Revista de História da Educação Matemática
HISTEMAT

ISSN: 2447-6447
Submetido: 18/06/2022
Aprovado: 22/08/2022

SOBRE LOS PROCESOS DE DEMOSTRACIÓN Y EL CONTEXTO DE PRODUCCIÓN DE LA MEMORIA *SUR LES INTÉGRALES DÉFINIES* DE AUGUSTÍN-LOUIS CAUCHY

SOBRE OS PROCESSOS DE DEMONSTRAÇÃO E CONTEXTO DE PRODUÇÃO DE AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY'S MEMOIRE *SUR LES INTÉGRALES DÉFINIES*

José Gerardo Piña-Aguirre[1]
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-8201-7110

Rosa María Farfán Márquez[2]
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-1229-8521

RESUMEN

Con el objetivo de caracterizar formas intrínsecas de construcción de conocimiento matemático en Variable Compleja, en este artículo se presenta un análisis bifronte de la memoria *Sur les Intégrales Définies* de Augustin-Louis Cauchy; trabajo donde se establece un resultado central de la Variable Compleja denominado el Teorema Integral de Cauchy. Por medio de un análisis del contexto de producción de la obra, se develó que la búsqueda de consistencia interna del aparato matemático es el derrotero que propició la construcción de conocimiento matemático en torno al teorema. El análisis contextual de la memoria se robusteció por medio de la identificación de los procesos de demostración que le permitieron al autor comunicar su quehacer matemático. La conjugación de ambos análisis coadyuvo al establecimiento de una conjetura que permite describir formas de trabajo matemático que propiciaron la construcción de conocimiento en Variable Compleja.
Palabras clave: Procesos de demostración. Variable Compleja. Análisis Cualitativo de Contenido. Histórico-epistemológico. Hipótesis epistemológicas.

RESUMO

Com o objetivo de caracterizar formas intrínsecas de construção do conhecimento matemático em Variável Complexa, este artigo apresenta uma análise bifronte da memória de Augustin-Louis Cauchy *Sur les Intégrales Définies*, um trabalho no qual é estabelecido um resultado central da Variável Complexa chamado Teorema Integral de Cauchy. Através de uma análise do contexto de produção da obra, foi revelado que a busca de consistência interna do aparelho matemático é o caminho que levou à construção do conhecimento matemático em torno do teorema. A análise contextual da memória foi reforçada pela identificação dos processos de demonstração que permitiram ao autor comunicar seu trabalho matemático. A combinação de ambas as análises contribuiu para

[1] Maestro en Ciencias por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN). Estudiante del doctorado en ciencias en Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN), San Pedro de Zacatenco, Ciudad de México, México. Dirección para la correspondencia: Av. Instituto Politécnico Nacional, 2508, San Pedro de Zacatenco, Ciudad de México, México, C.P: 07360. E-mail: gerardo.pina@cinvestav.mx.
[2] Doctora en Ciencias por el centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN). Investigadora Titular del departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN), San Pedro de Zacatenco, Ciudad de México, México. Dirección para la correspondencia: Av. Instituto Politécnico Nacional, 2508, San Pedro de Zacatenco, Ciudad de México, México, C.P: 07360. E-mail: rfarfan@cinvestav.mx.

o estabelecimento de uma conjectura que nos permite descrever formas de trabalho matemático que favoreceram a construção do conhecimento em Variável Complexa.
Palavras-chave: Processos de demonstração. Variável Complexa. Análise Qualitativa de Conteúdo. Histórico-epistemológico. Hipóteses epistemológicas.

INTRODUCCIÓN

De acuerdo con Stewart y Tall (2018) el desarrollo histórico de la Variable Compleja fue el resultado directo del interés de los matemáticos por generalizar resultados del Análisis Real. Según los autores, en menos de medio siglo se logró concretar la mayor parte de los resultados más relevantes que estructuran a la Variable Compleja. A pesar de que el desarrollo del Análisis Complejo fue esencialmente breve, en comparación con los tres siglos que tomó estructurar un tratamiento satisfactorio de los números complejos (Windred, 1929), su introducción al sistema educativo no está libre de complicaciones. Estudios como el de Hancock (2019) y Danenhower (2000) reportan errores y dificultades que se suscitaron al estudiar cómo estudiantes universitarios trabajan con la integral compleja y el tránsito entre diferentes representaciones de números complejos. En el caso de Hancock, el autor concluye que los participantes extendieron erróneamente su intuición sobre la integral real al dominio complejo, mientras que Danenhower reporta que los participantes no pudieron recurrir a un razonamiento geométrico y a la forma exponencial de los números complejos de forma unificada y coherente.

Para atender a este tipo de problemas, en Matemática Educativa existen investigaciones que han centrado su atención en identificar cómo matemáticos en formación y matemáticos profesionales razonan geométricamente con diferentes objetos matemáticos enmarcados en la teoría de funciones de variable compleja (Soto-Johnson et al, 2012; Soto-Johnson y Troup, 2014; Soto-Johnson et al., 2016, Oehrtmann et al., 2019; Soto-Johnson y Hancock, 2019), por otro lado, otro tipo de estudios han incorporado tecnología digital con el objetivo de hacer más accesibles resultados de esta rama de la Matemática (Regis, 2013; Dittman et al., 2016; Ponce, 2019).

Una característica que comparten las investigaciones anteriores es que desde el escenario contemporáneo buscan dotar de significados a diversos objetos matemáticos de la Variable Compleja. Lejos de estas aproximaciones, en Cantoral, Farfán, Hitt y Rigo (1987) se consideraron circunstancias de orden social con el objetivo de estudiar la epistemología de logaritmo de números negativos en su escenario de origen; escenario íntimamente ligado a los orígenes de la Variable Compleja.

Interesados en develar formas de trabajo matemático propias de la Variable Compleja, en esta investigación se seleccionó un objeto matemático central a esta rama de la Matemática conocido como el Teorema Integral de Cauchy, con el objetivo de indagar en obras originales cómo es que fue abordado por los sujetos históricos que contribuyeron a su establecimiento.

Según Titchmarsh (1939), el Teorema afirma lo siguiente:

Si $f(z)$ es una función analítica y uni-valuada dentro y sobre un contorno C, entonces

$$\int_C f(z)dz = 0$$

Este resultado es fundamental para la teoría de funciones complejas por dos motivos. Por un lado, permite estructurar resultados que no poseen homólogo en el Análisis Real, como lo es la fórmula integral de Cauchy (Markushevich, 1985). Por otro lado, el establecimiento del teorema posibilita la matematización de fenómenos físicos, como el estudio de fluidos (Polya y Latta, 1974).

