Revista de História da Educação Matemática
HISTEMAT

ISSN: 2447-6447
Submetido: 02/07/2022
Aprovado: 12/08/2022

LOS CORTES DEL CONO EN LA GEOMETRÍA GRIEGA: una caracterización de usos y significados más allá de la anécdota

THE CUTS OF THE CONE IN GREEK GEOMETRY: a characterization of uses and meanings beyond the anecdote.

Luis Carlos Vargas-Zambrano[1]
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-3402-2817

Gisela Montiel-Espinosa[2]
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-1670-9172

RESUMEN

La naturaleza geométrica de las cónicas en la escuela se ha restringido a la anécdota de los cortes de Apolonio que actúa como una estrategia de adición de la historia en el aula de matemáticas. Para recuperar los significados ausentes en la escuela ocultos en el anecdotario se llevó a cabo un estudio histórico en el marco de la Teoría Socioepistemológica, la cual orientó metodológicamente la investigación a través del constructo historización. Bajo características del análisis cualitativo de contenido se estudiaron definiciones y proposiciones del mini tratado del Libro I de *Las Cónicas*, para ello se configuró el contexto que incide en la actividad matemática y provoca la emergencia de las cónicas como cortes del cono. Al final se caracterizó como fundamental, a través de acciones, el uso del triángulo axial y la circunferencia para la construcción de las secciones cónicas, y se identifica que el significado de estas nociones geométricas es relativo a la sección común.
Palabras clave: Cónicas. Apolonio. Geometría. Uso del conocimiento. Hipótesis epistemológica.

ABSTRACT

The geometric nature of conics in school has been restricted to the anecdote of the cuts of Apollonius that acts as an addition strategy of history in the mathematics classroom. To recover the absent meanings in the school hidden in the anecdotes a historical study was carried out within the framework of the Socioepistemological Theory, which methodologically guided the research through the historicization construct. Under the characteristics of qualitative content analysis, definitions and propositions of the mini-treatise of Book I of *Conics* were studied, hence, the context that affects the mathematical activity and causes the emergence of the conics as cuts of the cone was configured. In the end, the use of the axial triangle and the circumference for the construction of conic sections was characterized as fundamental, through actions, and it was identified that the meaning of these geometric notions is relative to the common section.
Key words: Conics. Apollonius. Geometry. Use of knowledge. Epistemological hypothesis.

[1] Maestro en Ciencias en la Especialidad en Matemática Educativa por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav). Profesor de tiempo completo de Matemáticas del Colegio Bilingüe Internacional Gimnasio Campestre Reino Británico (GCRB), Tenjo, Cundinamarca, Colombia. Dirección electrónica para correspondencia: luisczambranov@gmail.com

[2] Doctora en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa por el Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (Cicata). Investigadora y Coordinadora Académica del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav), Ciudad de México, México. Dirección para correspondencia: Av. IPN 2508, San Pedro Zacatenco, Gustavo A. Madero, Ciudad de México, México, 07360. gmontiele@cinvestav.mx

INTRODUCCIÓN

Simultáneo al desarrollo y consolidación de la disciplina, los estudios históricos en Matemática Educativa han tenido contribuciones epistemológicas, culturales, para la formación docente, para la interdisciplinariedad en la enseñanza, y para el ejercicio del profesor en el salón de clase (Barbin, Guillemette y Tzanakis, 2020). Cada una de las categorías en sí misma porta una diversidad relativa a los enfoques teóricos, los intereses disciplinares y la formación de los investigadores, que impacta en la variedad de formas de estudiar y relatar las matemáticas del pasado.

Esta pluralidad de relatos, para el caso de los profesores y matemáticos educativos, se detona gracias al hecho de reconocer que la historia de las matemáticas: humaniza la ciencia; hace a las matemáticas más interesantes, comprensibles y accesibles; provee una nueva visión de conceptos, problemas y resoluciones; justifica el porqué de los tratamientos matemáticos escolares; rescata significados ausentes de la matemática escolar (Buendía y Montiel, 2011; Fried, 2001), entre otras muchas razones que introducen a nuestra problemática.

Con este panorama y bajo la premisa de incluir la historia de las matemáticas en el ejercicio del profesor en el salón de clase, nuestra problemática se sustentó en los dos tipos de estrategias para incluir la historia de las matemáticas en el aula, caracterizadas por Fried (2001): la *estrategia de adición* y la *estrategia de acomodación.* Pensemos por un momento en todas las anécdotas históricas que han servido para introducir un tema en el aula de matemáticas o de ciencias: la conceptualización de átomo de Demócrito y Leucipo a partir del rasgamiento de un papel; la bañera de Arquímedes y la corona del rey; los cortes del cono de Apolonio; la construcción mecánica de la elipse de Hipatia. Estas u otras anécdotas contadas y escuchadas en la escuela han permanecido en nuestra memoria más tiempo que los mismos conceptos científicos que introducen, algo verdaderamente curioso y susceptible de ser cuestionado y aprovechado en la enseñanza de las matemáticas.

Desde una visión teórica y sin el ánimo de generalizar, los cuentos históricos tienen un impacto preciso y consecuente con el saber matemático que pretenden introducir, su carácter anecdótico ejemplifica la *estrategia de adición,* pues esta introduce biografías cortas, problemas aislados, sucesos históricos y retratos de personajes, sin evaluar el potencial y la veracidad detrás de cada una. La *estrategia de adición* se puede considerar como un admirable y acertado intento del profesor en incrementar el interés por las matemáticas de sus estudiantes a través de la humanización, que de cierta forma se trunca por un sin número de variables escolares que debe atender. Fried (2001), al igual que nosotros, es sensible a estas variables dentro del quehacer del profesor, y adicionalmente reconoce que las estructuras curriculares no están pensadas desde un andamiaje histórico, ocasionando una serie de *estrategias de adición* carentes de *usos*, *significados* e impacto en el saber por abordar. Con esta crítica no se pretende implantar una *estrategia de acomodación,* organizando el currículo y la materia de acuerdo con un esquema histórico, por el contrario, con base en un estudio histórico-documental se pretende desentrañar la epistemología del saber matemático detrás de la anécdota que actúa como *estrategia de adición.*

1. PROBLEMÁTICA

El estudio de las ideas matemáticas a través de la historia está supeditado a factores contextuales que median el desarrollo del conocimiento matemático (Fried, 2014); para su reconstrucción y análisis es necesario reconocer la complejidad de combinar la Historia de las Matemáticas con la Matemática Educativa (Fried, 2001; 2018), donde más que proponer articulaciones será indispensable reconocer los resultados y avances de investigación de ambas disciplinas científicas; cómo se complementan y son coherentes para dar repuesta a problemas de investigación.

Nuestro interés de investigación general se centró en una revisión de literatura en el marco de un saber matemático: las cónicas en su génesis. Como recurso metodológico el estatus del saber matemático de las cónicas en la escuela fue cuestionado y discutido (Montiel y Buendía, 2012), para luego ser estudiado de forma minuciosa; este proceso desde la *Teoría Socioepistemológica* (TS) se denomina *problematización del saber* (Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel, 2014). En este sentido, los cuestionamientos en torno al saber trajeron consigo el reconocimiento de una recurrente *estrategia de adición* de la historia de las matemáticas para la enseñanza de las cónicas en geometría analítica: los cortes del cono de Apolonio.

> Las *secciones cónicas*, también llamadas *cónicas*, pueden obtenerse cuando con un plano se hace un corte a un cono circular recto de doble rama. Al variar la posición del plano, obtenemos una *circunferencia,* una *elipse*, una *parábola* o una *hipérbola* […]. Las secciones cónicas fueron estudiadas ampliamente por los antiguos griegos, quienes descubrieron propiedades que hacen posible que expresemos sus definiciones en términos de puntos y rectas. (Swokowski y Cole, 2009, p. 816)

Fragmentos similares al anterior introducen el contenido de las secciones cónicas en libros de texto de bachillerato, que sin notarlo reducen todo el estudio de la génesis geométrica de las cónicas a una corta anécdota sobre un antiguo geómetra griego que cortó un cono recto de base circular con un plano:

i. paralelo a la base sin pasar por el vértice, para generar una circunferencia;

ii. paralelo a una generatriz, para generar una parábola;

iii. oblicuo que corte a todas las generatrices, para generar una elipse;

iv. paralelo al eje del cono sin pasar por el vértice, para generar una hipérbola.

