas – de fazer balancê, de se remexerem dos lugares”
Guimarães Rosa²

No sentido estrito da palavra trabalho - ação que transforma algo a fim de satisfazer as necessidades humanas -, o ato de ensinar constitui-se um trabalho. Com efeito, a ação de ensinar, como a de qualquer outro trabalho, transforma. Compreendida como uma ação metódica e sistemática de transformação cultural atribuída à atuação do professor, o objeto de transformação do ensino são os modos de pensar, falar e fazer. Como resultado final, espera-se a produção da escrita, da leitura ou das formas disciplinares de conhecimento. Como tal, o saber que caracteriza o trabalho de ensino possui uma história. Ensina-se um dado saber, a alguém em particular, em lugares e contextos temporais específicos. Estas questões têm sido analisadas em perspectivas de pesquisas diversificadas. De forma particular, nos interessa para os objetivos propostos para este ensaio, discutir possíveis contribuições do intercruzamento das pesquisas envolvendo História da Educação Matemática e História da Matemática para compreensão dos saberes que caracterizam o trabalho profissional do professor que ensina matemática. Em específico, discutiremos neste trabalho, as implicações didático-pedagógicas, e também epistemológicas, que a noção de *intuição* exerceu sobre o saber geométrico.

Com efeito, as pesquisas que se propõem buscar caracterizar a natureza do saber constitutivo da profissão do ensino vêm indicando que os elementos que compõem tal saber, longe de serem triviais, se estabelecem no amálgama de pelo menos dois campos de saberes: os de ordem didático-pedagógicos, relacionados diretamente a aprendizagem, e que dizem respeito ao campo das ciências da educação, e aqueles relacionados aos saberes disciplinares específicos e que caracterizam a matéria a ensinar. Na presente proposta de análise nos aproximamos dessa segunda opção de discussão. Motiva-nos a seguinte questão: em relação a geometria euclidiana como historicamente se relacionaram intuição, saberes para o ensino e saber disciplinar?

Como proposta de abordagem da questão o presente texto se organiza em três momentos de discussão, a saber: num primeiro momento, analisaremos como produções no campo da História da Educação, de maneira específica, da História da Educação Matemática, podem contribuir para as pesquisas que investigam a trajetória de constituição de saberes necessários

² Rosa, J. G. (2019). *Grande sertão: veredas*. Editora Companhia das Letras. p. 137.

ao ensino de matemática. Em um segundo momento, discutiremos as implicações didático-pedagógicas para o ensino de geometria derivadas das propostas intuicionistas. Em questão estão o que seria talvez as primeiras iniciativas de sistematização de um método de ensino de geometria segundo os pressupostos pestalozzianos. Numa terceira parte, discutiremos o tema da intuição do ponto de vista da compreensão do próprio saber matemático. Analisamos neste tópico as implicações didáticas do questionamento de ordem epistemológicas provocadas pela noção de intuição. Conforme veremos, a compreensão do papel do aspecto intuitivo nos processos de elaboração do conhecimento geométrico vai se apresentar como um problema de difícil solução que coloca em questão métodos de ensino e a própria estruturação teórica do discurso geométrico euclidiano.

1. HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: contribuições para pesquisas sobre a trajetória de constituição dos saberes necessários ao ensino de matemática

Uma questão, que embora recorrentemente venha sendo respondida pelos diversos resultados das pesquisas realizadas no campo da História da Educação, e de maneira específica, no campo da História da Educação Matemática, diz respeito as possibilidades concretas da contribuição da produção científica dessas áreas, para o enfrentamento das questões relacionadas diretamente ao trabalho do professor. Não sem razão, põe-se em questão o fato de que a generalidade das investigações de alguns dos trabalhos produzidos, estabelecem pouca articulação com as problemáticas concretas enfrentadas por professores que ensinam matemática. Longe de pretendermos nos adentrar em profundidade na seara das discussões sobre o assunto, que em nosso entendimento tem relação direta mais com as ferramentas teóricas adotadas por cada campo de investigação científica, do que especificamente, com a eficácia dos resultados alcançados pelas produções realizadas nos respectivos campos, queremos noutra direção, pontuar resultados das pesquisas em História da Educação Matemática que compreendemos, são indicativos que credenciam as produções na área a contribuir efetivamente com os estudos que investigam os processos de constituição dos saberes que orientam a atuação do professor que ensina matemática.

É sintomático a respeito dos trabalhos que elegem a investigação historiográfica como objeto de estudo, a constatação de que ainda nos dias atuais, discussões sobre a regulamentação

da profissão do historiador no Brasil, por exemplo, ganhem os noticiários nacionais³. A questão de fato não é nova. Muitos trabalhos têm se debruçado sobre o tema e discutido direta ou indiretamente a problemática⁴. Nas argumentações teóricas produzidas, a importância da atuação do historiador emerge como resultado de um conjunto de primícias indiciárias de que, sem uma interpretação precisa do seu papel na análise dos fatos, muito provavelmente se recaria num diagnóstico incompleto, quando não equivocado, dos fenômenos que caracterizam as práticas sociais.

Nos deteremos, mesmo que *en passant*, na análise de alguns dos resultados das pesquisas no campo da historiografia da educação matemática, que em nosso entendimento, dão contribuições originais para as investigações sobre o processo de produção do repertório de saberes indicados como necessários para a atuação do professor.

Uma primeira questão que gostaríamos de pontuar a respeito dos saberes necessários a profissão do ensino, é a de que estes saberes possuem uma longa história de constituição. Embora pareça-nos óbvia tal afirmação, julgamos importante considerá-la do ponto de vista dos saberes para o ensino disciplinar em matemática. Longe de trivial, a história dos saberes necessários ao ensino de matemática é herdeira de uma complexa conjunção de fatores cujo o conhecimento pode ajudar-nos a desnaturalizar práticas de ensinos que parecem consolidadas, à revelia de uma reflexão mais sistemática sobre seus fundamentos históricos. Tomemos em breves palavras, como referência para as análises a esse respeito, o seminal artigo *A escolarização dos saberes elementares na época moderna*, de autoria de Jean Hébrard, texto em que o autor analisa o processo de escolarização da tríade ler-escrever-contar a partir do contexto europeu.