La obra seleccionada para estudiar al teorema es la memoria *Sur les Intégrales Définies* (1814) de Augustin-Louis Cauchy, la cual se caracteriza por presentar albores de este resultado (Ettlinger, 1922). A partir de ahora nos referiremos a *Sur les Intégrales Définies* sólo con la palabra memoria u obra, o cuando el caso lo amerite por su nombre.

De manera general, el análisis de la memoria se orientó por tres principios del marco teórico de la Socioepistemología (Cantoral, 2013). Particularmente, la obra se analizó a través de develar su contexto de producción (Espinoza, 2009) atendiendo a un análisis de la actividad matemática por medio de la identificación de los procesos de demostración (Crespo, 2005) que le permitieron al autor comunicar sus resultados. Como resultado principal del estudio se estableció una hipótesis epistemológica, la cual se concibe como una conjetura que permite describir procesos de producción de conocimiento relativos al establecimiento del Teorema.

1. MARCO TEÓRICO

Gómez (2003) señala que en Matemática Educativa los estudios históricos-epistemológicos de corte sociocultural se cimientan bajo la premisa de que “el conocimiento está profundamente arraigado y conformado por su contexto socio cultural” (p.82). Es en este orden de ideas, el análisis de la memoria se realizó a través de concebir una forma de producción de conocimiento matemático desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (Cantoral, 2013), conocida como la Socioepistemología.

La Socioepistemología se encarga de estudiar los procesos de producción y difusión de conocimiento matemático en diversos ámbitos de la vida humana. Este marco teórico se cimienta en cuatro principios, tres de ellos permiten conceptualizar una forma de producción de conocimiento matemático por parte de sujetos históricos. En primera instancia, el *principio* *de racionalidad contextualizada* atiende a la producción de conocimiento en función del contexto en el que los individuos se ven involucrados en un momento y lugar determinado. Por otro lado, *el principio del relativismo epistemológico* reconoce que "la validez de un conocimiento es juzgada en relación con los criterios de la comunidad en la que se gesta" (Cruz-Márquez, 2018, p.33). Aunado a estos, el principio de *resignificación progresiva* estipula que al conocimiento se le dota de distintos significados en el desarrollo de la vida misma de los humanos al transitar por diversos contextos (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015).

El principio de racionalidad contextualizada permite conceptualizar a Cauchy como un representante de las formas de ver y hacer ciencia de su época, por lo que se concibe que su memoria de 1814 es más que un libro antiguo de matemáticas; esta obra acarrea una intencionalidad para atender a problemas de la época en que fue escrita. El principio del relativismo epistemológico permite reconocer que la comunidad científica de la época de Cauchy jugó un rol para la aceptación y diseminación del conocimiento establecido por el autor. Finalmente, el principio de resignificación progresiva permite aceptar que las formas de producción y uso de conocimiento utilizadas por Cauchy se trastocaron en el desarrollo mismo de la Matemática como ciencia.

Atender al contexto de producción de la memoria permitió desentrañar el motivo por el cual Cauchy escribe la obra, el cual refiere a la fundamentación de métodos y procedimientos del aparato matemático de la época. La fundamentación de métodos y procedimientos está íntimamente ligada a la práctica de demostrar que se suscita en el quehacer de matemáticos profesionales, lo cual orientó el análisis de la actividad matemática de la obra por medio de los procesos de demostración que subyacen al Teorema.

En torno a la práctica de demostrar, Crespo (2005) presenta diferentes categorías que permiten identificar elementos que han constituido a las demostraciones en el desarrollo histórico de la Matemática. En esta investigación a estos elementos se les conceptualiza como *procesos de demostración* que le permitieron a Cauchy comunicar su actividad matemática. A continuación se presentan las cuatro categorías de la autora.

De manera general, los elementos a los que alude Crespo permiten distinguir la estructura lógica de los enunciados de un teorema a través de la categoría *tipos,* mientras que las categorías *métodos* y *estilos* refieren respectivamente a los procedimientos lógicos y procedimientos matemáticos de la propia demostración. Finalmente, la categoría *modo* alude a los procedimientos de exposición del teorema.

Específicamente, la categoría *tipo* de demostración refiere a que los enunciados de un teorema involucran por lo menos una implicación a través de condiciones necesarias y/o suficientes. Esta categoría también permite determinar si la propiedad afirmada por el teorema alude a todos los elementos del dominio en el que se esté trabajando, o bien, a algunos de ellos.

Una vez identificada la estructura lógica del enunciado, las categorías *métodos* y *estilos* permiten distinguir, respectivamente, los procedimientos lógicos y los procedimientos matemáticos que se utilizan en la demostración de un teorema. Por procedimientos lógicos se entienden aquellos como las demostraciones por silogismo, en las cuales para demostrar un enunciado de la forma $P \Longrightarrow Q$, se demuestra $P \Longrightarrow M$ y $M \Longrightarrow Q$, done M es una proposición intermedia. Otro ejemplo de este tipo de procedimientos son las demostraciones por analogía, en estas se utiliza la semejanza entre algunos aspectos de dos teorías matemáticas con la finalidad de extender la validez de algunas propiedades de una teoría a la otra. Por procedimientos matemáticos, Crespo señala que cada rama de la Matemática ha desarrollado estilos propios de argumentación, por ejemplo, el estilo algebraico se caracteriza por utilizar símbolos para representar a los objetos matemáticos que intervienen en un teorema, los cuales posibilitan su demostración al restringirse el uso de propiedades entre ellos. Se recomienda consultar a Crespo (2005) para la tipificación completa de los procedimientos lógicos y los procedimientos matemáticos.

Finalmente, los procedimientos de exposición del teorema refieren a la forma en que se encadenan las ideas para llegar a la conclusión del teorema. La autora propone dos formas, a través de demostraciones deductivas en las que se procede de lo general a lo particular, o las demostraciones inductivas en las que se procede en sentido contrario.

En la siguiente sección del artículo se presenta una propuesta metodológica que permiten atender cómo estudiar el contexto de producción de la memoria *Sur les Intégrales Définies*, así como los respectivos procesos de demostración que le subyacen.