Esta anécdota fue un elemento inicial para la *problematización del saber* referente a las secciones cónicas, debido a que la breve historia al ser usada como *estrategia de adición* en el aula de geometría analítica hace evidente el fenómeno de algebrización de las secciones cónicas, pues “las cónicas, como la parábola, se obtienen por la intersección de un plano con un cono; sin embargo, la enseñanza se centra en dar la definición en términos de foco y directriz, elementos no presentes en la intersección” (Salinas y Pulido, 2017, p. 342), además, estos términos (foco y directriz) quedan en un nivel ilustrativo más que geométrico en una definición completamente algebraica. Para fundamentar esta idea, tomamos las acepciones de plano propuestas por Fried (2014), presentes en los tratados geométricos de Euclides y Apolonio: 1) el plano como un objeto, y 2) el plano como un lugar. La primera acepción refiere a la intersección entre un sólido y un plano; y la segunda al lugar donde se define una curva; entonces, una acepción de plano enmarca un significado particular de cónica; sin embargo, la complejidad alrededor de estas nociones en la escuela radica en que:

> […] el significado actual de las cónicas es el resultado de las complejas relaciones entre los diferentes procesos de estudio de las cónicas durante diferentes épocas históricas, cada una de las cuales ha dejado un residuo en los nombres, los problemas, los medios de representación, las reglas de acción y los sistemas de control. (Bartolini Bussi, 2005, p. 39)

En tanto, las cónicas han sido una noción perenne con múltiples tratamientos, enfoques geométricos y relaciones entre geometría plana y del espacio (Barbin, 2008). En el marco de la Antigua Grecia, el significado de las cónicas está acuñado tanto a la sección del cono como a su síntoma; no obstante, el significado de las cónicas para Apolonio está relacionado con el cono, es decir, a la intersección del cono con un plano (Fried y Unguru, 2001); pues el síntoma de las cónicas, relativo a la *acción* de igualar áreas, actúa como una propiedad de la cónica que existe en el espacio y se traslada sobre un plano, ambas, tanto la cónica como su síntoma, provienen de la *acción* de seccionar (Vargas-Zambrano y Montiel-Espinosa, 2022). Es por ello que la epistemología histórica de las cónicas en su génesis está enmarcada en una serie de *acciones* propias de la geometría plana y del espacio, pero dicha naturaleza en la escuela se reduce a una *estrategia de adición,* la cual introduce sin vínculo aparente al tratamiento analítico de estas nociones. La reducción de la naturaleza geométrica de las cónicas a una *estrategia de adición* minimiza la compleja visualización que caracteriza la construcción geométrica en el espacio de la sección cónica en su génesis histórica (Fried y Unguru, 2001), la cual no se limita a una simple visualización espacial (Salinas y Pulido, 2017) y por el contrario, se compone de una variedad de procesos espaciales que adquieren un rol comunicativo en la transmisión de este saber, y además influyen en su construcción y constitución como conocimiento matemático.

De este modo y acotando nuestro planteamiento, en el presente artículo responderemos a dos preguntas de investigación: ¿Qué *significados* emergen del *uso del conocimiento* geométrico en el *mini tratado* de *Las Cónicas* de Apolonio de Perga? ¿Qué *acciones* en el espacio se reconstruyen para caracterizar dichos *usos*? Con ello, rescataremos la naturaleza geométrica de las cónicas y se potenciará la anécdota de los cortes del cono para no ceñirla a una pasiva *estrategia de adición* de la historia de las matemáticas en el aula de clase.

2. ELEMENTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS

Para llevar a cabo dicha caracterización de *usos* fue necesario realizar un estudio detallado de teoremas geométricos o proposiciones presentes en un texto antiguo, los cuales son la expresión original de la anécdota de los cortes del cono de Apolonio. Con este panorama de estudio, la elección teórica —como decisión metodológica— para el desarrollo de la investigación se sustentó en la tradición de la TS en estudios históricos, cuyo fundamento es consecuente con la problemática expuesta.

El objeto de estudio de la TS es la construcción social del conocimiento matemático a partir de la relación entre saber, mente y cultura (Cantoral et al., 2014); por tal motivo, y dado el paradigma sociocultural al que se adscribe esta teoría en la disciplina, comparten la concepción del *significado* y el razonamiento como productos de la *actividad humana* (Lerman, 2000).

Esta relación entre saber, mente y cultura es la base del estudio minucioso de las dimensiones del saber matemático (epistemológica, didáctica, cognitiva y sociocultural) en la *problematización del saber*. Al respecto, Montiel y Buendía (2012) mencionan que las investigaciones en el marco de la TS han problematizado el saber por lo menos en tres aspectos: la naturaleza epistemológica, su resignificación y sus procesos de transmisión; en vínculo directo con nuestra investigación, las autoras afirman que el escenario histórico es uno de los posicionamientos para desentrañar la naturaleza epistemológica del saber matemático a través del análisis de *usos* y *acciones*.

El estudio de la naturaleza epistemológica en el escenario histórico fue la ruta metodológica para atender el objetivo de esta investigación, por lo tanto, el saber matemático —las cónicas— se estudió con el fin de caracterizar los factores originales que propiciaron su construcción y consolidación como conocimiento matemático (dimensión epistemológica), rescatando las formas de apropiación y significación del saber, es decir, procedimientos, abstracciones y razonamientos propios de la *actividad humana* (dimensión cognitiva), dependientes de las interacciones sociales, el tiempo, el lugar y los marcos de referencia (dimensión sociocultural).

En este sentido, la *problematización del saber* descansa en la relación entre el sujeto y el saber en función del contexto, este principio de racionalidad contextualizada sitúa concretamente las formas de pensar de los individuos, por ende, la validez y la construcción del conocimiento es relativo a cada sujeto y al grupo social al que pertenece (Cantoral et al., 2014); esta visión plural de la epistemología situada del saber diversifica el *significado*.

> Es conocida la tesis *wittgensteiniana* de que el significado de una palabra no es otra cosa que su uso. Esto quiere decir que el significado no es ningún tipo de entidad que va adosada a la palabra […]. El concepto de 'uso' no debe entenderse como relacionado a 'utilidad' sino más bien a 'utilización'. (Withrington, 2000, p. 43)

Con esta base filosófica y de forma análoga, el *significado* del conocimiento matemático en la TS se estudia a través de su *uso.* Dado que el *significado* deviene de la *acción* del sujeto con el objeto (Cantoral et al., 2014), entonces, el *uso del conocimiento* emerge de la práctica en el nivel de *acción* del sujeto con el medio, ya sea material con el entorno u organizacional con el contexto. La *acción* se observa del escenario experimental o se reconstruye del documento histórico; en ambos casos responde al ¿qué hace o hizo un individuo o un colectivo en su entorno? Y ¿cómo lleva a cabo o llevó a cabo dicho hacer? Por lo tanto, estas *acciones* describen la *actividad humana* situada en tiempo y lugar. "Considerando entonces que, el uso de un conocimiento matemático se da en el ejercicio de prácticas contextualizadas, de él emergen significados que se ponen en funcionamiento en situaciones nuevas y, bajo la misma consideración de emergente social, se resignifica" (Torres-Corrales y Montiel-Espinosa, 2021, p. 210). En tanto, y con relación a la tesis *wittgensteiniana*, el *uso* no es la utilidad o la aplicación del conocimiento matemático, sino la forma en que este es utilizado en dependencia del contexto. El *uso del conocimiento* matemático en diferentes contextos y marcos de referencia produce su resignificación (Cordero y Flores, 2007).

2.1. *Historización*

Una pieza fundamental de la *problematización del saber* relativa a la naturaleza epistemológica es la *historización,* este constructo trasciende de la teoría hacia la recolección y análisis de los datos. La *historización* es el estudio histórico-crítico, más que cronológico, de la epistemología situada que describe la construcción y constitución del saber matemático (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015). La *historización* ubica el saber matemático en tiempo y lugar, explora la óptica de quien lo construye o lo *usa*, teniendo en cuenta una perspectiva histórica y cultural del contexto (Espinoza-Ramírez, Vergara-Gómez y Valenzuela-Zuñiga, 2018).

