



NOVAS PROPOSTAS DE ENSINO DOS SABERES MATEMÁTICOS NA FORMAÇÃO: uma aritmética e uma geometria intuitivas

NOUVELLES PROPOSITIONS POUR L'ENSEIGNEMENT DES SAVOIRS MATHÉMATIQUES EN FORMATION: une arithmétique et une géométrie intuitives

Viviane Barros Maciel¹

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-9883-3945>

Francisca Janice dos Santos Fortaleza²

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-7944-4752>

RESUMO

A entrada do método intuitivo na instrução primária marca um tempo de modernização no ensino e na formação, enunciando novos saberes matemáticos. Com sua entrada, uma aritmética e uma geometria intuitivas *a* ensinar se articulam a uma aritmética e a uma geometria *para* ensinar, caracterizando matemáticas *da* formação entre 1870 a 1920. Questiona-se, a partir de tais afirmações, de que forma as ideias do método intuitivo estavam integradas às matemáticas da formação, sistematizadas a partir dos manuais pedagógicos, de modo a enunciar novas propostas para o ensino dos saberes matemáticos, em particular da aritmética e da geometria? Assim, esta pesquisa, qualitativa, bibliográfica e documental tem como objetivo analisar, a partir das sistematizações de uma aritmética e de uma geometria intuitivas da formação, elementos do método intuitivo imbricados nas orientações dos autores de manuais pedagógicos aos professores da instrução primária. Os manuais pedagógicos de Aritmética e de Pedagogia (1870 - 1920), que direcionaram, respectivamente, orientações aos professores para o ensino de aritmética e geometria, e teses de doutoramento que caracterizaram uma aritmética e uma geometria intuitivas para ensinar, constituem-se fontes fundamentais para esta análise. Os resultados mostram que o método intuitivo, integrado às matemáticas da formação, indicaram novas propostas para o ensino de aritmética e de geometria, que se contrapunham à cultura livresca do final do século XIX.

Palavras-chave: Matemática para ensinar. Aritmética para ensinar. Geometria para ensinar. Saberes profissionais. História da educação matemática.

RÉSUMÉ

L'arrivée de la méthode intuitive dans l'enseignement primaire marque une époque de modernisation de l'enseignement et de la formation de nouveaux savoirs mathématiques. À son arrivée, une arithmétique et une géométrie intuitives *à* enseigner s'articule à une arithmétique et à une géométrie *pour* enseigner, caractérisant de cette façon, les mathématiques de la formation des enseignants entre 1870 et 1920. Partant de ces constats, la question principale est la suivante, de quelle manière les idées de la méthode intuitive ont-elles été intégrées aux mathématiques de la formation de l'enseignant, systématisés à partir des manuels pédagogiques, afin d'énoncer de nouvelles propositions pour l'enseignement des savoirs mathématiques, notamment de l'arithmétique et de la géométrie? Ainsi, cette recherche qualitative, bibliographique et documentaire vise à analyser, à partir de la

¹ Doutora em Ciências pela Universidade Federal de São Paulo - Campus Guarulhos (UNIFESP). Professora Adjunta da Universidade Federal de Jataí (UFJ), Jataí, Goiás, Brasil. E-mail: vivianemaciel@ufj.edu.br

² Doutora em Educação em Ciências e Matemáticas pela Universidade Federal do Pará (UFPA). Professora Substituta da Universidade Federal Rural da Amazônia (UFRA), Capitão Poço, Pará, Brasil. Professora da Secretaria Municipal de Educação, Maracanã, Pará, Brasil. E-mail: janice-fortaleza@hotmail.com

systematisation d'une arithmétique et d'une géométrie intuitives de la formation des enseignants, des éléments de la méthode intuitive imbriqués dans les lignes directrices des auteurs de manuels pédagogiques pour l'enseignement primaire. Les manuels pédagogiques d'Arithmétique et de Pédagogie (1870 - 1920), qui guidaient les enseignantes pour l'enseignement de l'arithmétique et de la géométrie, respectivement, et thèses de doctorat dans lesquelles des auteurs ont caractérisé une arithmétique et une géométrie intuitives pour enseigner, constituent des sources fondamentales pour cette analyse. Les résultats montrent que la méthode intuitive, intégrée aux mathématiques de la formation, indiquait de nouvelles propositions pour l'enseignement de l'arithmétique et de la géométrie, qui s'opposaient à la culture livresque de la fin du XIXe siècle.

Mot-clés: Mathématiques pour enseigner. Arithmétique pour enseigner. Géométrie pour enseigner. Savoirs professionnels. Histoire de l'éducation mathématique.

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Em meados do século XIX, era comum encontrar nos prefácios das obras pedagógicas a reclamação de que a maneira como o ensino de matemática estava acontecendo era insatisfatória, devido à ênfase dada à memorização, à repetição e à abstração. Em contraposição a isso, um movimento de renovação pedagógica foi iniciado, e propostas de transformações no ensino de rubricas matemáticas começaram a serem sugeridas e a ocorrerem, especialmente a partir de manuais – os manuais pedagógicos – que orientavam, indireta ou diretamente, os professores na sua prática pedagógica. De forma indireta, os manuais voltados ao ensino de rubricas próprias (aritmética, geometria, álgebra) e indicados ao uso do professor e, de forma direta, os manuais com orientações pedagógicas gerais ou específicas sobre um determinado campo de saber, elaborados intencionalmente para uso na formação do professor.