2. METODOLOGÍA

Esta investigación se apega a una idea de Cruz-Márquez (2018) para el análisis de obras originales. Según el autor, el estudio de producciones intelectuales de sujetos históricos no debe de soslayar el contexto de producción que las permea. Rescatar este contexto de producción es una forma en que se puede tomar distancia de las concepciones que el discurso escolar vigente reproduce sobre las formas de hacer matemáticas. En este orden de ideas, en esta investigación, el principio de racionalidad contextualizada permite concebir a la memoria *Sur les Intégrales*

Définies como una obra que no se puede desprender de las formas de pensar que imperaban en la época en la que fue escrita. Debido a esto, las variables que delimitan el contexto de producción de la obra se atienden por medio de una propuesta metodológica configurada dentro del marco Socioepistemológico.

Según Espinoza (2009) las obras originales, más que entenderlas como libros antiguos de matemáticas, se pueden entender como una producción con historia, como un objeto de difusión y como parte de una expresión intelectual más global. El epígrafe *una producción con historia* refiere a que la obra se entienda como producto de un ser humano con una cosmovisión particular, por lo cual es importante estudiar la vida personal y profesional del autor, interesándonos por los problemas abordados por las ciencias de su época. El título *un objeto de difusión* alude a que la publicación de una obra matemática acarrea una intencionalidad de comunicar su contenido, por lo que es necesario considerar el tipo de obra y sus destinatarios. Finalmente, entender a la obra como *parte de una expresión intelectual más global* refiere a que la obra forma parte de una colección de ideas que evolucionan en la totalidad de las obras del autor, por lo cual esta se deben estudiar con una mirada general de las obras relacionadas con ella.

La mirada tripartita que proporciona Espinoza para estudiar el contexto de producción de obras originales se complementó con el análisis de la actividad matemática de Cauchy a través de los procesos de demostración de Crespo (2005), esto con el objetivo de comprender la manera en que Cauchy sustenta su proceder matemático dentro del propio aparato matemático. Previo a la identificación de los *tipos*, *métodos*, *estilos* y *modos* de demostración utilizados por el autor, fue necesario un tratamiento de la obra. En primera instancia, gracias a Ettlinger (1922), se delimitó el estudio de la actividad matemática a lo expuesto en las páginas 599 a 622, ya que en estas se atiende al Teorema Integral de Cauchy. Posteriormente se realizó una traducción al español de estas páginas, lo que permitió reestructurar su contenido, y es a partir de esta reestructuración que se identifican los procesos de demostración que permean el escrito.

3. ANÁLISIS Y RESULTADOS

En esta sección del artículo se presenta el análisis del contexto de producción de la obra, acompañado por la identificación de los procesos de demostración que subyacen a la memoria.

La conjugación de ambas visiones permite conjeturar formas de producción de conocimiento matemático relativas al Teorema Integral de Cauchy.

3.1 Análisis del contexto de producción de la obra.

La memoria *Sur les Intégrales Définies* es entendida como *una producción con historia* por el trabajo de Belhoste (1991). El autor estipula que un año posterior a la publicación de la memoria, Cauchy obtiene una plaza como profesor en la *École Royale Polytechnique* y deja a un lado sus trabajos en ingeniería. A continuación se presenta una forma en que Cauchy concebía al conocimiento en los años previos a la publicación de la memoria, años en los que está en busca de un cambio de escenario de su vida como ingeniero a su vida como profesor.

En 1811, Cauchy exhibe su opinión sobre las ciencias exactas de principios del *siglo XIX* a través de las siguientes palabras:

> ¿Qué puedo decir de las ciencias exactas? La mayor parte de ellas parecen haber sido ya llevadas a su más alto estado de desarrollo. La aritmética, la geometría, el álgebra y las matemáticas avanzadas son ciencias que se pueden considerar, con razón, como completadas, por así decirlo; y no queda nada más por hacer con ellas, excepto encontrar nuevas áreas de aplicaciones[3] (Cauchy, 1811, citado por Belhoste, 1991, p.28).

La descripción que hace Cauchy de la Matemática como *completa* permite señalar que una ruta de acción para su desarrollo es el esclarecimiento de métodos y procedimientos utilizados en ella. Particularmente, la propuesta de un método alternativo de validación es el principal objetivo de la memoria de 1814, en palabras de Cauchy: “Concebí la esperanza de establecer el pasaje de lo real a lo imaginario sobre un análisis directo y riguroso; y mis investigaciones me llevaron al método que es objeto de esta Memoria[4]” (Cauchy, 1814, p.612).

El pasaje de lo real a lo imaginario al que alude Cauchy se puede enmarcar en un fenómeno denominado la generalidad del álgebra, descrita por Freudenthal (1971) como

> La generalidad del álgebra [...] supone que lo que es cierto para los números reales es cierto para los números complejos; que lo que es cierto para las magnitudes finitas es cierto para las infinitesimales; que lo que es cierto para las series convergentes es cierto para las divergentes[5] (pp.135-136).

Se afirma que el pasaje de lo real a lo imaginario se enmarca en la generalidad del álgebra porque este se puede concebir como una heurística que permite extender resultados

[3]What can I say about the exact sciences? Most of them seem to have already been carried forth to their highest state of development. Arithmetic, geometry, algebra, and higher mathematics are sciences that can rightly be regarded as having been completed, as it were; and nothing more remains to be done with them except to find new areas of useful applications.

[4] J’ai conçlu l’espoir d’établir le passage du réel à l’imaginaire sur une analyse directe et rigoureuse ; et mes recherches m’ont conduit à la méthode qui fait l’objet de ce Mémoire.

[5] The generality of algebra […] assumed that what is true for real numbers is true for complex numbers; that what is true for finite magnitudes is true for infinitesimals; that what is true for convergent series is true for divergent ones.

fuera del dominio en el que fueron configurados. A modo de ejemplo, Larivière (2017) expone que esta forma de trabajo matemático es lo que le permitió a Poisson calcular el valor de la integral

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$$

A través del cambio de variable $x = (-\cos z + sen\ z\sqrt{-1})$, Poisson concluye lo siguiente

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \int_{0}^{(2n+1)\pi} \frac{-\sqrt{-1}\left(\cos z + sen\ z\sqrt{-1}\right)}{-\left(\cos z + sen\ z\sqrt{-1}\right)}\ dz$$
$$= \int_{0}^{(2n+1)\pi} \sqrt{-1}\ dz = (2n+1)\pi\sqrt{-1}$$

Nótese que el método empleado por Poisson consiste en que la variable x tome valores complejos. Es decir, la generalidad del simbolismo algebraico permitió atribuir un alcance indefinido a la variable involucrada en la integral. Según Smithies (1997), el método utilizado por Poisson también fue utilizado por otros personajes, como Johann Bernoulli y Euler, con el objetivo de calcular el valor de otras integrales. En la misma obra, Smithies afirma que discutir sobre la validez de este método para el cálculo de integrales es lo que motiva el escrito de la memoria analizada en esta investigación.