Un estudio histórico-epistemológico desde la TS o *historización* determina el *contexto de significación* del saber matemático, objeto de estudio; este contexto da sentido y significado a un análisis de la *actividad matemática* específica (López-Acosta y Montiel-Espinosa, 2022). Basados en la investigación (Cruz-Márquez y Montiel-Espinosa, 2022; Espinoza-Ramírez et al., 2018; Rotaeche y Montiel, 2011; Buendía y Montiel, 2011) y con un énfasis metodológico, los objetivos generales de una *historización* son:

- Encontrar y estudiar algunos *significados* ausentes en la escuela, desentrañando su naturaleza epistemológica.
- Explicar fenómenos de aula, asociados a responder al porqué tratamos el saber matemático en la escuela, así como lo hacemos.
- Proponer experimentos de enseñanza cuya base epistemológica sea histórica.

Retomando la problemática que nos ocupa, el primer objetivo se articula con nuestro propósito inicial, de esta manera la elección teórica fue adecuada para responder a nuestro planteamiento de investigación. En mención, como afirman Buendía y Montiel (2011), la TS en su propuesta de incluir a la historia en la investigación en Matemática Educativa no busca replicar la historia en el aula, debido a que reconoce la transformación que sufre el saber matemático cuando es llevado a situación de clase, sin embargo, destacan que las aportaciones epistemológicas, derivadas de los estudios históricos, enriquecen al conocimiento matemático que impartimos hoy en el aula de clase; presentando un conocimiento más humano, que valore los *usos* y las prácticas que subyacen en la *actividad matemática* situada.

Ver a la *actividad matemática* como *actividad humana* es el primer paso hacia la humanización de las matemáticas. Al respecto, el particular acento social de la TS que enmarca la construcción del conocimiento matemático, brinda las herramientas teórico-metodológicas para rastrear esa humanización, reconstruyendo los *usos* y las *acciones* como pruebas fehacientes de la *actividad humana* en la constitución del saber matemático. “Para humanizar las matemáticas, es evidente que las matemáticas deben estar ligadas a los seres humanos reales —el verdadero hacer, quehacer y pensar humano— y deben estar ligadas a las circunstancias humanas reales, a los climas sociales e intelectuales” (Fried, 2001, p. 400).

3. RESULTADOS

3.1. Recolección y producción de datos

Con una visión genérica de la investigación histórica en Matemática Educativa, la recolección, producción y análisis de los datos se llevó a cabo en el marco de un estudio documental. La reconstrucción de la *actividad matemática* situada se encuentra supeditada en documentos o textos originales e interpretaciones que actúan como fuentes de datos; es por ello que la caracterización de los *usos* del conocimiento relativos a la construcción de las cónicas en la geometría del espacio se desarrolló por medio de la clasificación de fuentes de datos históricas (Wardhaugh, 2010) y el Análisis Cualitativo de Contenido (Kuckartz, 2019). A continuación, se presentan tres etapas generales:

- La primera determina el propósito del análisis y el texto original para analizar: reconstruir las *acciones* en geometría plana y del espacio que permiten la emergencia del *uso,* en el tratado *Las Cónicas de Apolonio de Perga.* Para ello, con base en Wardhaugh (2010) se organizaron las fuentes de datos en primarias y secundarias (ver cuadro 1).

Cuadro 1 – Organización de fuentes de datos

<table>
<tr><th>Fuente</th><th>Título</th><th>Traductor(a) / Autor(a), año</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Primaria</td><td>Apollonius of Perga Conics: Books I-IV</td><td>R. Catesby Taliaferro y Michael N. Fried, 2013</td></tr>
<tr><td>Elementos II</td><td>María Luisa Puertas, 2007</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Secundaria</td><td>Apollonius of Perga’s Conics. Text, Context, Subtext</td><td>Michel N. Fried y Sabetai Unguru, 2001</td></tr>
<tr><td>Tratados I: Sobre la Esfera y el Cilindro, Media del círculo, sobre los Conoides y Esferoides.</td><td>Paloma Ortiz, 2005</td></tr>
<tr><td>Historia de la matemática</td><td>Carl Boyer, 1986</td></tr>
</table>

	Conic sections	Michael N. Fried, 2019

Fuente: Elaboración basada en Vargas-Zambrano (2021, p. 163)

- En el marco del Análisis Cualitativo de Contenido se llevó a cabo un pre-análisis de los datos, donde el investigador se familiariza con el texto y el contexto gracias a las fuentes. Aquí el investigador inicia un proceso reflexivo e iterativo que le permite comprender la matemática contenida en el texto original, que lo faculta a proponer unidades de análisis de acuerdo con su propósito, tal como se muestra en el cuadro 2 (ver Vargas-Zambrano y Montiel-Espinosa, 2022; Vargas-Zambrano, 2021). Este primer acercamiento con la matemática del pasado puede acarrear anacronismos, uso de notación moderna, internalismo excesivo u omisión del contexto, entre otros; fenómenos comunes en las primeras interpretaciones (Wardhaugh, 2010), pero fundamentales a la hora de conocer los datos y bosquejar el rastreo de *usos* y *significados* ausentes en la escuela.

Cuadro 2 – Unidades de análisis

Fuente primaria	**Libro**	**Unidad de análisis**
Elementos II	XI	Definición 18: cono recto
Apollonius of Perga Conics: Books I-IV	I	Definición 1: superficie cónica
		Proposición 8: secciones que crecen con la superficie cónica
		Proposición 9: sección no circular ni subcontraria

Fuente: Elaborado por los autores

- La etapa analítica es la *historización*, esta se desarrolla a partir de un análisis contextual relativo al nivel de impacto de los factores sociales y culturales situados en tiempo y lugar para la construcción del conocimiento matemático; y un análisis textual relativo a los procedimientos y razonamientos plasmados y comunicados en el documento histórico (ver cuadro 3). Ambos análisis no son jerárquicos, por el contrario, son complementarios y simultáneos: la iteración y reflexión alrededor de la incidencia de un análisis sobre el otro provoca una saturación teórica que culmina con el planteamiento de una hipótesis epistemológica o también llamada epistemología de prácticas por Buendía y Montiel (2011).

Cuadro 3 - Análisis histórico-epistemológico

***Historización* como historia crítica del saber**	
Análisis Contextual Historia crítica externa del saber a través del *contexto de significación*	**Análisis Textual** Historia crítica interna del saber a través de la reconstrucción de la *actividad matemática*
Hipótesis Epistemológica* en términos de *acciones* y *usos	

Fuente: Elaborado por los autores

3.2. *Historización* de las cónicas como cortes del cono

Recapitulando, para abordar el propósito de investigación se analizaron definiciones y proposiciones del *mini tratado* de *Las Cónicas*. Según Fried y Unguru (2001), el *mini tratado* es el conjunto compuesto por las 8 primeras definiciones y las primeras 10 proposiciones del Libro I del tratado geométrico *Las Cónicas* de Apolonio de Perga, escrito originalmente en el siglo II a. C., este fragmento del tratado condensa la demostración y explicación detallada de la construcción de las cónicas como cortes del cono.

Después de la familiarización con el texto, la *historización* se efectúa por medio de un acercamiento histórico-matemático a las matemáticas del pasado (Fried, 2018). Este acercamiento reconstruye la *acción* y el *uso* presente en la *actividad matemática* para detectar el *significado;* también, asume que no solo la *actividad matemática* se ha perdido en el tiempo, sino las formas de pensar detrás de ella.

3.2.1. Análisis contextual: *contexto de significación* de *Las Cónicas de Apolonio*

La dimensión social y cultural del saber se describe a través del *contexto de significación* y su estratificación. El *contexto de significación* se compone por las circunstancias socioculturales organizadas en tres dimensiones contextuales, que van de esferas sociales más complejas a más específicas, trascendiendo a la *actividad matemática* en escenarios populares, cultos o técnicos donde emerge el saber (López-Acosta y Montiel-Espinosa, 2022); este contexto da forma y sentido a la matemática en juego (Torres-Corrales y Montiel-Espinosa, 2020). El análisis configurado por el *contexto de significación* agrupa las circunstancias generales y acotadas externas que impactan en la producción del documento, narra la historia crítica externa del saber a través de un pasado histórico, es decir, el pasado en sí mismo, el pasado en su propia particularidad (Oakeshott, 1933, como se citó en Fried, 2018).