Hébrard (1990), a partir de uma verdadeira arqueologia do processo de escolarização dos saberes elementares que remete ao século XVI do contexto europeu, indica que as primeiras e precoces aprendizagens se estabeleceram por muitas gerações como atividades que se deram no contexto familiar. Segundo o autor, é com surgimento da escola, que processos de aprender ganham institucionalização, e conseqüentemente, determinação de um tempo e um lugar específico para esse fim. Antes de se tornarem disciplinas elementares da escolarização, técnicas de escritas, calcular à mão, dentre outras habilidades se constituíam em *savoir-faire* eruditos, provenientes de meios profissionais específicos. Assim, ensinar tais habilidades, num primeiro momento, será um atributo daqueles que por seu notório saber, tem reconhecida a

³ Ver: <https://www.cafehistoria.com.br/regulamentacao-da-profissao-de-historiador-riscos-oportunidades/>

⁴ Cite-se, dentre outros o livro: *Apologia da História: Ou ofício do historiador* de Mark Bloch, obra referencial que discute a importância do papel da pesquisa histográfica na interpretação das dinâmicas das transformações históricas.

capacidade de instruir. Lembra-nos o autor que quando a escola começa “escolarizar” saberes, técnicas, e práticas de “como fazer” estes saberes já haviam sido modelados por um longa história. Será a demanda por escolarização que se manifesta a partir do século XV na Europa que acabará por transformar radicalmente os procedimentos antigos de formação. É possível, e tal constatação parece-nos sobremaneira relevante, que mesmo nos dias atuais saberes escolarizados tragam em si vestígios dessa evolução (Hébrard, 1991).

Merece registro aqui, mesmo sem a profundidade que o tema merece, o caso da escolarização da aritmética tratada por Hébrard (1990) em seu artigo. Em nosso entendimento, tal registro remota a arqueologia da profissão do professor de matemática e é indiciário do processo de constituição de saberes para o ensino. Conforme nos lembra Hébrard, a transformação dos conhecimentos de aritmética em saberes elementares escolarizados, não se constituiu algo trivial. Técnicas de contagem e de registros numéricos que passam a figurar na escola, são herdeiras da longa tradição de aritméticos profissionais. Estes deixam uma abundante produção de tratados especializados que, contrariamente as obras de matemática universitária, se constituíam em aritméticas práticas redigidas em língua vulgar (Hébrard, 1990). A demanda por aprendizagem de camadas distintas da população, a instrução religiosa que acaba por estabelecer novos métodos pedagógicos de ensino, e a publicação de obras singulares para o ensino de aritmética são alguns dos elementos que apontam para complexidade do processo de escolarização dos saberes em aritmética. A título de conclusão provisória, os estudos de Hébrard, embora não discutam diretamente a constituição profissional do professor que ensina matemática, são indiciários de que, saberes que constituem a profissão do ensino possuem uma história complexa que se estabelece no intercruzamento de muitas heranças. E mais, seus estudos indicam que práticas de ensino diferentes de aritmética a cada tempo, produziram como que uma aritmética escolarizada, cujos fins parecem cumprir outros objetivos que não só aqueles de origem nos contextos sociais, tampouco, estritamente acadêmicos. Tomemos mais uma vez exemplos historiográficos, agora relacionados ao saberes geométricos.

Os elementos históricos que concorreram para introdução da geometria como extensão da tríade ler, escrever e contar, dão-nos ainda mais elementos para compreensão dos fios que entrelaçados tecem a complexidade do processo de produção de saberes constitutivos da profissão do ensino. Conforme indicam as pesquisas sobre o tema, a motivação inicial que levou à proposição do ensino de geometria para os primeiros anos escolares, foi a de que sua

aprendizagem pudesse ser essencialmente prática, ligada a agrimensura, à medição de terrenos⁵. Historicamente a mudança do entendimento do que viria ser uma *geometria prática*, não só vai transformar as finalidades para o seu ensino, como também, vai exigir de professores, práticas profissionais diferentes e especializadas. No centro das discussões sobre o ensino de geometria para escola elementar vão está quase sempre questões relativas ao papel que deveria ocupar o ensino de desenho. Deveria o ensino de desenho iniciar os estudos de geometria? Ou seu ensino viria depois, como aplicação dos saberes geométricos? Seria o desenho uma espécie de geometria prática? Em qual nível escolar deveria ser introduzido o ensino de geometria? E nesse caso, quais métodos mais apropriados para o seu ensino?⁶ As discussões em torno de algumas dessas questões serão objeto de contendas educacionais no contexto francês da virada do século XIX. Para o desenvolvimento das análises produzidas nesse ensaio, retomaremos aspectos relacionados o ensino de geometria no caso francês, que em nosso entendimento, fazem parte da trajetória de constituição dos saberes necessários ao ensino dessa disciplina.

Retome-se aqui o trabalho de pesquisa desenvolvido por Assude e Gispert (2003), nele os autores discutem os fatores que concorreram para o aparecimento de uma nova compreensão do que viria se constituir um *saber prático*. O contexto é o do ensino de geometria para a escola primária na França na virada do século XIX. Em suas análises, os autores tomam por base as edições de 1878 e 1911 do *Dictionnaire de Pédagogie, de Buisson* – paradigmática obra de grande circulação internacional que pôs em questão a complexidade da atuação profissional do professor e que se tornou referência pedagógica para o ensino também no Brasil⁷. As análises desenvolvida pelos autores discutem as razões que acabaram por atribuir o *status* de *saber prático* ao Desenho Geométrico na segunda edição do *Dictionnaire*, publicada em 1911. No centro das discussões estava o questionamento do ensino clássico de geometria para escola elementar que fosse orientado segundo a abordagem lógico-dedutiva proposta por Euclides. Segundo Renaud D’Enfert (2003) essas discussões, cujas implicações tem caráter tanto epistemológicos quanto pedagógicos, participam do quadro de uma reflexão ampla sobre o ensino de matemática, tema que retomaremos mas adiante nesse trabalho.

Os aspectos aqui tratados em caráter de brevidade, em nosso entendimento, se constituem em evidências da importância das pesquisas no âmbito da História da Educação

⁵ A trajetória de transformações das finalidades para o ensino de geometria no contexto brasileiro é apresentada pelo professor Wagner Rodrigues Valente no trabalho: *Tempos de Império: a trajetória da geometria como um saber escolar para o curso primário*.

⁶ A relação entre o ensino de desenho e geometria no caso brasileiro é discutido por Maria Célia Leme no artigo *Desenho e geometria na escola primária: um casamento duradouro que termina com separação litigiosa*.

⁷ Entre os estudos sobre a circulação do *Dictionnaire de Pédagogie* de Buisson no Brasil, citamos o trabalho de Bastos (2000) intitulado *Ferdinand Buisson no Brasil - Pistas, vestígios e sinais de suas ideias pedagógicas (1870-1900)*.

Matemática para os estudos que problematizam o processo de constituição dos saberes profissionais necessários ao ensino de matemática. O passado das experiências de ensino de matemática, analisado não como dado empírico, posto que são práticas de um tempo remoto, mas como construção teórica - elaborada a partir da contribuição dos resultados consolidados de pesquisas – podem-nos dar pistas de como saberes constitutivos da profissão do professor que ensina de matemática foram se “cristalizando” e sendo sistematizados a partir de experiências docentes diversas.