El objetivo de Cauchy de establecer el pasaje de lo real a lo imaginario sobre un análisis directo y riguroso es lo que permite concebir a la obra como *un objeto de difusión*, en cuanto que la comunicación de un método alternativo para el cálculo de integrales es un motivo por el cual Cauchy escribe la memoria. Cabe aclarar que el establecimiento del método propuesto por Cauchy se concibe como un desarrollo del aparato matemático que no atiende a otros dominios epistemológicos fuera de la Matemática. De acuerdo con Belhoste (1991), esta memoria de Cauchy es el primer trabajo del autor enmarcado en el Análisis Matemático y es una obra que le permite al autor comunicar a sus contemporáneos las habilidades que le permitieron incorporarse a la comunidad científica de la época.

Con el objetivo de mostrar algunas conclusiones a las que llegó Cauchy en su desarrollo del aparato matemático, sin atender a otros dominios epistemológicos, a continuación se presentan resultados del trabajo de Larivière (2017) y Espinoza (2009) relativos al *Cours d'analyse* de Cauchy de 1821. Según Larivière, Cauchy estaba en desacuerdo con conceptualizar al álgebra como una aritmética universal en la que las cantidades utilizadas poseen un lenguaje tan general que permiten extender expresiones algébricas fuera del domino en el que fueron configuradas. Para Larivère, esta celebre obra de Cauchy busca desprenderse del pasaje de lo real a lo imaginario, en cuanto a que uno de los objetivos de la obra es clarificar en qué condiciones se pueden extender ciertas expresiones fuera de su dominio de aplicabilidad.

Por otro lado, Espinoza (2009) estipula que el *Cours d'analyse* es una obra con intencionalidad didáctica que tiene por objetivo reorganizar los conocimientos matemáticos del Cálculo a partir del concepto de límite. Según el autor, esta obra no presenta "indicios de aplicaciones a la geometría o a la mecánica, o a ninguna ciencia de la época"(p.77), lo que permite conceptualizar a este trabajo de Cauchy como una obra que no tiene intención de atender a otros dominios fuera del aparato matemático. El libro se enmarca en una racionalidad de la Matemática fundada en sí misma, en la que "el cambio de racionalidad de lo sensible al desprendimiento de lo sensible trae un cambio metodológico, de la inducción a la deducción, de la generalización a la abstracción" (p.94).

A modo de resumen, la investigación de Larivière (2017) permite conceptualizar el *Cours d'analyse* como una obra que busca atender al desarrollo de la Matemática dentro del mismo aparato matemático. Esto permite entender a la memoria *Sur les Intégrales Définies* como *parte de una expresión intelectual más global*. Esta obra forma parte de una colección de ideas de Cauchy que desde 1814 evolucionaron hasta desencadenar en una reorganización del Cálculo, la cual, según Espinoza (2009), difiere del paradigma imperante de la época que relacionaba la matemática con el conocimiento sensible del mundo.

Con esto se concluye el análisis del contexto de producción de la memoria. Su configuración a través de la propuesta metodológica de Espinoza (2009), que se centra en ver la obra como una producción con historia, nos permite entender cómo Cauchy conceptualizaba al conocimiento científico de la época. Derivado de entender a la obra como un objeto de difusión, se develan los motivos por los cuales Cauchy atiende a la clarificación de métodos y procedimientos matemáticos de la época. Finalmente, analizar a la obra como parte de una expresión intelectual más global contribuye a que se ubique en tiempo y espacio la evolución de las ideas del autor.

Del análisis del contexto de producción se rescata que en la memoria lo que suscita la construcción de conocimiento matemático es la búsqueda de consistencia interna del aparato matemático. En esta investigación, a esta búsqueda se le reconoce como al desarrollo de la Matemática que no atiende a otros dominios de conocimiento. Particularmente, la propuesta de un método alternativo para el cálculo de integrales se enmarca en dicha búsqueda, por lo que se afirma que el escenario que posibilitó atender al Teorema Integral de Cauchy en la obra *Sur les Intégrales Definies* fue la búsqueda de consistencia interna del aparato matemático.

3.2 Análisis de los procesos de demostración de la obra

En la sección precedente se identificó que en *Sur les Intégrales Définies* el Teorema Integral de Cauchy emerge por la búsqueda de consistencia interna del aparato matemático. A raíz de esto, el estudio de la actividad matemática del autor se remitió a la identificación de los procesos de demostración matemática que le permitieron a Cauchy comunicar su proceder matemático. Se optó por esta ruta de análisis ya que la búsqueda de consistencia interna se conceptualiza como un escenario de producción de conocimiento atendido por profesionales de la Matemática y, gracias a investigaciones como la de Crespo (2005), se han podido caracterizar formas de comunicación intrínsecas al aparato matemático.

Para comunicar los resultados de los procesos de demostración se optó por presentar una traducción libre y fiel de la actividad matemática de Cauchy bajo los epígrafes *Proceder matemático de Cauchy N.º*. Derivado de que la categoría *tipos* de demostración permite estructurar las proposiciones de Cauchy en cuanto a su estructura lógica, bajo los epígrafes *Reestructuración N.º* se exhibe una reestructuración (desprovista de modificaciones y opiniones desde la matemática contemporánea) de la actividad matemática de Cauchy en términos de teoremas y sus respectivas demostraciones. Finalmente, en la reestructuración se identifican los *métodos, estilos* y *modos* de demostración bajo los epígrafes *Procesos matemáticos en la obra de Cauchy N.º*. A continuación se presenta el análisis de la actividad matemática de Cauchy.