Para constituir el *contexto cultural* es importante registrar que *Las Cónicas* es un tratado geométrico escrito por Apolonio de Perga (262 – 190 a. C.) en la Época Helenística (323 – 30 a.C.) de la civilización griega. La última edición del tratado en griego antiguo data del año 200 a. C., y cuenta con ocho libros, los cuales han sido traducidos —el último reconstruido— a diferentes idiomas a través de la historia. El primer libro, donde se encuentra el *mini tratado*, es descrito por el mismo *Apollonius* (ca. 200 A. E. C./2013) como una compilación del trabajo de quienes estudiaron los lugares sólidos o las cónicas antes que él; esto marcaría un antecedente relevante, pues la idea de cortar conos no es una idea original del Gran Geómetra (Fried, 2019). La carta de Apolonio dirigida a Eudemo en el prefacio del Libro I de *Las Cónicas* abre la puerta al estudio de la obra de sus antecesores, entonces la historia detrás de la producción del tratado no empieza en la época en la que fue escrito sino mucho más atrás, en la Época Clásica (500 – 323 a. C.).

La solución de Menecmo al problema de la duplicación del cubo es el primer indicio de la construcción de las cónicas como cortes del cono; esta solución es reconstruida y documentada por Eutocio (VI d. C.) en los comentarios al tratado *Sobre la Esfera y el Cilindro* de Arquímedes (ca. 225 A. E. C./2005). Situados en el *contexto cultural*, nuestro interés radica en conocer o plantear una hipótesis sobre el porqué de la *acción* material de seccionar o cortar conos para la construcción de curvas, pues dicha *acción* es la base de la anécdota que actúa como *estrategia de adición* en la escuela.

Para la época de Menecmo (380 – 320 a. C.) la geometría del espacio no tenía el avance o estatus intelectual alcanzado por la geometría plana (Boyer, 1986), por lo tanto, la solución al problema de la duplicación del cubo propuesta por Menecmo se sustenta en la intersección de dos cónicas en el plano; sin embargo, la construcción de las curvas prescinde del uso de la regla y el compás, en cambio, corta conos rectos para obtenerlas. Algo cuestionable para la época, pues la tradición griega ubicaba este problema clásico dentro de la categoría de problemas planos, por ende, era necesario emplear una construcción con regla y compás para su solución (Ortiz, 2005; Campos, 2006), es decir, dependía del *uso* de la recta y la circunferencia.

La omisión del uso de la regla y el compás también se evidenció en soluciones de otros geómetras de la antigua Grecia, corroborando que las cónicas no podían ser construidas como lugares planos, en consecuencia, el grupo social —la civilización Griega— aceptó la construcción de curvas a partir del seccionado de sólidos conocidos y el uso de mecanismos ingenieriles; hasta el punto de que Platón clasificaría las curvas, por un lado, como lugares sólidos, por su procedencia relativa al corte del cono, y por otro, como curvas de otra clase que se construyen mecánicamente (Campos, 2006).

Este consenso encarna una de las discusiones más agudas de la génesis de la Geometría del Espacio: en la Academia de Platón, Arquitas (428 – 347 a.C.) y Eudoxo (390 – 337 a. C.), maestros de Menecmo, consideraron el uso de material concreto para la solución de problemas geométricos, estrategia que justificaría la *acción* de seccionado de conos y el uso de artefactos para el trazo de curvas. Los geómetras en mención, uno ingeniero y militar de profesión, fueron cuestionados por el mismo Platón, quien afirmaba que sus prácticas corrompían la bondad de la geometría, llevándola al mundo de lo sensible (Ortiz, 2005); el filósofo Hacedor de Matemáticos terminaría por aceptar la *acción* material en el espacio tridimensional de seccionado como aquella que acompaña y antecede la construcción de las cónicas como objetos geométricos.

El *uso* del cono concreto y la *acción* de seccionado cambia —en parte— el paradigma establecido para el estudio de la geometría. Si bien, la Época Clásica marcó el paulatino tránsito entre el estudio metafísico y el estudio racional de las matemáticas y las ciencias naturales (Boyer, 1986), en este tiempo no era concebible explicitar la mediación del material concreto en la *actividad matemática;* por tal motivo, los registros condensados en tratados que proyectan la institucionalización del saber en geometría del espacio, omiten esas interacciones con objetos concretos, sin embargo, las *acciones* que subyacen invitan a considerarlas y más aún cuando refieren a la *actividad humana* e influyen en la racionalidad.

El conjunto de características expuestas describe las prácticas culturales relacionadas con aspectos ideológicos que impactan en las formas de razonar de los individuos (Espinoza y Cantoral, 2011). Por ejemplo, la forma en que están escritas las proposiciones del *mini tratado* evidencian la experimentación con sólidos concretos (Fried y Unguru, 2001); esta práctica propia del *contexto cultural* le da pertenencia al sujeto dentro de un grupo social (Torres-Corrales y Montiel-Espinosa, 2020), sin limitarse al estudio de la interacción entre individuos, y más bien enfocándose en el rastreo de ideologías y tradiciones de los grupos sociales.

La manipulación de sólidos concretos evoluciona de una *actividad humana* empírica a la *actividad matemática*. En cierta medida, la aceptación del seccionado de conos radica en que esta figura geométrica sólida era atractiva visualmente para los griegos (Fried y Unguru, 2001), además, el cono es conocimiento matemático, cuenta con su definición y caracterización enmarcada en las convenciones de la geometría instauradas para la época. Este factor espacio temporal (manipulación de sólidos concretos) condiciona la *actividad matemática* enmarcando la realidad cercana de los sujetos y sus relaciones con el saber (Torres-Corrales y Montiel-Espinosa, 2020); este factor da forma al *contexto situacional,* pues recopila las realidades cercanas de los constructores de conocimiento con el saber, ubicadas en tiempo y espacio (López-Acosta y Montiel-Espinosa, 2022).

En un nivel más acotado, "el contexto de la situación específica refiere a la actividad matemática específica (popular, técnica o culta) que determina problemas y/o situaciones dentro de las cuales el saber emerge" (López-Acosta y Montiel-Espinosa, 2022, p. 543); en nuestro caso, la caracterización de este nivel ayuda a identificar los primeros *usos* del conocimiento matemático. Ahora bien, dada la imposibilidad de construir curvas con regla y compás, el cono recto de base circular se convierte en la vía para la construcción de las cónicas.

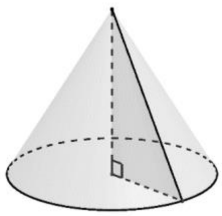
Si bien el cono es el protagonista de la *estrategia de adición,* su definición geométrica suele obviarse, complejizando aún más la visualización del seccionado.

La definición de cono empleada por Menecmo es la definición instaurada y ampliamente utilizada antes de la escritura de *Las Cónicas*. La teoría de seccionado de Menecmo se sustenta en la definición 18 del libro XI de los *Elementos* que dice:

> Cuando, permaneciendo fijo uno de los lados que comprenden el ángulo recto del triángulo rectángulo, se hace girar el triángulo y se vuelve de nuevo a la posición desde donde empezó a moverse, la figura comprendida es un cono. Y si la recta que permanece fija es igual a la restante del ángulo recto, el cono será rectángulo, y si es menor obtusángulo y si es mayor acutángulo. (Euclides, ca. 300 A. E. C./2007, pp. 278-279)

Del fragmento se identifica el *uso* del triángulo rectángulo para la definición de cono recto (ver figura 1). Al respecto se puede afirmar que: 1) el lado opuesto al ángulo recto describe la generatriz de la superficie cónica; 2) el lado del triángulo que permanece fijo es el eje del cono; 3) la base del triángulo es el radio del círculo, base del cono; 4) la comparación de la longitud de los lados que forman el ángulo recto (catetos) determina el tipo de cono recto.

Figura 1 – cono recto por definición 18 del libro XI de los Elementos de Euclides



Fuente: Elaborada por los autores

El triángulo rectángulo no solo se *usa* para la definición de cono, también toma relevancia —según la *estrategia de adición*— cuando el seccionado se efectúa respecto a la generatriz y el eje (lados del triángulo). Sin caer en el anacronismo, vale la pena aclarar que la teoría de seccionado de Menecmo no es equivalente a la reseñada previamente en la *estrategia de adición;* en realidad, Menecmo cortó los conos siempre bajo la misma condición: perpendicular a la generatriz o el lado mayor del triángulo rectángulo, es decir, obtenía las tres cónicas (parábola, hipérbola y elipse) seccionado los conos de la misma manera; la forma de la cónica dependía del tipo de cono recto seccionado (rectángulo, obtusángulo y acutángulo).