Feitas essas considerações iniciais, nos concentraremos a partir desse ponto, em analisar como a compreensão do que viria ser *intuição*, motivou não só proposições de métodos para o ensino de geometria, mas também, esteve no centro das transformações de ordem epistemológicas relacionadas a própria natureza do saber geométrico. De igual maneira, analisaremos como historicamente a noção de intuição participa diretamente do processo de elaboração dos saberes que constituem a profissão do ensino.

2. A INTUIÇÃO COMO PSICOLOGIZAÇÃO DO SABER: considerações a partir da trajetória de constituição dos saberes necessários ao ensino de geometria

A segunda metade do século XIX europeu, pode ser caracterizada no que diz respeito aos aspectos sócio educacionais, pela crença nas possibilidades humanas de domínio sobre a natureza, protagonizada pela expectativa dos avanços da ciência e do desenvolvimento industrial em curso. A modernização da educação de então assumiu como premissa, conforme princípio do empirismo, que o ato de aprender deveria se dar pela observação e pela realização do trabalho. Tendo como princípio esse ponto de vista, preconizava-se que o intelecto humano progrediria a partir das operações com as intuições sensíveis. Os sentidos pelo trabalho, operariam sobre os dados do mundo para conhecê-lo e transformá-lo, e por fim, expressar o conhecimento através da linguagem (Valdemarim, 2004). A renovação pedagógica de então defendia um ensino como base na observação do real. Um ensino que fosse “intuitivo e prático”, segundo uma marcha pedagógica orientada no sentido do “conhecido para o desconhecido” do “fácil para o difícil”. A esses princípios orientadores dos procedimentos pedagógicos de ensino, convencionou-se mais comumente no decorrer da história nominar de método intuitivo.

Não obstante houvesse apropriações diferentes para o uso do chamado método intuitivo, em uma síntese rápida, pode-se apontar como suas premissas básicas: a) educa-se pelo treinamento dos sentidos para bem observar; b) as coisas do mundo real constituem-se por

excelência, o ponto de partida do conhecimento; c) aprende-se pela experiência e graduação progressiva das dificuldades. Estes princípios, almejavam como objetivo principal, seguir o desenvolvimento natural do espírito humano nos aspectos intelectuais, morais e físicos. Pressupunha-se que, sendo a natureza perfeita - cujas leis de funcionamento poderiam ser conhecidas graças ao método científico – “conviria a aplicação desses mesmos procedimentos à arte de formar homens, a educação” (Valdemarim, 2004, p.37).

São sobretudo as concepções de ensino do pedagogo suíço Pestalozzi (1746-1827) - que recomendavam começar toda educação ou instrução pelo conhecimento sensível e pela experiência concreta das coisas - que vão inspirar as orientações pedagógicas propostas pelo método intuitivo. Pestalozzi, considerado por muitos o pai da pedagogia moderna, ganhará notoriedade no Brasil a partir da segunda metade do século XIX e exercerá sobre as reformas educacionais, instituições de ensino e formação, manuais escolares em circulação, forte influência no país.⁸

Pestalozzi assume o primado da experiência sensível como ponto de partida para o conhecimento e representação do real. Segundo esse princípio, a *intuição sensível* - os primeiros movimentos em direção à captação das coisas do mundo - não se constituiria tão somente um dado imediato da consciência, mas sobretudo, o fundamento geral de todo conhecimento. Sobre a questão escreve Daniel-Alexandre Chavannes, talvez uns dos primeiros a adaptar o método pestalozziano para ensino de saberes elementares de geometria: “Este método repousa sobre o desenvolvimento natural das faculdades do espírito humano, desde as primeiras impressões sensíveis até as ideias mais abstratas” (Chavannes 1805, p 5-6 apud Trouvé, 2008 p. 239).

Mas como ascender ao saber matemático, e de maneira específica ao saber geométrico, a partir de uma abordagem orientada segundo os princípios de Pestalozzi? Ou, dito de outra maneira, como traduzir em princípios didáticos a orientação pestalozziana do primado da *intuição sensível*? A título de exemplo, apresentaremos uma, dentre as tantas tentativas de respostas dadas a essa complexa questão ao longo da história. Trata-se de uma das primeiras sistematizações do método de ensino intuitivo pestalozziano para o ensino de geometria (formas, nos termos pestalozzianos). Veremos que, relativamente ao ensino de geometria, a pretensão de sistematização teórica e prática dos princípios intuicionistas se constituirá em uma tarefa de difícil execução, uma vez que se orientava no sentido de “transferir para indivíduos

⁸ A influência do intuicionismo francês para o contexto brasileiro, é analisada no artigo *Ferdinand Buisson no Brasil - Pistas, vestígios e sinais de suas ideias pedagógicas (1870 - 1900)* de Maria Helena Câmara Bastos.

reais – crianças – proposições abstratas elaboradas sobre indivíduos genéricos” (Valdemarim, 2004, p. 39).

As orientações didáticas propostas para o ensino de geometria (formas) compõem os capítulos IV e V da obra *Exposé de la Méthode Élémentaire de H. Pestalozzi*, produzida e publicada em 1805 por Daniel-Alexandre Chavannes, amigo e colaborador de Pestalozzi⁹. Nestes capítulos o autor enuncia um conjunto de atividades organizadas segundo níveis de dificuldades cujo objetivo é fazer “exercitar o olho da criança para apreender as formas e determinar as dimensões dos objetos que a simples intuição lhe fez conhecer, bem como, formar sua mão para traçá-los” Chavannes (1805, p.58 trad. livre). Como primeira orientação didática dada ao professor, o autor chama a atenção para o fato de que o ensino intuitivo das formas, só deveria ser ensinado a partir do momento em que os alunos tivessem domínio das principais operações aritméticas. Assim, segundo sua proposta pedagógica, o cálculo se constituiria a base para o aprendizado das primeiras relações geométricas