Proceder matemático de Cauchy 1

Sea $f(y)$ cualquier función de la variable y, supongamos que y es una función de las variables x y z: El coeficiente diferencial de la integral

$$\int f(y)dy$$

tomado respecto a x será

$$f(y)\frac{dy}{dx}$$

y el coeficiente diferencial de la misma integral, relativo a z, será

$$f(y)\frac{dy}{dz}$$

En lo que respecta al coeficiente diferencial de segundo orden, relativo a las dos variables x y z, lo podemos designar por

$$\frac{d\left[f(y)\frac{dy}{dx}\right]}{dz}$$

o por

$$\frac{d\left[f(y)\frac{dy}{dz}\right]}{dx}$$

y tendremos

$$(1)\quad \frac{d\left[f(y)\frac{dy}{dx}\right]}{dz}=\frac{d\left[f(y)\frac{dy}{dz}\right]}{dx}$$

Esta ecuación se puede verificar directamente por diferenciación. De hecho, tenemos

$$\frac{d\left[f(y)\frac{dy}{dx}\right]}{dz}=f(y)\frac{d^2y}{dxdz}+f'(y)\frac{dy}{dz}\frac{dy}{dx};$$

$$\frac{d\left[f(y)\frac{dy}{dz}\right]}{dx}=f(y)\frac{d^2y}{dzdx}+f'(y)\frac{dy}{dx}\frac{dy}{dz}$$

De lo que se deduce la ecuación (1).

Reestructuración 1

Teorema 1

Si $g(x,z)=\int f(y)dy$, donde $y=y(x,z)$, entonces $\frac{d^2g}{dxdz}=\frac{d^2g}{dzdx}$

Demostración del Teorema 1

Como $g(x,z)=\int f(y)dy$, entonces

$$\frac{dg}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\int f(y)dy\right]=f(y)\frac{dy}{dx}$$

Y a su vez

$$\frac{dg}{dz}=\frac{d}{dz}\left[\int f(y)dy\right]=f(y)\frac{dy}{dz}$$

Luego

$$\frac{d^2g}{dzdx}=\frac{d\left[f(y)\frac{dy}{dx}\right]}{dz}=f(y)\frac{d^2y}{dxdz}+f'(y)\frac{dy}{dz}\frac{dy}{dx};$$

Y a su vez

$$\frac{d^2g}{dxdz}=\frac{d\left[f(y)\frac{dy}{dz}\right]}{dx}=f(y)\frac{d^2y}{dzdx}+f'(y)\frac{dy}{dx}\frac{dy}{dz}$$

De lo cual se sigue lo deseado

$$\frac{d^2g}{dxdz}=\frac{d^2g}{dzdx}$$

Procesos matemáticos en la obra de Cauchy 1

La demostración del Teorema 1 sustenta resultados dentro de la Variable Real. La Reestructuración 1 permite clasificar al Teorema 1 en cuanto al *tipo* de demostración como una implicación. A raíz de que la demostración se restringe a la aplicación de propiedades algebraicas, el procedimiento matemático ligado al *estilo* de la demostración es algebraico. Las implicaciones que justifican la conexión de las ideas permite identificar a la aplicación reiterada de la ley del silogismo hipotético deductivo como el *método* empleado como procedimiento lógico, lo que permite concluir que la *exposición* de la demostración es de forma directa.

Proceder matemático de Cauchy 2

Esta última ecuación subsiste, sin importar si las funciones de x y de z se asumen en parte real o en parte imaginaria. Por ello, por ejemplo, si M y N denotan cualesquiera dos funciones de x y de z podemos hacer

$$y = M + N\sqrt{-1}$$

Por lo que, si suponemos

$$f\left(M + N\sqrt{-1}\right) = P' + P''\sqrt{-1},$$

$$P'\frac{dM}{dx} - P''\frac{dN}{dx} = S, \qquad P'\frac{dM}{dz} - P''\frac{dN}{dz} = U,$$

$$P'\frac{dN}{dx} + P''\frac{dM}{dx} = T, \qquad P'\frac{dN}{dz} + P''\frac{dM}{dz} = V,$$

La ecuación (1) se convierte en

$$\frac{dS}{dz} + \frac{dT}{dz}\sqrt{-1} = \frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dx}\sqrt{-1}$$

Reestructuración 2

Teorema 2

Si $y = M + N\sqrt{-1}$, $f\left(M + N\sqrt{-1}\right) = P' + P''\sqrt{-1}$ y

$$P'\frac{dM}{dx} - P''\frac{dN}{dx} = S, \qquad P'\frac{dM}{dz} - P''\frac{dN}{dz} = U,$$

$$P'\frac{dN}{dx} + P''\frac{dM}{dx} = T, \qquad P'\frac{dN}{dz} + P''\frac{dM}{dz} = V,$$

Entonces

$$\frac{dS}{dz} + \frac{dT}{dz}\sqrt{-1} = \frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dx}\sqrt{-1}$$

Proceder matemático de Cauchy 3

Si en lugar de asumir que $y = M + N\sqrt{-1}$, hubiéramos supuesto que $y = M - N\sqrt{-1}$, hubiéramos obtenido que

$$\frac{dS}{dz} - \frac{dT}{dz}\sqrt{-1} = \frac{dU}{dx} - \frac{dV}{dx}\sqrt{-1}$$

Reestructuración 3

Teorema 3

Si suponemos que $y = M - N\sqrt{-1}$ y $f\left(M - N\sqrt{-1}\right) = P' - P''\sqrt{-1}$, entonces

$$\frac{dS}{dz} - \frac{dT}{dz}\sqrt{-1} = \frac{dU}{dx} - \frac{dV}{dx}\sqrt{-1}$$

Procesos matemáticos en la obra de Cauchy 2 y 3

Derivado de la Reestructuración 2 y 3, y las palabras utilizadas por Cauchy, se infiere que la clasificación en cuanto al *tipo* de demostración es una implicación, sin embargo, debido a que el autor se limita a enunciar los resultados, no se identifican *métodos, estilos* o *modos* de demostración en esta sección de la obra.

Proceder matemático de Cauchy 4

Por lo que tendremos por separado

$$(2)\begin{cases} \dfrac{dS}{dz} = \dfrac{dU}{dx} \\ \dfrac{dT}{dz} = \dfrac{dV}{dx} \end{cases}$$

Reestructuración 4

Teorema 4

Si $\frac{dS}{dz} + \frac{dT}{dz}\sqrt{-1} = \frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dx}\sqrt{-1}$ y $\frac{dS}{dz} - \frac{dT}{dz}\sqrt{-1} = \frac{dU}{dx} - \frac{dV}{dx}\sqrt{-1}$, entonces

$$\frac{dS}{dz} = \frac{dU}{dx}$$

$$\frac{dT}{dz} = \frac{dV}{dx}$$

Demostración del Teorema 4

Sumando y restando término a término las expresiones

$$\frac{dS}{dz} + \frac{dT}{dz}\sqrt{-1} = \frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dx}\sqrt{-1}\ , \ \frac{dS}{dz} - \frac{dT}{dz}\sqrt{-1} = \frac{dU}{dx} - \frac{dV}{dx}\sqrt{-1}$$

se obtiene lo deseado.