3.2.2. Análisis textual: la *actividad matemática* en *Las Cónicas de Apolonio*

Con énfasis en la dimensión cognitiva del saber, de forma narrativa será expuesta la reconstrucción pragmática de la definición 1 y las proposiciones 8 y 9 del libro I de *Las Cónicas*. Este tipo de reconstrucción propia de la Matemática Educativa y en el marco de la TS, caracteriza los *usos* y reconstruye *acciones* que se infieren del texto; para ello, con base en el

Análisis Cualitativo de Contenido se recaban dos tipos de datos provenientes del texto: el dato verbal (lenguaje natural) y el dato visual (diagrama). Adicional, este análisis textual narra la historia crítica interna del saber limitándose al texto, a lo conceptual y al contenido; sin obviar el contexto y reconociendo el documento como pieza del pasado histórico que lo hace particular.

Los fragmentos del texto fueron analizados bajo el factor contextual que asume la manipulación de material concreto en la génesis de la geometría del espacio; además, reconocemos que cada proposición del *mini tratado* es una descripción geométrica fiel del diagrama (Fried y Unguru, 2001), premisa clave para caracterizar el *uso del conocimiento* matemático:

- **Producción de datos:** a partir de los criterios del Análisis Cualitativo de Contenido y la familiarización con el texto se estipulan las unidades de análisis (teoremas o proposiciones). Los datos verbales de la proposición son traducidos y transcritos; el diagrama o dato visual es reconstruido en el *software* de matemática dinámica *GeoGebra* (ver figura 2).
- **Preparación de los datos:** con base en investigaciones documentales (Cruz-Márquez y Montiel-Espinosa, 2022; López-Acosta y Montiel-Espinosa, 2022) se identificó la estructura discursiva o mini género de la proposición; para el caso de las proposiciones del *mini tratado* todas se componen de: I) enunciado, II) exposición, III) especificación o preparación, IV) demostración, V) construcción y VI) conclusión (ver figuras 2 y 3).

Figura 2 - Ejemplo de producción y preparación de los datos. Proposición 5 del Libro I de *Las Cónicas:* sección subcontraria

I. **Enunciado:** *si un cono oblicuo se corta perpendicularmente a la base por un plano que pasa por el eje y por otro perpendicular al triángulo según el eje y separa, del lado del vértice, un triángulo semejante al que pasa por el eje, pero colocado en sentido contrario, la sección es un círculo que llamaremos sección subcontraria.*

II. **Exposición:** sea un cono oblicuo cuyo vértice es el punto A y cuya base es un círculo BC**[PE]**, y es cortado a través del eje por un plano perpendicular al círculo BC**[REs-O] [REd-S]**, y es hecha como una sección el triángulo ABC **[TE-P]** **[Apolonio, I. 3]**. Entonces este también puede ser cortado por otro plano perpendicular al triángulo ABC y cortado sobre el lado del punto A **[REs-O] [REs-U] [REd-S]**, el triángulo AKG similar al triángulo ABC y tendido en sentido contrario **[TE-P]**, entonces el ángulo AKG es igual al ángulo ABC. Y se hace una sección sobre la superficie, la línea GHK **[REd-S]**.

III. **Preparación:** yo digo que GHK es un círculo.

IV. **Demostración:** para tomar puntos cualquieras H y L son tomadas sobre las líneas curvas GHK y BC **[REs-U]**, y de los puntos H y L dejados caer perpendicularmente sobre el plano a través del triángulo ABC **[REs-O] [REd-dM] [REs-U]**. Entonces ellos caerán a secciones comunes de los planos **[Euclides, XI. D. 4]**. Dejarlos caer como por ejemplo FH y LM. Por lo tanto FH es paralelo a LM **[REs-O] [REd-dM] [REs-U] [Euclides, XI. 6]**.

Entonces dejamos que la línea DFE sea dibujada a través de F paralela a BC; y FH es también paralela a LM. Por lo tanto, el plano entre FH y DE es paralelo a la base del cono **[REs-O] [Euclides, XI. 15]**. Por lo tanto, este es un círculo cuyo diámetro es la línea recta DE **[TE-P] [Apolonio, I. 4]**.

Por lo tanto

$$\textit{rectángulo}\ \mathrm{DF}, \mathrm{FE} = \textit{cuadrado}\ \mathrm{FH}$$ **[Euclides, III. 31, VI. 8 porisma, VI. 17] [TE-P] [TE-T]**.

Y desde ED es paralelo a BC, ángulo ADE es igual al ángulo ABC. Y el ángulo AKG se supone igual al ángulo ABC. Y por lo tanto el ángulo AKG es igual al ángulo ADE. Y los ángulos verticales en el punto F también son iguales **[TE-R]**. Por lo tanto, el triángulo DFG es semejante al triángulo KFE **[REs-Cf] [TE-P]**, y por lo tanto

$$\mathrm{EF} : \mathrm{FK} :: \mathrm{GF} : \mathrm{FD}$$ **[REs-Cl] [TE-P] [TE-T] [Euclides, VI. 4]**

Por lo tanto

$$\textit{rectángulo}\ \mathrm{EF}, \mathrm{FD} = \textit{rectángulo}\ \mathrm{KF}, \mathrm{FG}$$ **[TE-P] [TE-T] [Euclides, VI. 16]**

Pero esto ha sido demostrado

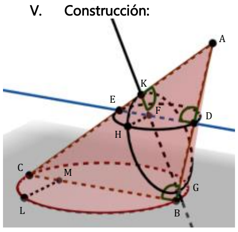
$$\textit{cuadrado}\ \mathrm{FH} = \textit{rectángulo}\ \mathrm{EF}, \mathrm{FD};$$ **[TE-P] [TE-T]**

Y por lo tanto

$$\textit{rectángulo}\ \mathrm{KF}, \mathrm{FG} = \textit{cuadrado}\ \mathrm{FH}$$ **[REs-Cf] [TE-P] [TE-T]**

En este sentido entonces todas las perpendiculares dibujadas de la línea GHK a la línea recta GK podrá también ser mostradas o ser igual en cuadrado al rectángulo **[TE-P] [TE-T]**, en cada caso, contenidos por los segmentos de la línea recta GK.

V. **Construcción:**



VI. **Conclusión:** por lo tanto, la sección es un círculo cuyo diámetro es la línea recta GK.

Fuente: Elaboración basada en Vargas-Zambrano (2021, pp. 221-224)

- **Análisis del *uso*:** el estudio detallado de cada parte de la estructura discursiva de las proposiciones, las construcciones geométricas y sus pruebas posibilita el etiquetado de *acciones* que lleva a cabo el autor sobre el objeto, junto a herramientas útiles para lograrlo; por lo tanto, el núcleo del primer nivel de análisis planeta las cuestiones ¿qué hace el sujeto? y ¿cómo lo hace? para caracterizar *acciones* (Cruz-Márquez y Montiel-Espinosa, 2022); en suma, la *acción* en la *actividad matemática* ocasiona la emergencia del *uso* (ver figura 3). Para la caracterización del *uso* se formulan preguntas auxiliares como: ¿qué nociones del conocimiento matemático emplea para construir nuevo conocimiento?; ¿qué relaciones se establecen entre las nociones y en dónde las establece?; ¿son diferentes las relaciones que se establecen? Estas preguntas se respondieron a través de: etiquetado de *acciones* geométricas y espaciales[3]; la formulación de indicadores; el listado de representaciones de objetos geométricos que se relacionan en la *actividad matemática;* el estudio y la transcripción de otras proposiciones que usa para la demostración; la

[3] Las figuras 2 y 3 ejemplifican el etiquetado de *acciones* geométricas y en el espacio. Cada una de las etiquetas proviene de conceptos e indicadores relativos a procesos espaciales: [PE] propiedad espacial, [REs] relación espacial estática, [REd] relación espacial dinámica y [TE] transformación espacial. Para mayores detalles se recomienda consultar Vargas-Zambrano (2021).

identificación del tipo de espacio (bidimensional o tridimensional) en donde lleva a cabo la *acción*.