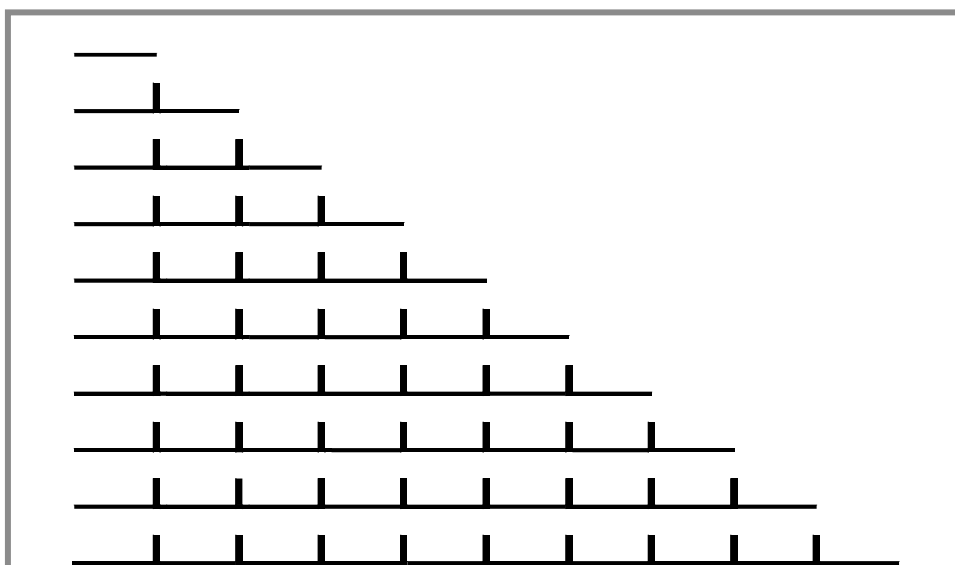
A progressão pretendida começaria primeiramente por fazer o aluno distinguir e nomear as diferentes formas, para só em seguida, propor o estudo das relações entre elas, dando “à criança uma ideia geral das várias combinações às quais podem se prestar as linhas, os ângulos e as curvas” Chavannes (1805, p.60 trad. livre). Para tanto, conforme indica o autor, a marcha didática adotada deveria ser “tal que a criança deve encontrar por si mesma essas combinações, e ser levada, por elas, ao conhecimento de formas abstratas que gravaram-se em seu espírito como modelos que ela poderá reportar para os diversos objetos que se oferecerem a sua visão” (Chavannes, 1805, p.61 trad. livre).

Estes primeiros passos de aprendizagem intuitiva das relações entre as formas, compõem as orientações para o ensino que o autor denomina de “*O primeiro alfabeto da intuição*”. A esta abordagem inicial seguem outras, que pretendem o aprofundamento progressivo no conhecimento das relações geométricas entre as formas.

Como proposição de ensino, o autor indica o uso de quadros esquemáticos que funcionariam como mecanismos didáticos. No primeiro nível trata-se de um quadro organizado com 10 linhas horizontais, o qual o comprimento aumenta progressivamente da primeira até a décima linha, conforme figura 1.

⁹ A obra analisada trata-se do volume 3 disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/182518>

Figura 1 – Quadro para o ensino intuitivo de formas



Fonte: construída pelo autor a partir de Chavannes (1805, p. 61).

De início pretende-se levar a criança a fazer um reconhecimento das propriedades geométricas presentes no quadro. Comparam-se os tamanhos das linhas observando, por exemplo, que a primeira é mais curta que a segunda, essa por sua vez é mais curta que a terceira, e assim sucessivamente. A este sentimento indeterminado das proporções faz-se seguir outro, que diz respeito a sua natureza. Essas habilidades serão conseguidas fazendo a criança observar que a primeira linha não é dividida, e que a segunda é dividida por um ponto em duas partes iguais que se chama metade, e que a terceira é dividida em três partes iguais que se chama terço etc.

O método propõe que após a familiarização com essas propriedades deve-se em seguida, partir para comparação entre as linhas, fazendo a criança observar que a primeira linha é igual à metade da segunda, e que a metade da segunda é igual a um terço da terceira etc. Esse exercício deve ser repetido com o uso de linguagens diferentes para definir as mesmas propriedades entre as linhas. Assim, deve-se explicar que a segunda linha é duas vezes maior que primeira, e que a terceira linha é três vezes maior que a metade da segunda etc. Escreve Chavannes (1805), é dessa maneira que:

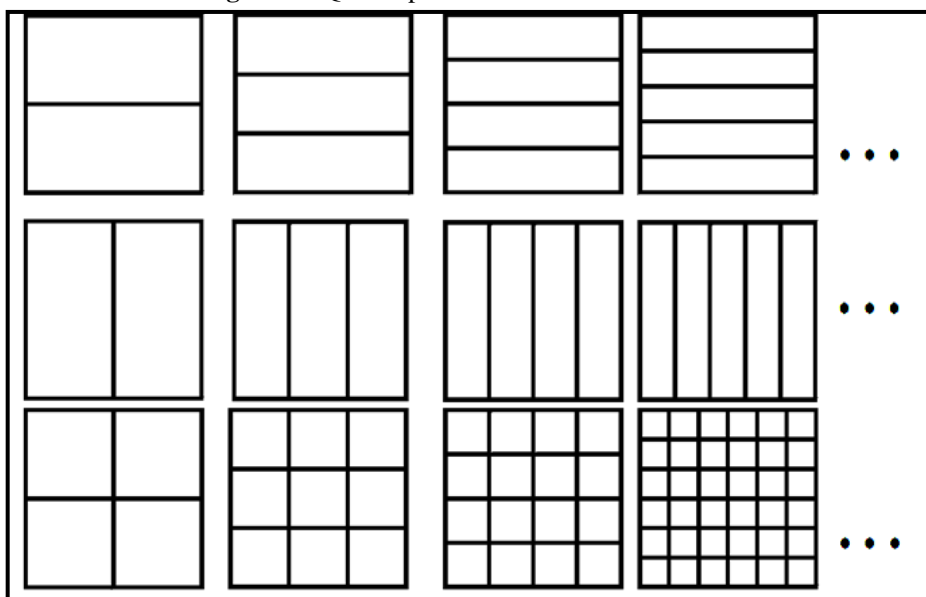
a criança é capaz de ver com um golpe de vista todas as relações possíveis que essas linhas e frações de linhas têm entre elas; por exemplo, que $3/5$ da 5ª linha equivalem a $3/6$ da 6ª, a $3/8$ da 8ª; que $5/10$ da 10ª equivalem a $5/9$ da 9ª; um $5/6$ de 6ª etc. etc. (Chavannes, 1805, p.62, trad. livre).

Em um segundo momento esse mesmo quadro esquemático será utilizado para o ensino do conceito de linhas paralelas horizontais e verticais, para o ensino de ângulos retos, ângulos

opostos, e posteriormente trabalhar a composição e decomposição do quadrado e do retângulo, atividades que não nos deteremos aqui¹⁰.

De maneira similar, são propostas atividades cujo objetivo é explorar as propriedades métricas do quadrado e do retângulo. Vejamos uma das atividades propostas por Chavannes (Fig. 2):

Figura 2 - Quadro para ensino intuitivo de formas



Fonte: construída pelo autor a partir de Chavannes (1805, p. 63)

Com a ajuda da 3ª fila, ele aprende a comparar a altura com a largura. Ao ver, por exemplo, no terceiro quadrado (da 3ª linha), quatro fileiras de quatro quadradinhos, ele dirá fixando a primeira linha: "quatro desses dezesseis pequenos quadrados colocados horizontalmente um ao lado do outro, são um quarto desse quadrado, e formam um retângulo cuja altura é igual à quarta parte do seu comprimento", depois fixando as duas primeiras linhas: "duas vezes quatro desses pequenos quadrados colocados horizontalmente um ao lado do outro e perpendiculares entre si, são dois quartos deste quadrado e forma um retângulo cuja altura é igual a dois quartos de comprimento" etc. (Chavannes, 1805, p. 64, trad. livre).