Procesos matemáticos en la obra de Cauchy 4

La obtención de las ecuaciones diferenciales del sistema (2), por parte de Cauchy, tampoco está acompañada por una demostración explícita; sin embargo, la Reestructuración 4 implica que se está aplicando la ley del silogismo hipotético deductivo en la conjugación del Teorema 2 y Teorema 3.

Proceder matemático de Cauchy 5

Las dos ecuaciones previas pueden ser verificadas inmediatamente al derivar las cuatro cantidades S, T, U, V. Estas dos ecuaciones contienen toda la teoría del pasaje de lo real a lo imaginario, y nos estamos quedando sin tiempo para indicar cómo utilizarlas.

Procesos matemáticos en la obra de Cauchy 5

El Proceder matemático de Cauchy 5 permite inferir que la justificación de resultados en Variable Compleja están sujetos a descomponer en parte real y parte imaginaria a las expresiones que los conforman, para posteriormente justificarlas individualmente a través de propiedades algebraicas.

Proceder matemático de Cauchy 6

Supongamos que, después de multiplicar los dos miembros de cada una de las ecuaciones en (2) por $dxdz$, procedemos a integrarlos, respecto a x y a z, entre límites reales de estas dos variables. Denotemos por

$$S', S'', T', T'',$$

los valores de S y T relativo a los dos límites de z, y por

$$U', U'', V', V'',$$

los valores de U y V relativo a los dos límites de x. Si, entre los límites en cuestión, las cuatro cantidades

$$S, T, U, V,$$

Siempre mantienen un valor determinado, uno obtendrá generalmente

$$(3)\begin{cases} \int S''\,dx - \int S'\,dx = \int U''\,dz - \int U'\,dz \\ \int T''\,dx - \int T'\,dx = \int V''\,dz - \int V'\,dz \end{cases}$$

Supongamos, que en aras de la simplicidad, que los límites para x son o y x, y que los límites para z son o y z; finalmente, designemos por

s y t los valores que adquieren S y T cuando $z = o$,

y por u y v los valores que adquieren U y V cuando $x = o$

Las expresiones previas se convertirán en

$$(4)\begin{cases} \int S\,dx - \int s\,dx = \int U\,dz - \int u\,dz \\ \int T\,dx - \int t\,dx = \int V\,dz - \int v\,dz \end{cases}$$

Las integrales relativas a x tomadas entre los límites o y x, y las integrales relativas a z tomadas entre los límites o y z. Examinaremos, en la segunda parte de este escrito, el caso cuando los valores de $S, T, U, V,$ se vuelven indeterminados entre los límites de integración. Por el momento, nos limitaremos a mostrar en qué aplicaciones se utilizan las fórmulas que acabamos de encontrar.

Reestructuración 6

Teorema 6

Si las funciones S, T, U y V están definidas en $[o, x] \times [o, z]$, $\frac{dS}{dz} = \frac{dU}{dx}$ y $\frac{dT}{dz} = \frac{dV}{dx}$, entonces:

$$\int_o^x S\,dx - \int_o^x s\,dx = \int_o^z U\,dz - \int_o^z u\,dz$$

y

$$\int_o^x T\,dx - \int_o^x t\,dx = \int_o^z V\,dz - \int_o^z v\,dz$$

Demostración del Teorema 6

Nótese lo siguiente

$$\frac{dS}{dz} = \frac{dU}{dx}$$

$$\frac{dS}{dz} dzdx = \frac{dU}{dx}\, dxdz$$

$$\iint_{[o,x]\times[o,z]} \frac{dS}{dz} dzdx = \iint_{[o,x]\times[o,z]} \frac{dU}{dx} dxdz$$

$$\int_o^x (S - s)dx = \int_o^z (U - u)dz$$

$$\int_o^x S\,dx - \int_o^x s\,dx = \int_o^z U\,dz - \int_o^z u\,dz$$

Siguiendo el mismo procedimiento, con la ecuación $\frac{dT}{dz} = \frac{dV}{dx}$, se tiene lo deseado.

Procesos matemáticos en la obra de Cauchy 6

Del Procedimiento matemático de Cauchy 6 y de la Reestructuración 6 se deduce que se sustenta el proceder matemático de Cauchy a través de operar algebraicamente con las ecuaciones en el sistema de ecuaciones (2), por lo que el *estilo* de la demostración, en cuanto al procedimiento matemático, es de carácter algebraico. El procedimiento lógico por silogismo es el *método* que sustenta el proceder algebraico. La clasificación en cuanto al *tipo* de demostración es una implicación. Finalmente, el *modo* en que se exponen las ideas es de manera directa.

Con esto se concluye la identificación de los procesos de demostración que subyacen al teorema. Cabe destacar que en la sección analizada de la obra no se muestra el enunciado que refiere al Teorema Integral de Cauchy como fue presentado en la introducción de este artículo. Debido a que el objetivo de esta investigación no radica en mostrar procesos que permitan obtener el teorema como suele presentarse en libros escolares universitarios de Variable

Compleja, se recomienda consultar el trabajo de Ettlinger (1922) en el que se evidencia cómo esta sección de la obra permite su establecimiento.

3.3 A modo de resumen

En la sección analizada de la memoria se identificó que el *tipo* de enunciados que posibilitan su comunicación, en cuanto a su estructura, obedecen al establecimiento de condiciones necesarias, o bien, condiciones suficientes que se deben satisfacer para la obtención de los resultados. La forma en la que se conectan las ideas, desde las hipótesis hasta los resultados, se da por medio de una cadena de implicaciones sustentadas en la ley del silogismo hipotético deductivo como *método.* El *estilo* que permea el proceder matemático, dentro del procedimiento lógico por silogismo, es el estilo algebraico, el cual está desprovisto de justificaciones visuales, numéricas o variacionales.

Los procesos de demostración descritos en el párrafo anterior se reconocen en el caso que Cauchy trabaja con objetos de la Variable Real. Bajo el título Proceder matemático de Cauchy 2 se identificó que Cauchy extiende una ecuación estipulada en la variable real por medio de la introducción de cantidades complejas de la forma $x + y\sqrt{-1}$. En principio, este proceso de extensión se asemeja a lo descrito por el pasaje de lo real a lo imaginario como método de solución a distintos problemas de la época, empero, la diferencia del método propuesto por Cauchy radica en que la justificación de los resultados obtenidos por el proceso de extensión se da a través de descomponer a las expresiones de la forma $x + iy$ en partes real e imaginaria, lo que permite inferir que Cauchy sustenta su proceder matemático a partir de lo que ya conoce en el dominio de los números reales. Ejemplos de este tipo de justificación utilizados por el autor se presentan a continuación.