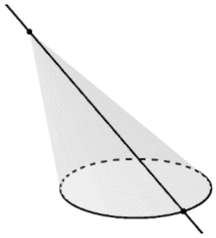
Figura 3 - Ejemplo de análisis de la Proposición 5 del Libro I de *Las Cónicas:* sección subcontraria

Primer Nivel de Análisis				
mG		Preguntas		Libro I, proposición 5
I	¿Qué hace?	¿Qué se quiere demostrar?		La existencia de una sección circular diferente a la que es paralela a la base del cono.
II	¿Qué hace?	¿Qué *objetos geométricos* tiene para demostrarlo?		Cono oblicuo con vértice A y base BC; triángulos ABC y AKG.
II	¿Qué hace?	¿Qué *primitivas espaciales* están presentes antes de la demostración?		Figura sólida; figura plana; plano.
II	¿Qué hace?	¿Qué *propiedades espaciales* tienen las representaciones de estos objetos geométricos o las *primitivas espaciales*?	[PE]	**Figura sólida:** cono oblicuo. **Figura plana:** triángulo. **Plano**
III	¿Qué hace?	¿Qué se hace en la proposición?		Seccionar el cono perpendicular a la sección triangular por el lado A, dicha sección es un círculo.
IV	¿Cómo lo hace?	¿Cuáles herramientas matemáticas utiliza para demostrar?		**Apolonio, I. 3:** sección triangular. **Euclides, XI. D. 4:** recta ortogonal a un plano. **Euclides, XI. 6:** dos rectas son paralelas cuando forman ángulos rectos con un plano. **Euclides, XI. 15:** rectas en planos paralelos. **Apolonio, I. 4:** sección circular. **Euclides, III. 31:** ángulo en el semicírculo. **Euclides VI. 8 porisma:** media proporcional. **Euclides VI. 17:** tres rectas proporcionales. **Euclides, VI. 4:** triángulos equiángulos. **Euclides, VI. 16:** rectas proporcionales en un rectángulo.
IV	¿Cómo lo hace?	¿En dónde lo hace?		Espacio tridimensional y bidimensional; cono oblicuo.
IV	¿Cómo lo hace?	¿Qué *relaciones y transformaciones espaciales* tienen las representaciones de estos objetos geométricos?	[REs]	**Ubicación de:** puntos H y L sobre las líneas curvas GHK y BC, respectivamente. **Orientación de:** plano que corta el cono; de las rectas LM y HF perpendicular a la sección triangular. **Comparación de longitudes:** establecer razones y proporciones. **Comparación de figuras:** semejanza de triángulos, por ejemplo, DFG y KFE.
IV	¿Cómo lo hace?		[REd]	**Dirección de movimiento:** de las rectar LM y HF. **Sección:** triangular, circular y subcontraria.
IV	¿Cómo lo hace?		[TE]	**Toma de perspectiva:** de los planos triangulares y circulares para establecer razones y proporciones. **Rotación:** de triángulos para establecer su semejanza. **Traslación:** movimiento de segmentos para la construcción de cuadrados y rectángulos. Por ejemplo: rectángulo KF, FG=cuadrado FH
V	¿Para qué lo hace?	¿Cómo se completa la representación?		Con un plano paralelo a la base que genera secciones comunes con la sección triangular y la sección subcontraria.
VI	¿Para qué lo hace?	¿Cuál o cuáles intenciones tiene la proposición?		Caracterizar una sección circular diferente a las paralelas a la base del cono, demostrando que, si un cono es cortado perpendicular a la sección triangular, por uno de los lados del vértice formando el ángulo del lado opuesto cortado, la sección obtenida será un círculo.
Segundo Nivel de Análisis				
Acciones ¿Qué hace?, ¿cómo lo hace?				
Seccionar el cono perpendicular a su base pasando por el vértice, para formar la sección triangular. Seccionar el cono por el lado del vértice de acuerdo con el ángulo opuesto al lado por seccionar. Seccionar el cono con un plano paralelo a la base del cono. Ubicar las secciones comunes. Ubicar el punto H y proyectarlo sobre la sección común DE o sección común KG. Tomar perspectiva respecto a la sección triangular para establecer relaciones proporcionales entre triángulos semejantes. Construir y describir todos los triángulos rectángulos KHG, donde H pertenece a la circunferencia y KG es el diámetro de la misma. Tomar perspectiva para la aplicación de áreas. Tomar perspectiva respecto a la sección circular paralela a la base para establecer medias proporcionales, porque el rectángulo FD, EF, es igual al cuadrado HF. Tomar perspectiva respecto a la sección circular que es subcontraria, para establecer medias proporcionales porque el rectángulo KF, FG, es igual al cuadrado HF. Trazar todas las rectas perpendiculares a KG desde la curva, estás tendrán el cuadrado igual al rectángulo KF, FG.				
Actividades ¿Para qué lo hace?				
Construir en un cono oblicuo una sección circular que no sea paralela a la base. Seccionar un cono oblicuo para obtener una sección circular, sin que el corte sea paralelo a la base.				

Fuente: Vargas-Zambrano (2021, pp. 224-225)

A diferencia del *uso* de la recta y la circunferencia en las construcciones con regla y compás, en la definición 1 del libro I de *Las Cónicas*, *Apollonius* (ca. 200 A. E. C./2013) establece una relación en el espacio tridimensional entre una línea recta que contiene un punto fijo y una circunferencia, ambos lugares planos tienen un punto en común que se mueve dentro de la circunferencia para generar una superficie cónica; después secciona la superficie con un plano paralelo al plano que contiene a la circunferencia para generar un círculo que será la base de un cono.

Figura 4 – cono por definición 1 del libro I de Las Cónicas de Apolonio



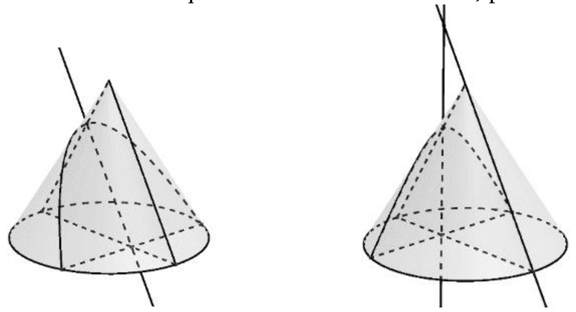
Fuente: Elaborada por los autores

Este *uso* de la recta y la circunferencia que emerge de la *acción* de rotar (ver figura 4) faculta a Apolonio para generar conos de cualquier tipo, no solo rectos, oblicuos también, esto con el fin de generalizar la teoría de seccionado admitida para su época, y valorar todas las familias de curvas que se generan gracias a los cortes. Cabe mencionar que la definición de cono expuesta en los *Elementos*, y esta de *Las Cónicas*, la *acción* de rotar se mantiene, debido a que la mayoría de las superficies conocidas por los griegos eran superficies de revolución. Con el cono definido, se tomó el enunciado de la proposición 8 del libro I de *Las Cónicas;* aunque no aparecen las palabras parábola e hipérbola, en esta se caracteriza el corte para construir curvas que crecen indefinidamente:

> Si un cono es cortado por un plano a través del eje, y si el cono es también cortado por otro plano que corte a la base por una recta perpendicular a la base del triángulo según el eje, y si el diámetro de la sección resultante sobre la superficie , o bien, es paralelo a uno de los lados del triángulo o encuentra uno de los lados extendido más allá del vértice del cono, y si ambos la superficie del cono y el plano cortado son prolongados indefinidamente, entonces la sección también crecerá indefinidamente, y alguna línea recta dibujada desde la sección del cono paralela a la línea recta en la base del cono cortará desde el diámetro sobre el lado del vértice una línea recta igual a cualquiera línea recta dada. (*Apollonius*, ca. 200 A. E. C./2013, p. 15)

El *uso* del triángulo obtenido por la *acción* de seccionado (triángulo axial) orienta el corte que genera la curva, en efecto, la sección común entre el plano del triángulo y el plano de la curva será una línea recta o diámetro de la curva. La sección crecerá indefinidamente junto a la prolongación de la superficie cónica si y solo si: a) el diámetro de la sección es paralelo a otro lado del triángulo o generatriz, b) el diámetro se interseca con la prolongación del otro lado del triángulo axial o generatriz, más allá del vértice del cono, sin que este sea estrictamente paralelo al eje del sólido (ver figura 5). También el corte del cono que genera la curva es dependiente de la recta perpendicular a la base del triángulo axial, entonces esta es equivalente a la sección común entre el plano de la curva y el plano de la base del cono. Esta recta ubicada dentro del círculo es indispensable para la definición del diámetro de la curva, pues se considera diámetro a la recta que divide en dos partes iguales a las rectas trazadas ordenadamente sobre él.