Novas atividades são propostas usando este quadro e outros elaborados pelo autor, cujo o grau de dificuldade aumenta progressivamente. Atividades como traçar diagonais, comparar ângulos, desenhar figuras são exigidas. O objetivo é fazer com que a criança consiga com um golpe de vista - "*coup d'oeil*" - mensurar e traçar figuras geométricas, utilizando-se e dando sentido aos conhecimentos de cálculo aritmético que já possui.

O professor, por sua vez, não deve se contentar com a resposta oral do aluno, ele deve fazê-lo repetir os exercícios com lápis e produzir seus próprios desenhos, manipular figuras geométricas examinando-as. Utilizando-se por exemplo, de conjuntos de cubos, o professor

¹⁰ Para os passos didáticos relativos a essas construções Chavannes indica o livro *Le premiere Alphabet d'intuition* como referência.

pode fazer o aluno ter uma primeira ideia de raiz quadrada e raiz cúbica, comparar a relação parte e todo, mensurar volume. Enfim, deve-se “elevar o concreto ao mais alto grau de exatidão possível [...] a fim de levar o aluno a enunciar tudo que fizer com rigor geométrico” (Chavannes, 1805, p. 72, trad. livre).

Note-se que as primeiras iniciativas de proposição de uma método de ensino de geometria para os primeiros anos escolares orientados segundo os pressupostos intuicionistas, se socorreu de uma verdadeira engenharia pedagógica e didática de complexa aplicação. Não cumpre-nos, no entanto, avaliar a eficácia do método de ensino proposto. De outro modo, ao que nos parece, o que está em questão é a proposição de procedimentos de ensino de geometria que acabam por forjar uma geometria cujas características estão diretamente relacionadas aos imperativos típicos do espaço escolar. É partir da consolidação em consensos pedagógicos de experiências docentes de ensino em circulação a cada tempo – distanciando-as dos contextos específicos de sua aplicação - que estas passam a compor o rol dos saberes profissionais necessários para o ensino¹¹.

Igualmente, embora numa perspectiva diferente, veremos que o tema da intuição também se apresenta como problemático e de difícil tratamento quando como objeto de análise está em questão o próprio conhecimento matemático. O pressuposto da existência de um saber intuitivo que é anterior, ou mesmo de natureza diferente do conhecimento abstrato, tem não só consequências diretas na compreensão global da natureza do próprio campo disciplinar, como também, implicações sobre o ensino.

A título de exemplo, analisaremos a esse respeito, as discussões em torno das relações entre as dimensões experimental, intuitiva e abstrata do conhecimento geométrico. Como veremos, as implicações didáticas dessas discussões terão reflexos na produção de manuais escolares, e em reformas educacionais no contexto francês das décadas iniciais do século XX, e seus resultados também repercutirão em anos subsequentes no Brasil.

¹¹ No artigo *História e cultura em educação matemática: a produção da matemática do ensino*, Valente (2020) defende a adoção da terminologia *Matemática do Ensino* como possibilidade para compreensão da matemática que é característica da formação do professor. Segundo o autor, a dicotomia presente nas pesquisas atuais entre as noções de matemática acadêmica e de matemática escolar, tem pouco contribuído para o avanço teórico para compreensão dos saberes profissionais que são característicos da docência em matemática.

3. A INTUIÇÃO DO PONTO DE VISTA DO SABER MATEMÁTICO

Historicamente serão muitos os desafios enfrentados no campo da educação para transformar em teoria a compreensão de que processos intuitivos se constituiriam fundamentos de toda aprendizagem. De igual maneira, quando considerada do ponto de vista da filosofia da ciência, o papel da intuição no desenvolvimento do conhecimento também não parece ser algo de formulação teórica simples, como discutiremos a seguir.

O acesso a intuição como forma de ascender a realidade ideal dos fatos concretos, se expressa na conhecida dicotomia cartesiana: se somos corpo – *res extensa* – e também somos pensamento – *res cogitans* – onde e como se daria o encontro entre essas substâncias díspares? Dito em outros termos, como é possível que pelos sentidos, ou seja, pelo próprio corpo - que nos possibilitam o contato real e concreto com as coisas do mundo - ascender as representações ideais, entidades do pensamento, sobre as quais a razão irá operar para realizar a produção do conhecimento? “Como sucede essa miraculosa transubstanciação entre a imagem enquanto afecção do sensível no corpo, e a imagem enquanto ideia no pensamento, que não possui corporeidade nenhuma?” (Oliveira, 2015, p. 49). As respostas a essas questões do ponto de vista do conhecimento matemático vão produzir abordagens diferentes sobre como deveria ser o seu ensino, e sobre a própria natureza do saber matemático.

Para Heinzmann (2008) a intuição como fundamento da produção do conhecimento matemático deve ser compreendida pelo menos de duas maneiras: seja como analogia a percepção, e neste caso, a intuição seria uma forma de captar uma imagem que exprime a metáfora de uma visão pura. Como consequência, nesse primeira acepção, se atribui a intuição a capacidade de captar entidades extra mentais e ideais. Esta capacidade está relacionada a “uma concepção platonista que considera que os conceitos matemáticos, como um conjunto ou um número, existem em um mundo intangível com entidades independentes da atividade humana” (Heinzmann, 2008 p.3).

Uma segunda concepção do pensamento intuitivo, é a de que ele seria como que hipóteses iniciais, fontes de conhecimento, e como tais, falíveis. Neste caso a intuição matemática não seria a imagem refletida do conhecimento e dos objetos ideais. Intuição e teoria estariam em campos distintos, embora interligados. Os processos intuitivos como construção de sujeito que conhece, e os objetos ideais como fonte de um discurso teórico convenientemente regulado (Heinzmann, 2008).

Sem nos aprofundarmos nos desdobramentos das considerações teóricas expostas acima, afunilaremos nossas reflexões para pensarmos como variantes dessa maneira de

entender o papel da intuição na compreensão do objeto matemático, resultou em implicações no campo didático do ensino dessa disciplina, e de maneira específica, no ensino de geometria.

Nas décadas finais do século XIX no contexto francês, ganha força um movimento que vai enfatizar o caráter experimental das ciências matemáticas, esse movimento tem nos matemáticos-filósofos Emile Borel e Henri Poincaré, seus principais inspiradores. Considerado por muitos estudiosos como a última manifestação do empirismo francês, esse movimento vai culminar com a implantação da reforma educacional da França dos anos 1902/1905.