En primera instancia, la Reestructuración 4 y su respectiva demostración aluden a formas de trabajo matemático que erradican a la $\sqrt{-1}$ de expresiones de la forma $x + y\sqrt{-1}$. Aunado a lo anterior, en la introducción de la memoria Cauchy estipula que la veracidad de la ecuación $\frac{dS}{dz} + \frac{dT}{dz}\sqrt{-1} = \frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dx}\sqrt{-1}$ radica en que "esta igualdad [...] se divide entonces en dos nuevas ecuaciones, que siempre se pueden verificar directamente por diferenciación[6]" (Cauchy, 1814, p. 613), lo que permite inferir que:

Cauchy establece un isomorfismo entre cantidades complejas y cantidades reales al restringir el trabajo con cantidades complejas al manejo simultaneo de dos cantidades reales,

[6] Cette égalité […] se partage alors en deux équations nouvelles, dont peut toujours être vérifiée directement par le seule différenciation.

en la que la introducción de cantidades complejas está sujeto a la erradicación ulterior de $\sqrt{-1}$.

Aunque el análisis de los procesos de demostración se remitió a una sección de la memoria *Sur les Intégrales Définies*, el reporte que antecede a la obra y el trabajo de Smithies (2005) permiten identificar acepciones de dos principios del marco Socioepistemológico, así como procesos de demostración que permean la estructura de toda la obra. Del trabajo de Smithies se infiere que el proceder matemático de Cauchy en la totalidad de la obra obedece a una presentación deductiva, debido a que el autor atiende primero a la presentación general del método (la fuente de datos principal del artículo) para luego remitirse a aplicarlo a casos particulares que no fueron analizados en este trabajo.

Por otro lado, en el reporte que antecede a la obra, Lacroix y Legendre comentan lo siguiente:

> No examinaremos si los nuevos métodos del Sr. Cauchy son más sencillos que los ya conocidos, si su aplicación es más fácil, y si se puede encontrar por su medio algún resultado que los métodos conocidos no pudieran dar: pues, aunque se respondiera negativamente a estas diversas cuestiones, el autor seguiría teniendo el mérito [...] de haber construido, por un procedimiento uniforme, una serie de fórmulas generales, adecuadas para transformar las integrales definidas y facilitar su determinación[7](Cauchy, 1814, pp. 609-610).

El hecho de que estos sujetos históricos consideraran que el método expuesto por Cauchy es un *procedimiento uniforme* apunta a que los procedimientos explicativos de Cauchy fueron reconocidos y validados (principio de relativismo epistemológico) por sus pares. Cabe destacar que Lacroix y Legendre consideraron como *nuevos* estos procedimientos, empero, en el desarrollo de la Variable Compleja, estas formas de trabajo matemático fueron resignificándose (principio de resignificación progresiva), por ejemplo, en el *Cours d'analyse* de Cauchy los números complejos adquieren un estatus de objeto –algo que no sucede en la memoria– sobre los que se puede operar a través de sumas, restas, productos y potencias.

[7] Nous n'examinerons pas si les nouvelles méthodes de M. Cauchy sont plus simples que celles qui étaient déjà connues, si leur application est plus facile, et si l'on peut trouver par leur moyen quelque résultat que ne pourraient donner les méthodes connues: car, quand même on répondrait négativement à ces différentes questions, il n'en resterait pas moins à l'auteur le mérite […] D'avoir construit, par une marche uniforme, une suite d formules générales, propres à transformer les intégrales définies et à en faciliter la détermination.

CONCLUSIONES

Interesados en la construcción de conocimiento matemático en Variable Compleja, en este artículo se presentó un análisis de la memoria *Sur les Intégrales Définies* de Augustin-Louis Cauchy, obra en la que se presenta una primera aproximación al Teorema Integral de Cauchy. En una primera instancia, orientados por el principio de racionalidad contextualizada, el análisis de la memoria se abordó a partir de entender el contexto de producción que permea a la memoria. Como resultado de este análisis se identificó que el escenario de construcción de conocimiento matemático que sustenta al teorema es la búsqueda de consistencia interna del aparato matemático. La identificación de este escenario de construcción orientó el análisis de la actividad matemática de la obra a través de los procesos de demostración que subyacen al teorema. Utilizar la caracterización de Crespo (2005) permitió reestructurar el contenido matemático de la obra, lo cual coadyuvó a la identificación de los procesos de demostración que implícitamente se le atribuyen a Cauchy para la comunicación de su proceder matemático.

A su vez, en el desarrollo de la investigación se reconocieron acepciones del principio del relativismo epistemológico y el principio de resignificación progresiva como elementos que permean la validación y el desarrollo de conocimiento matemático dentro del mismo aparato matemático. Del análisis de la memoria también se develó que la actividad matemática de Cauchy se cimienta en la extensión de resultados de la Variable Real con la incorporación de cantidades complejas de la forma $x + y\sqrt{-1}$, lo que permite validar los resultados obtenidos por el proceso de extensión al separarlos en sus respectivas partes reales e imaginarias; es decir, a través de llevarlos al campo de los reales.

Al estilo de Stewart y Tall (2018), en esta investigación se concibe a la extensión de resultados de la Variable Real como un proceso de generalización. Afirmar que los resultados obtenidos por el proceso de extensión se validaron a través de resultados conocidos en el Análisis Real es lo que entendemos como un proceso de validación por analogía. Por consiguiente, y como resultado principal del estudio, se presenta la siguiente hipótesis epistemológica, la cual describe una forma en la que Cauchy construyó conocimiento en Variable Compleja:

La construcción de conocimiento en Variable Compleja se propicia por medio de la generalización de resultados en Variable Real a través de la introducción de cantidades complejas, cuya manipulación requiere de conceptualizarlas como el trabajo simultaneo entre dos cantidades reales, recurriendo a la validación de los resultados establecidos en el campo de los complejos mediante un trabajo por analogía en el campo real.

El establecimiento de la conjetura anterior coadyuva a develar formas intrínsecas de producción de conocimiento en Variable Compleja. Sin embargo, aceptamos que el desarrollo de esta rama de la Matemática se propició gracias a las contribuciones de otros personajes que atendieron a la consolidación de objetos distintos al Teorema Integral de Cauchy. Se espera que robustecer la indagación en torno al Teorema Integral de Cauchy permita develar una epistemología de la Variable Compleja, la cual pueda dar pautas para la configuración de ejemplos específicos que permitan el desarrollo del pensamiento matemático en el escenario escolar vigente de la Variable Compleja.