Figura 5 – Secciones que crecen indefinidamente, parábola e hipérbola

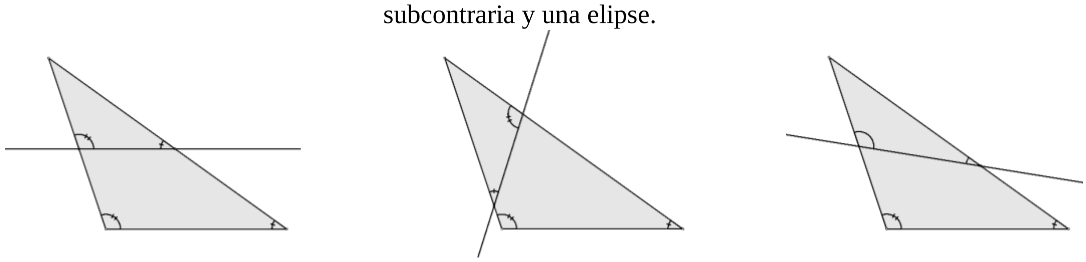


Fuente: Elaborada por los autores

Hasta este punto son definidas las secciones que crecen indefinidamente. En la siguiente proposición *Apollonius* (ca. 200 A. E. C./2013) afirma: "si un cono es cortado por un plano el cual encuentra ambos lados del triángulo en el eje y sin ser paralelo a la base ni en sentido subcontrario, entonces la sección no será un círculo" (p. 16).

Similar al enunciado anterior, Apolonio no menciona a la elipse, pero sí caracteriza su corte. Aunque el *uso* del triángulo se vuelve a presentar, el propósito del Gran Geómetra es probar que esta nueva sección no es un círculo, ni un círculo en sentido subcontrario.

Figura 6 – Triángulo axial de un cono oblicuo (vista lateral). De izquierda a derecha: una sección circular, una subcontraria y una elipse.



Fuente: Elaborada por los autores

Para esta prueba fue indispensable el *uso* del cono oblicuo. En este *uso* recae la demostración de la existencia de otra sección circular, que no es paralela a la base del cono, la cual recibe el nombre de sección subcontraria o círculo en sentido subcontrario. Estas tres secciones: la sección circular, la sección subcontraria y la sección que no es circular ni subcontraria (elipse), se generan tras efectuar el corte de ambos lados del triángulo axial (ver figura 6). La diferencia deviene del *uso* del triángulo bajo la *acción* de comparar los ángulos internos del triángulo axial y el triángulo obtenido por la sección. Entonces, respecto a la vista lateral del cono, si el cono es seccionado formando un triángulo semejante al triángulo axial, la sección resultante será siempre un círculo (ver figuras 2 y 6), de lo contrario será una elipse.

3.3. Hipótesis epistemológica

Bajo nuestro posicionamiento teórico que sustenta la emergencia del *uso* a través de la *acción* y por ende el de su *significado,* se resaltan *usos* del conocimiento ligados a *acciones* materiales normadas por el contexto como muestra el cuadro 4. Entre ellos se destacan: el *uso de la recta y la circunferencia* a partir de la *actividad matemática* de construir con regla y compás. El *uso del triángulo y la circunferencia* relativo a la *acción* de seccionar.

Cuadro 4 – *Acciones* y *usos* encontrados en los análisis textual y contextual

Acción* reconstruida del tratado, que describe la *interacción del sujeto con el objeto en el medio		***Uso del conocimiento matemático***
Acción	Ubicar puntos sobre el **plano**.	Plano como lugar.
Acción	Trazar **rectas** y **circunferencias**.	Rectas y circunferencias como lugares planos.
Actividad matemática: construir con regla y compás para definir **lugares planos**.		
Acción	Rotar **triangulo rectángulo** para definir el **cono.**	Cono como superficie de revolución a partir de un triángulo rectángulo.
Acción	Seccionar el cono con un **plano**.	Plano como objeto.
Acción	Seccionar a partir del **triángulo rectángulo**.	Triangulo rectángulo para direccionar el seccionado.
Acción	Seccionar **cono recto** perpendicular a su generatriz para construir **secciones cónicas**.	Cono como solido concreto. Cónicas como secciones comunes.
Actividad matemática: seccionar para definir **lugares sólidos** o **cónicas**.		
Acción	Rotar una **recta** a partir de un punto fijo y un punto que se mueve dentro de la **circunferencia** para definir **superficies cónicas rectas** y **oblicuas**.	Recta y circunferencia como objetos para definir superficies de revolución.
Acción	Seccionar el cono con un **plano** paralelo a la circunferencia para obtener **un círculo** base del cono.	Plano como objeto. Círculo como sección común.
Acción	Seccionar el cono con un **plano** para obtener el **triángulo axial**.	Plano como objeto. Triángulo como sección común.
Acción	Comparar ángulos internos de dos **triángulos**.	Triángulos semejantes.
Acción	Seccionar **cono oblicuo** para construir las **secciones que crecen indefinidamente y las que no**.	Cono como solido concreto. Superfície cónica infinita.
Actividad matemática: seccionar para definir **lugares sólidos** o **cónicas**.		

Fuente: Elaborado por los autores

La geometría de las cónicas en su génesis es una amalgama entre los fundamentos de la geometría plana y *acciones* en el espacio como la rotación y el seccionado. La limitante del *uso* de la recta y la circunferencia para construir curvas en el plano provocó una interacción con el medio concreto que facilitó la caracterización de las cónicas. Esta *acción* de seccionado que trasciende de la empírea a la *actividad matemática* hace emerger el *uso* de la sección común; tanto los lugares planos como sólidos son secciones comunes entre planos y superficies.

El *uso* de la circunferencia como sección común ayuda a definir el cono oblicuo, precisa la construcción de las cónicas que crecen indefinidamente y acompaña la construcción de la elipse; justificando la tradición griega de no incluir a la circunferencia dentro de las cónicas, pues junto al triángulo, la circunferencia actúa como herramienta para construir los lugares sólidos. El *uso* del triángulo relativo a la *acción* de seccionado fue clave; no obstante, hay *usos* del triángulo para la caracterización de los cortes que se mantienen dentro de la geometría plana, porque las *acciones* que permiten la emergencia de su *uso* se efectúan en el espacio bidimensional (trazo de rectas respecto a sus lados y comparación de ángulos internos).

En estas proposiciones que actuaron como unidades de análisis se evidencia que el *significado* de las cónicas es relativo al *uso* de la sección común, sus elementos: diámetros, ejes, vértices y ordenadas se definen como o por medio de secciones comunes, además, el *significado* de las cónicas para Apolonio está en estrecho vínculo con el cono y el corte; el *Gran Geómetra* pudo omitir la escritura del *mini tratado* y establecer las propiedades de las cónicas en el plano, pero no lo hizo (Fried y Unguru, 2001; Fried, 2001). Con estos ejemplos precisamos que no vemos el *significado como uso*, tal cual la tesis de Wittgenstein, aunque sin distanciarnos del todo sí estudiamos el *significado a través del uso.*

CONCLUSIONES Y REFLEXIONES FINALES

Aunque nuestro interés no es llevar la historia al aula, la construcción de las cónicas en sí misma desborda un conjunto de factores culturales y *acciones* individuales que describen la *actividad matemática*, por ende, vislumbra significados que pasan desapercibidos en la escuela. Dentro de la amalgama de significados de las cónicas presentes en la escuela descritos por Bartolini Bussi (2005), se logró desentrañar *significados* del plano relacionados con las *acciones* de *ubicar* (plano como lugar) y *seccionar* (plano como objeto) basados en las acepciones propuestas por Fried (2014); también los *usos* del triángulo dentro de *acciones* en el espacio tridimensional y bidimensional; y por supuesto el *significado* de las cónicas relativo a la sección común que muestra con claridad la racionalidad en la Antigua Grecia.