Relativamente ao ensino de geometria, a reforma vai questionar um ensino escolar que fosse orientado segundo os princípios hipotético-dedutivos euclidianos. Escreveu o texto normativo das reformas francesas Carlo Bourlet¹², para quem o ensino intuitivo de geometria deveria substituir a geometria rigorosa de Euclides por uma geometria verdadeiramente experimental. No entanto, a intuição pretendida por Carlo Bourlet diferentemente da proposta pestalozziana, dizia respeito aos elementos relacionados à estruturação interna própria do saber matemático e, portanto, à questões de ordem epistemológicas. Não obstante, sua proposta terá notáveis implicações didáticas, como veremos. Tomaremos as análises produzidas por Rudolf Bkouche (1991), sobre os fundamentos que impulsionaram as reformas francesas de 1902/1905, para melhor entender as implicações didáticas para o ensino de geometria da compreensão do papel da intuição na construção do saber geométrico.

Bkouche (1991) analisa como historicamente o ensino de geometria orientado por uma abordagem axiomática concorreu para o “esquecimento” dos aspectos intuitivo e experimental do saber - aqueles ainda não sistematizados como teoria - essência do pensamento euclidiano. O autor em suas análises procura discutir as seguintes questões: Em que sentido o caráter intuitivo do saber geométrico foi sublimado pela geometria euclidiana? Qual a alternativa para superação desse impasse de natureza didático-epistemológico?

Como exemplo ilustrativo de sua argumentação, Bkouche analisa a demonstração do primeiro caso de igualdade entre triângulos. Para ele tal proposição, primeira grande sentença

¹² Charles Émile Ernest, conhecido como Carlo Bourlet (1866-1913), foi professor de Geometria Descritiva e Mecânica. Durante sua carreira, publicou diversos trabalhos sobre matemática pura e matemática aplicada e livros escolares. Em 1891, motivado por problemas aplicados de matemática começou a estudar o movimento da bicicleta e publicou diversos artigos sobre o assunto. Trabalhou como professor no Liceu Lakanal (1891), no Liceu Henri VI (1892-1897) e, por fim, no Liceu Saint-Louis (1897-1906). A partir de 1896, ensinou matemática e estática gráfica na Escola Nacional de Belas-artes. No início do século XX, juntamente com Émile Borel, foi um dos promotores da reforma do ensino de matemática na França, o que o conduziu a escrever várias obras para o ensino secundário. Nessa reforma, defendeu a característica experimental da geometria (e de forma geral das matemáticas) como um dos pontos essenciais da reforma. Entre as obras publicadas, estão *Leçons d’algèbre*(1896), *Leçons de trigonométrie rectiligne* (1898), *Cours Abrégé de Géométrie* (1904) (Fantoni et al. 1994). Esta última obra de Carlo Boulet, bem como o livro *Nouveaux Eléments de Géométrie*, de Charles Méray publicado em 1874 e reeditado por Boulet em 1903 fazem referência ao ensino de uma geometria do movimento e apelo à ideia intuitiva do movimento e da evidência como critério de demonstração. As obras *Cours Abrégé de Géométrie* e *Nouveaux Eléments de Géométrie* vão figurar como obras referências no Brasil para a publicação em 1923 do livro *Geometria: observação e experiência* de Heitor Lyra da Silva.

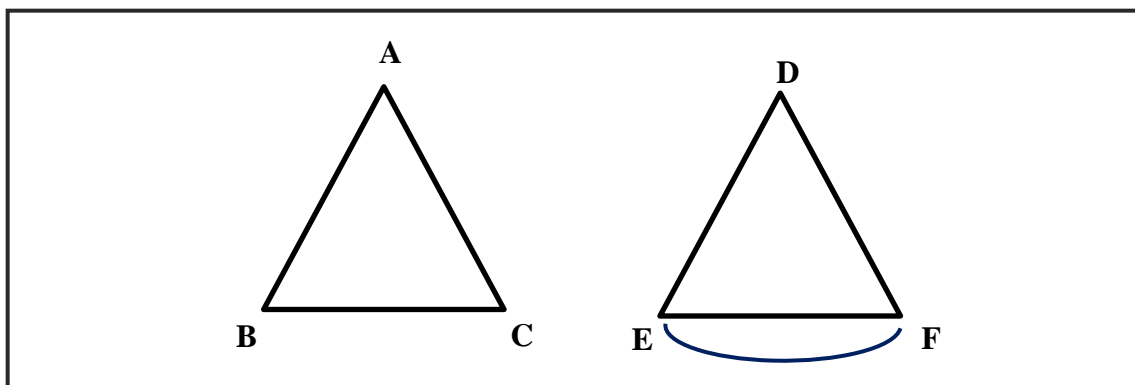
teórica euclidiana, não escapa a uma abordagem intuitiva. Retomemos os termos da proposição de Euclides, a quarta do livro I, para melhor compreender as considerações de Bkouche:

Caso dois triângulos tenham os dois lados iguais [aos] dois lados, cada um a cada um, e tenham o ângulo contido pelas retas iguais igual ao ângulo, também terão a base igual à base, e o triângulo será igual ao triângulo, e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, cada um a cada um, sob os quais se estendem os lados iguais¹³.

Bkouche, em sua argumentação, chama a atenção para o fato de que a necessária comprovação do teorema consistiria na sobreposição (o movimento de deslocamento) de um triângulo sob o outro. No entanto, essa simples “demonstração intuitiva” é substituída por todo um discurso que explica como deve ser feita essa aplicação. Discrição esquemática que pretende o esquecimento das propriedades físicas do objeto, para que assim se possa construí-lo enquanto objeto matemático.

Com efeito, a conhecida demonstração euclidiana proposta para a proposição quatro, parece pretender ofuscar o caráter empírico que a sustenta. Vejamos a demonstração dada para o primeiro caso de igualdade entre triângulos:

Figura 3 - Demonstração do primeiro caso de igualdade entre triângulos



Fonte: construído pelo autor a partir de Bicudo (2009), p.1

“Pois, o triângulo ABC, sendo ajustado sobre o triângulo DEF, e sendo posto, por um lado, o ponto A sobre o ponto D, e, por outro lado, a reta AB sobre a DE, também o ponto B se ajustará sobre o E, por ser a AB igual à DE; então, tendo se ajustado a AB sobre a DE, também a reta AC se ajustará sobre a DF, por ser o ângulo sob BAC igual ao sob EDF; desse modo, também o ponto C se ajustará sobre o ponto F, por ser, de novo, a AC igual à DF. Mas, por certo, também o B ajustou-se sobre o E; desse modo, a base BC se ajustará sobre a base EF. Pois se a base BC, tendo, por um lado, o B se ajustado sobre o E, e, por outro lado, o C sobre o F, não se ajustar sobre a EF, duas retas conterão uma área; o que é impossível. Portanto, a base BC ajustar-se-á sobre a EF e será igual a ela”¹⁴

¹³ Conforme: Bicudo, I. (2009). *Os elementos: Introdução e tradução diretamente do grego* (Vol. 1) Unesp. p.101.