REFERENCIAS

Belhoste, B. (1991). *Augustin-Louis Cauchy: A biography.* New York: Springer-Verlag.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la matemática educativa: estudios sobre la construcción social de conocimiento.* México: Gedisa.

Cantoral, R., Farfán, R., Hitt, F., y Rigo, M. (1987). Epistemología del Concepto de Función Logarítmica. *Matemática Educativa, Revista del Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas, 1(1),* 11-17.

Cantoral, R., Montiel, G., y Reyes-Gasperini, D. (2015). El programa Socioepistemológico de investigación en matemática educativa: el caso de Latinoamérica. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa,* 18(1), 5-17. Obtenido de https://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1810

Cauchy, A. (1814). *Mémoire sur les intégrales définies*. Gallica-Math: Œuvres Completès https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k90181x/f328

Cauchy, A.L. (1811). Sur les limites des connaissances humaines. En Gauthier-Villars et fils (Eds.). *Œuvres complètes d'augustin Cauchy, 2(15),* 5-7.

Crespo C. (2005). *El papel de las argumentaciones matemáticas en el discurso escolar. La estrategia de deducción por reducción al absurdo.* (Tesis de maestría en Matemática Educativa). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. Ciudad de México. https://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/maestria/crespo_2005.pdf

Cruz-Márquez G. (2018). *De Sírio a Ptolomeo: una problematización de las nociones trigonométricas.* (Tesis de maestría en Matemática Educativa). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. https://repositorio.cinvestav.mx/handle/cinvestav/1012

Danenhower P. (2000). *Teaching and learning complex analysis at two British Columbia Universities.* (Tesis de doctorado en Educación Matemática). Simon Fraser University. http://www.collectionscanada.gc.ca/obj/s4/f2/dsk1/tape3/PQDD_0008/NQ61636.pdf

Dittman, M., Soto-Johnson, H, Dickson, S., y Harr, T. (2016). Game building with complex-valued functions. *PRIMUS,* 27, 1-11. https://doi.org/10.1080/10511970.2016.1234527

Espinoza L. (2009). *Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un* *estudio socioepistemológico*. (Tesis de maestría en Matemática Educativa). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/275045220_Una_evolución_de_la_analiticidad_de_las_funciones_en_el_siglo_XIX_Un_estudio_soicoepistemologico_Cinvestav

Ettlinger, H.J., (1922). Cauchy's Paper of 1814 on Definite Integrals. *Annals of Mathematics, 23*(3), 255-270. Recuperado de https://doi.org/10.2307/1967922

Freudenthal, H. (1971). A.-L. Cauchy. En C. Gillispe. *Dictionary of Scientific Biography* (pp. 131-148, Vol. 3). New York: Charles Scribner's Sons.

Gómez, B. (2003). La investigación histórica en Didáctica de la Matemática. En E. Castro (Ed.). *Investigación en Educación Matemática: Séptimo simposio de la Sociedad Española de Investigaciones en Educación Matemática* (pp. 79-86). Granada: Universidad de Granada. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2258613

Hancock, B. (2019). From quantification to consensus: The role of multimodal uncertainty in collective argumentation regarding complex integration. *Journal of Mathematical Behavior*, *55*, 1-16. Recuperado de https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.03.007

Larivière G. (2017). *On Cauchy's rigorization of complex analysis*. (Maestría en Filosofia). Simon Fraser University. https://summit.sfu.ca/item/17300

Markushevich, A. (1965). *Theory of Functions of a Complex Variable.* Prentice-Hall.

Oehrtmann, M., Soto-Johnson, H., y Hancock, B. (2019). Experts' construction of mathematical meaning for derivatives and integrals of Complex-Valued Functions. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education,* 53(3), 394-423. Obtenido de https://doi.org/10.1007/s40753-019-00092-7

Polya, G., y Latta, G. (1974). *Complex Variables*. John Wiley & Sons.

Ponce, J. (2019). The use of phase portraits to visualize and investigate isolated singular points of complex functions. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology,* 50(7), 999-1010. Recuperado de https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1656829

Regis, F. (2013). Viewing the roots of polynomial functions in complex variable: the use of GeoGebra and CAS Maple. *Acta Didactica Napocensia,* 6(4), 45-58. Recuperado de http://padi.psiedu.ubbcluj.ro/adn/article_6_4_5.pdf

Smithies, F. (1997). *Cauchy and the creation of Complex Function Theory.* Cambridge University Press.

Smithies, F. (2005). A.-L. Cauchy, two memoirs on complex-variable function theory (1825, 1827). En *Landmark Writings in Western Mathematics 1640-1940* (pp. 377-390). Elsevier Science. https://doi.org/10.1016/B978-044450871-3/50109-1

Soto-Johnson, H., Hancock, B., y Oehrtman, M. (2016). The interplay between mathematicians' conceptual and ideational mathematics about continuity of complex-valued functions. *International Journal of Research in Undergaduate Mathematics Education*, 2(3), 362-389. Recuperado de https://doi.org/10.1007/s40753-016-0035-0

Soto-Johnson, H., Oehrtman, M., Noblet, K., Robertson, L., y Rozner, S. (2012). Experts' reification of complex variables concepts: The role of metaphor. En Brown, S., Larsen, L., Marrongelle, K. y Oehrtman, M. (Eds.). *Proceedings of the 15th annual conference on research in undergraduate mathematics education* (pp. 189-195). Portland, Oregon. http://sigmaa.maa.org/rume/crume2012/RUME_Home/RUME_Conference_Papers.html

Soto-Johnson, H., y Hancock, B. (2019). Research to practice: Developing the Amplitwist concept. *PRIMUS,* 29(5), 421-440. https://doi.org/10.1080/10511970.2018.1477889

Soto-Johnson, H., y Troup, J. (2014). Reasoning on the complex plane via inscriptions and gesture. *The Journal of Mathematical Behavior,* 36, 109-125. Recuperado de https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2014.09.004

Stewart, I., y Tall, D. (2018). *Complex analysis*. Cambridge University Press.

Titchmarsh, C. (1939). *The Theory of Functions.* Oxford University Press.

Windred, G. (1929). History of the theory of imaginary and complex quantities. *The Mathematical Gazette*, *14*(203), 533-541. http://www.jstor.org/stable/3606116