Con este par de análisis, uno contextual y otro textual, la anécdota de los cortes del cono de Apolonio de Perga puede incursionar no como una superficial *estrategia de adición,* por el contrario, para una eventual puesta en escena estas *acciones, usos* y *significados* harían más accesible y humano ese conocimiento matemático. Adicional a este potencial, las *acciones* y *usos* reconstruidos pueden orientar el planteamiento de situaciones de clase y problemas de geometría plana y del espacio, no siempre relacionados con las cónicas, sino con semejanza de triángulos, sólidos de revolución y demás.

También, y con el fin de potenciar el *significado* de las cónicas a través del *uso* de la sección común —*significado* relegado en la escuela—es relevante considerar la construcción del cono, tanto el recto como el oblicuo, pues las *acciones* que se llevan a cabo sobre este objeto son las *acciones* que acompañan y anteceden a las cónicas como conocimiento matemático, en suma, ocasionan la emergencia del *uso* del triángulo y la circunferencia.

Con el fin de contribuir a la siempre vigente discusión propuesta por Fried (2001), el planteamiento de investigación y resultados mostrados en esta comunicación dan su lugar a la Matemática Educativa y a la Historia de las Matemáticas con el fin de favorecer la producción de conocimiento científico, en pro de la enseñanza y el aprendizaje de las cónicas. La tradición multidisciplinar de la Matemática Educativa, disciplina hecha por y para profesores no desconoce y además incentiva el uso riguroso de los resultados de investigación en otras ciencias afines, que puedan aportar al entendimiento de fenómenos escolares, y por qué no, fundamentar estrategias para problematizar el saber y democratizar el conocimiento matemático.

REFERENCIAS

Apollonius. (2013). *Conics: Books I-IV* (R. C. Taliaferro & M. N. Fried, Trans.). Santa Fe, United States: Green Lion Press. (Original work published ca. 200 B.C.E.)

Arquímedes. (2005). *Tratados I: Sobre la Esfera y el Cilindro, Media del círculo, sobre los Conoides y Esferoides* (P. Ortiz, Trad.). Madrid, España: Gredos. (Trabajo original publicado ca. 225 a.C.)

Barbin, É. (2008). Perennial notions and their teaching. In E. Barbin, N. Stehliková & C. Tzanakis (Eds.), *History and Epistemology in Mathematics Education: Proceedings of the fifth European Summer University* (pp. 157-161). Pilzen: Vydavatelský servis.

Barbin, É., Guillemette, D., & Tzanakis, C. (2020). History of Mathematics and Education. In S. Lerman (Ed) *Encyclopedia of Mathematics Education.* Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_69

Bartolini Bussi, M. (2005). The meaning of conics: historical and didactical dimensions. In J. Kilpatrick, C. Hoyles, O. Skovsmose & P. Valero. (Eds.), *Meaning in Mathematics Education* (pp. 39-60). New York, United States: Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-24040-3_4

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática,* (M. Martínez Pérez, Trad.). Madrid, España: Alianza Editorial.

Buendía, G., & Montiel, G. (2011). From History to Research in Mathematics Education: Socio-Epistemological elements for Trigonometric Functions. In V. Katz, & C. Tzanakis (Eds.), *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education* (pp. 67-82). Washington, DC: The Mathematical Association of America. https://doi.org/10.5948/UPO9781614443001.008

Campos, A. (2006). *Introducción a la historia y a la filosofía de la matemática. Lógica y Geometría Griegas.* Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Cantoral, R., Montiel, G., y Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática,* 8, 9-28.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D., y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática,* 7(3), 91-116.

Cordero, F., y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Relime Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(1), 7-38. Recuperado de https://relime.org/index.php/numeros/todos-numeros/volumen-10/numero-10-1/582-200701a

Cruz-Márquez, G., y Montiel-Espinosa, G. (2022). Medición Indirecta de Distancias y el Trabajo Geométrico en la Construcción de las Nociones Trigonométricas. *Acta Scientiae*, 24(4), 81-108. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6911

Espinoza, L., y Cantoral, R. (2011). Una caracterización de los contextos de significación desde la Socioepistemología. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24* (pp. 889-896). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Espinoza-Ramírez, L., Vergara-Gómez, A., y Valenzuela-Zúñiga, D. (2018). Geometría en la práctica cotidiana: la medición de distancias inaccesibles en una obra del siglo XVI. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 21(3), 247-274. https://doi.org/10.12802/relime.18.2131

Euclides. (2007). *Elementos II* (M. L. Puertas, Trad.). Madrid, España: Gredos. (Trabajo original publicado ca. 300 a.C.)

Fried, M. (2001). Can Mathematics Education and History of Mathematics Coexist? *Science & Education*, 10(4), 391-408. https://doi.org/10.1023/A:1011205014608

Fried, M. (2014). Similarity and Equality in Euclid and Apollonius. *The St. John's Review. Essays & Lectures*, 55(2), 17-40.

Fried, M. (2018). Ways of Relating to the Mathematics of the Past. *Journal of Humanistic Mathematics*, 8(1), 3-23. https://doi.org/10.5642/jhummath.201801.03

Fried, M. (2019). Conics sections. *Oxford Classical Dictionary*, 1-14. https://doi.org/10.1093/acrefore/9780199381135.013.8161

Fried, M., & Unguru, S. (2001). *Apollonius of Perga's Conica. Text, Context, Subtext.* Leiden, Netherlands: Brill.

Kuckartz, U. (2019). Qualitative Text Analysis: A Systematic Approach. In G. Kaiser y N. Presmeg (Eds), *Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education. ICME-13 Monographs*, (181-197). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15636-7_8

Lerman, S. (2000). The Social Turn in Mathematics Education Research. In J. Boaler (Ed.), *Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 19-44). Westport, CT: Ablex.

López-Acosta, L., y Montiel-Espinosa, G. (2022). Emergencia de las ecuaciones paramétricas en Viète y Descartes. Elementos para repensar la actividad analítica-algebraica. *Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias,* 17(3), 539-559. https://doi.org/10.14483/23464712.17062

Montiel, G., y Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: ejemplos e ilustraciones. En M. Rosas y A. Romo (Eds.), *Metodología en Matemática Educativa: Visiones y Reflexiones* (pp. 61-79). Ciudad de México, México: Lectorum.

Ortiz, P. (2005). *Tratados I: Sobre la Esfera y el Cilindro, Media del círculo, sobre los Conoides y Esferoides*. Madrid, España: Gredos.

Rotaeche, A., y Montiel, G. (2011). Desarrollo histórico como mediador de conocimiento para la enseñanza del concepto de ángulo. En G. Buendía (Coord.), *Reflexión e Investigación en Matemática Educativa* (pp. 191-218). México: Lectorum.

Salinas, P., & Pulido, R. (2017). Understanding the Conics through Augmented Reality. *EURASIA Journal of Mathematics Science and Technology Education,* 13(2), 341-354. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.00620a

Swokowski, E. W., y Cole, J. A. (2009). *Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica* (J. H. Romo, Trad.). Ciudad de México, México: CENGAGE Learning. (Trabajo original publicado en 2008)

Torres-Corrales, D., y Montiel-Espinosa, G. (2020). La desarticulación matemática en Ingeniería. Una alternativa para su estudio y atención, desde la Matemática Educativa. *Nóesis*, 29(58-1), 24-55. http://dx.doi.org/10.20983/noesis.2020.3.2

Torres-Corrales, D., y Montiel-Espinosa, G. (2021). Resignificación de la razón trigonométrica en estudiantes de primer año de Ingeniería. *Educación Matemática*, 33(3), 202-232. http://dx.doi.org/10.24844/EM3303.08

Vargas-Zambrano, L. C. (2021). *Un Estudio Histórico-Epistemológico sobre la Construcción Social de las Secciones Cónicas en Geometría del Espacio* (Tesis de maestría no publicada). Cinvestav-IPN, Ciudad de México. https://doi.org/10.13140/RG.2.2.19308.69767

Vargas-Zambrano, L. C., y Montiel-Espinosa, G. (2022). Igualdad de áreas: vínculo y antecedente entre la sección del cono y la curva sobre el plano. En R. E., Gutiérrez y J. L. Prieto (Comps.). *Memorias del VI Congreso Iberoamericano de Historia de la Educación Matemática* (pp. 317 – 331). Brasil: Asociación Aprender en Red. Recuperado de https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/230722

Wardhaugh, B. (2010). *How to read Historical Mathematics.* New Jersey, United States: Princeton University Press.

Withrington, E. (2000). Wittgenstein y los cimientos del lenguaje. *Elementos,* 7(39), 41-49.