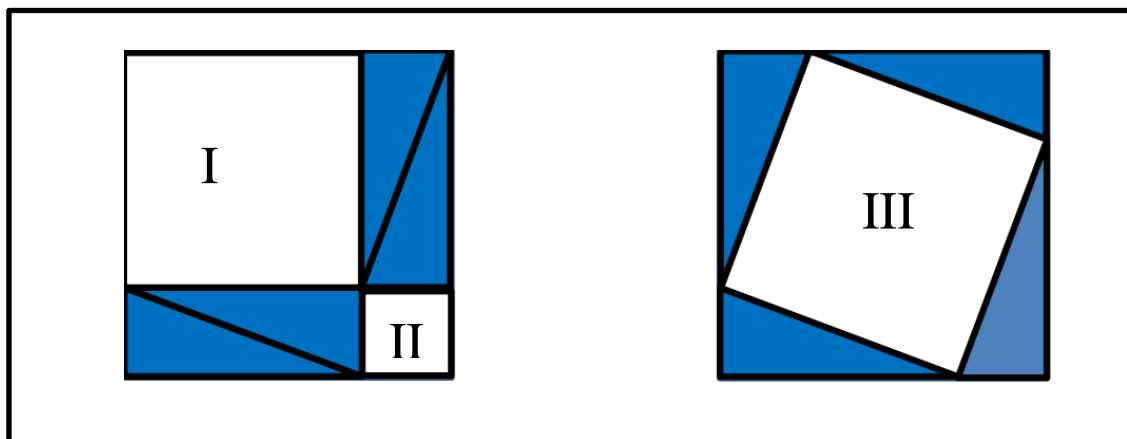
¹⁴ Idem.

Não obstante, o aspecto intuitivo do conhecimento geométrico já esteja presente desde as primeiras formulações teóricas de Euclides, a pretensão de universalidade do discurso teórico euclidiano reservou a essa dimensão do saber papel secundário. Para Bkouche, o “esquecimento” de uma geometria do movimento (intuitiva), exemplo clássico de uma demonstração experimental, em favor da construção ideal do objeto matemático pela via do discurso racional em Euclides, é:

Um modo exemplar de construção de um discurso racional baseado em dados do conhecimento mundano (os corpos sólidos e as figuras que os representam); se as definições, postulados e axiomas exercem o papel de enunciados primeiros, essas afirmações referem-se a um conhecimento intuitivo dos objetos estudados. Uma vez que estes enunciados tenham sido explicitados, podemos colocar em prática o discurso demonstrativo que torna possível, a partir das verdades primeiras enunciadas por axiomas e postulados, afirmar novas propriedades dos objetos estudados que são como verdades sobre o mundo. Assim, desenvolve uma forma de conhecimento do mundo fundada pelo uso exclusivo de um discurso devidamente regulado não só para conhecer essas verdades, mas também as razões para estas verdades. Isto é o que baseia a necessidade das verdades conhecidas pelo caminho da demonstração, estas verdades não são apenas verdadeiras, mas não podem não ser verdadeiras. (Bkouche, 2004, p.5, trad. livre).

Tomemos por fim, um segundo exemplo explicativo apresentado por Bkouche. Trata-se da demonstração Hindu do Teorema de Pitágoras (Fig. 4), tomado da obra *Les Mathematiques et la Réalité* de Ferdinand Gonseth¹⁵, autor cuja produção subsidia suas análises:

Figura 4 - Demonstração hindu do teorema de Pitágoras



Fonte: Gonseth (1936 p. 325)

A referida demonstração consiste em provar por meio do deslocamento dos triângulos em azul, que a soma das áreas dos quadros I e II é igual a área do quadrado III. Essa conhecida

¹⁵ A obra *Les Mathematiques et la Réalité* de Ferdinand Gonseth vai figurar entre as referências adotadas por Lydia Lamparelli no contexto paulista dos anos 1960 e subsidiará a elaboração de material didático-pedagógico para o ensino de matemática no estado. Para Almeida (2021), Lydia participa ativamente na produção de novos documentos, com novas sistematizações de saberes que orientariam a prática docente dos professores que ensinam matemática.

demonstração do teorema de Pitágoras faz apelo ao pensamento intuitivo, permitindo arranjos e rearranjos que coloca em segundo plano os argumentos demonstrativos hipotético-dedutivos. Para Gonseth, no caso hindu “a demonstração assim definida dentro de um quadro intuitivo, como uma reconstrução analógica e esquemática, é, de certo modo, a primeira forma de construção teórica” (Gonseth, 1936, p. 325, trad. livre). Este exemplo adotado por Gonseth (1936) coloca em questão a legitimidade da marcha dedutiva e a abordagem teórica pura como recurso a demonstração e ao ensino.

A premissa que orienta as análises desenvolvidas por Gonseth é a de que o conhecimento geométrico se funda sobre três aspectos inseparáveis: intuitivo, experimental e teórico. Estes três aspectos do conhecimento se relacionam de maneira tal que “em todos os experimentos há um resíduo de abstração, e em toda abstração (matemática) há um resíduo intuitivo”. E conclui Gonseth, “a distinção entre abstrato e experimental é apenas de modelo, mas não de essência” (Gonseth, 1936, p. 107).

No entanto, lembremos mais uma vez que a noção de “intuitivo” adotada, não se trata aqui de uma referência a “intuição sensível” pestalozziana, assumida como ponto de partida da aprendizagem pela pensamento intuicionista da chamada lições das coisas. Antes, a evidência como resultado da intuição, seria produção histórica e portanto variável a cada tempo, nesse sentido caberia a história da matemática (e mais geralmente a história da ciência) captar as mudanças e o conseqüente processo de renovação do aspecto intuitivo do conhecimento. (GONSETH, 1936)

Da exposição realizada, importa-nos para os fins desse ensaio demarcar em específico como diferentes compreensões da relação entre conhecimento e processos intuitivos, concorreram para construção de “invariantes” que acabaram por parameterizar o ensino de geometria, e conseqüentemente, a atuação profissional do professor. Não é difícil encontrar alguns dos elementos aqui apresentados, sistematizados em leis, livros e materiais didáticos, como saberes profissionais necessários as práticas atuais de ensino de geometria. A desnaturalização desses saberes por uma abordagem historiográfica interessada em compreender os processos de constituição dos seus fundamentos, pode contribuir para melhor compreender o próprio ofício docente, ampliando as possibilidades de atuação do professor, e no limite, concorrendo para produção de uma epistemologia dos saberes do ensino. Cumpre de igual maneira, de um lado, às pesquisas historiográficas no campo da educação matemática, e de outro, às investigações em história da matemática, buscarem pontos de interconexão entre suas produções. Seja interessadas em investigar o processo de elaboração dos mecanismos internos de compreensão daquele que aprende, ou seja interessadas no processo de

constituição do próprio saber enquanto campo disciplinar, as pesquisas sobre o papel que ocupa a noção de *intuição* na definição do conhecimento matemático parece-nos um desses pontos intersecção entre as produções no campo da historiografia que se apresenta como um convite aberto a investigação.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nos detemos em nossas análises neste artigo em discutir como o diálogo entre as produções no campo de investigação da História da Educação Matemática, por um lado, e da História da Matemática, por outro, poderiam contribuir para compreensão do processo de constituição dos saberes necessários ao ensino de geometria. Conforme buscamos demonstrar, a elaboração de um ferramental para atuação do professor se apresenta como um processo complexo que inter-relaciona saberes necessários para o ensino, e o saber enquanto campo disciplinar propriamente dito. Como procuramos demonstrar a implicação parece ser direta sobre ambos. De maneira específica, analisamos como o papel atribuído a noção de *intuição* participou da elaboração de abordagens didático-pedagógicas para o ensino de geometria, bem como, concorreu para o processo de compreensão do que seria o próprio saber matemático enquanto campo disciplinar. A partir das análises realizadas procuramos defender o ponto de vista do necessário intercruzamento dos resultados das produções no campo da História da Educação Matemática e da História da Matemática para o desenvolvimento das pesquisas que investigam os saberes necessários ao ensino de geometria. Para tanto parece-nos necessário, considerando-se as especificidades que caracterizam cada campo de investigação, identificar produções que possibilitem compreender historicamente os fundamentos e as transformações que caracterizam os saberes da profissão do professor que ensina matemática. Nesse sentido, uma abordagem historiográfica se constituiria menos opção de visita acrítica a fatos de um passado remoto, do que a possibilidade real de compreensão e desnaturalização dos saberes constitutivos da profissão do ensino.

Por fim, como possibilidade de aprofundamento das análises desenvolvidas, parece-nos interessante prosseguir as investigações no sentido de melhor compreender em que medida as diferentes acepções da noção *intuição* fizeram escola na elaboração de proposições didáticas e pedagógicas no Brasil. A título de exemplo, tome-se o caso do uso das construções com régua e compasso como recurso para o ensino de geometria adotado em manuais escolares publicados no Brasil na vida do século XIX. Com efeito, circulam em nosso país obras francesas que

vão sistematizar uma proposta didática para o ensino de geometria a partir do uso de instrumentos de medida e de construção. Estas obras se orientam segundo os pressuposto de que instrumentos como régua e compasso apareceriam na história das ciências como que a materialização das idealidades matemáticas. Livros como *Nouveaux Eléments de Géométrie* de Charles Méray em 1874, e *Cours Abrégé de Géométrie* em 1903, que se orientam nessa perspectiva teórica, vão figurar entre as referências para livros publicados no Brasil e orientar produções didáticas no país. Nesse sentido, parece-nos um caminho aberto a investigação, analisar como a noção de *intuição* que figuram nestas obras influenciaram as publicações brasileiras. Quais saberes didáticos e pedagógicos para o ensino de geometria elas comportam? E neste caso, esses saberes apresentam consolidados? Em quais práticas docentes se dão a conhecer? Estas e outras questões, ao nosso ver são um convite a continuação das pesquisas.

REFERÊNCIAS

- Almeida, A. F. D. (2021). *Processos e dinâmicas de produção de novas matemáticas para o ensino e para a formação de professores: a expertise de Lydia Lamparelli*, São Paulo (1961-1985) (Dissertação de doutorado).
- Assude, T., & Gispert, H. (2003). *Les mathématiques et le recours à la pratique: une finalité ou une démarche d'enseignement*. In *L'École républicaine et la question des savoirs. Enquête au cœur du Dictionnaire de pédagogie de F. Buisson*, 175-196.
- Bastos, M. H. C. (2000). *Ferdinand Buisson no Brasil: pistas, vestígios e sinais de suas ideias pedagógicas (1870-1900)*. *Revista História da Educação*, 4(8), 79-109.
- Bicudo, I. (2009). *Os elementos: Introdução e tradução diretamente do grego* (Vol. 1) Unesp.
- Bloch, M. (2001). *Apologia da história ou o ofício de historiador*. Rio de Janeiro: J. Zahar.
- Bkouche, R. (1991). *Variations autour de la réforme de 1902/1905*. H. Gispert, *La France mathématique. Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences*, 34, 181-213.
- Bkouche, R. (2004). *La géométrie élémentaire, une science physique?* In.: *Enseigner la Géométrie dans le Secondaire*, Commission Inter-IREM Géométrie (Liège 2003), IREM de Reims.
- Chavannes, D. A. (1805). *Exposé de la Méthode Élémentaire de H. Pestalozzi*, 1805.
- D'Enfert, R., Gispert-Chambaz, H., & Hélayel, J. (2003). *L'enseignement mathématique à l'école primaire: de la Révolution à nos jours. 1791-1914*. INRP.
- Gonseth, F. (1936). *Les mathématiques et la réalité: essai sur la méthode axiomatique*.
- Hébrard, J. (1990). *A escolarização dos saberes elementares na era moderna*. *Teoria & Educação*, [2], 65-110.
- Heinzmann, G. (2008). *Intuition et arithmétique*. In.: *Methodisches Denken im Kontext* (pp. 191-201). Brill mentis.

- Leme da Silva, M. C. (2014). *Desenho e geometria na escola primária: um casamento duradouro que termina com separação litigiosa*. História da Educação, 18(42), 61-73.
- Oliveira, A.O (2015). *Incerteza e descrença*. In.: Mutações: a invenção das crenças. Edições Sesc.
- Rosa, J. G. (2019). *Grande sertão: veredas*. Editora Companhia das Letras.
- Trouvé, A. (2008). *La notion de savoir élémentaire à l'école: doctrines et enjeux*. Editions L'Harmattan.
- Valdemarin, V. T. (2004). *Estudando as lições de coisas: análise dos fundamentos filosóficos do método de ensino intuitivo*. Autores Associados.
- Valente, W. R. (2012). *Tempos de Império: a trajetória da geometria como um saber escolar para o curso primário*. Revista Brasileira de História da Educação, 12(3 [30]), 73-94.
- Valente, W. R. (2020). *História e cultura em educação matemática: a produção da matemática do ensino*. REMATEC, 15(36), 164-174.