Dentre as principais transformações, estava a proposição de um novo método que deixasse o ensino mais concreto e utilitário, o qual ficou conhecido como *método de ensino intuitivo*³, amenizando, desta maneira, problemas comuns ao ensino escolar, já mencionados.

De acordo com Valdemarin (2004), o método intuitivo foi concebido por seus elaboradores como um instrumento para modernizar o ensino. No Brasil, a sua adoção representava, para além de um instrumento de renovação pedagógica, a pretensão de viabilizar as “transformações sociais, políticas e econômicas que se avolumam no final do Império” (Valdemarin, 2001, p. 159). Segundo essa autora, o método intuitivo postula que é essencial estimular os sentidos dos alunos para que suas ideias sejam despertadas e desenvolvidas em uma marcha que segue da percepção para a ideia e do concreto para o abstrato. E ainda que “é mais natural aprender primeiro o concreto e depois o abstrato e o todo antes das partes” (p. 163).

Portanto, estar em acordo com as proposições do método intuitivo significava considerar que “o conhecimento das coisas que nos rodeiam é possível pelo fato de termos *sentidos* que fazem a ligação entre o objeto a ser conhecido e o sujeito que o conhece, criando as ideias” [ênfase adicionada] (Valdemarin, 2006, p. 171). Para isso, conforme Valdemarin (2006), torna-se necessário que sejam utilizados objetos didáticos, cuja elaboração tem objetivos educativos, e que se recorra a fatos que fazem parte da vida do estudante, para promover a aprendizagem, ou formular as ideias.

³ O método intuitivo foi divulgado pelo educador suíço Johann Heinrich Pestalozzi (1746-1827), que ficou conhecido como pai da pedagogia moderna.

Acompanhando o que estava acontecendo em termos de mudanças pedagógicas em torno do mundo, a formação do professor dos primeiros anos escolares no Brasil passou a integrar disciplinas que atendiam à necessidade da presença de saberes específicos do professor, que atribuísse a ele ferramentas, em particular, as quais buscassem um ensino em acordo com o que era proposto pelo método intuitivo, para que, quando em sala de aula, ele desenvolvesse o ensino conforme as inovações pretendidas para este tempo escolar.

Assim, de que forma as ideias do método intuitivo estavam integradas às matemáticas da formação, sistematizadas a partir dos manuais pedagógicos, de modo a enunciar novas propostas de ensino dos saberes matemáticos, em particular da aritmética e da geometria? Tencionando responder a essa questão, faremos uma análise, a partir das caracterizações realizadas, de uma aritmética e uma geometria para ensinar, nas teses de doutoramento de Maciel (2019) e de Fortaleza (2021), respectivamente, no período de 1870 a 1920.

1. O MÉTODO INTUITIVO EM UMA *ARITMÉTICA PARA ENSINAR*

A *matemática para ensinar*⁴ – interpretada a partir de documentações vinculadas à formação de professores (que incluem os manuais pedagógicos, os programas de ensino, as revistas pedagógicas, os relatórios de inspetores, os livros de lições professadas, entre outras, ou mesmo as documentações elaboradas para contribuir com o trabalho didático e pedagógico do professor (as apostilas, os artigos em jornais etc.) –, articulada a uma *matemática a ensinar* - interpretada a partir de documentações ligadas ao ensino e à aprendizagem de rubricas matemáticas (que consideram os conteúdos a ensinar, os planos de ensino, os livros didáticos, as leis que embasam o ensino etc., com o objetivo de orientar práticas docentes) – compõem o que denominamos de *matemáticas da formação do professor*. Portanto, a articulação entre a aritmética e a geometria presentes na formação e a aritmética e a geometria do ensino integra as *matemáticas da formação*.

Buscando analisar de que maneira uma aritmética intuitiva da escola primária articulada a uma *aritmética intuitiva para ensinar* integraram, dessa maneira, uma aritmética intuitiva da formação, traremos para o diálogo resultados sistematizados nas teses de doutoramento de

⁴ As expressões “*matemática a ensinar*” e “*matemática para ensinar*” são categorias criadas por Bertini et al. (2017), referenciadas nos “saberes *a e para ensinar*”, definidos por Hofstetter e Schneuwly (2017).

Oliveira (2017), *A aritmética escolar e o método intuitivo: um novo saber para o curso primário (1870 – 1920)*, e de Maciel (2019), *Elementos do saber profissional do professor que ensina matemática: uma aritmética para ensinar nos manuais pedagógicos (1880 – 1920)*.

Oliveira (2017) analisou livros didáticos de Aritmética, indicados ao uso do aluno, enquanto Maciel (2019) analisou manuais pedagógicos, como as Aritméticas propostas ao uso do professor e os compêndios de Pedagogia, elaborados exclusivamente para a formação do professor. A partir da análise das Aritméticas, a autora caracterizou *multiplicações para ensinar – tradicional, tradicional-intuitiva, intuitiva, intuitiva-sob medida* – das quais, neste texto, destacamos a *multiplicação intuitiva para ensinar*, interpretada a partir do manual de René Barreto (1912). Nos compêndios de Pedagogia, a autora caracterizou *cálculos para ensinar – tradicional, intuitivo, intuitivo-abstrato* –, dos quais acentuamos o *cálculo intuitivo para ensinar*, interpretado a partir dos manuais de Daligault (1874), Pontes (1881) e Araújo (1886).

Para verificar de que forma o método intuitivo se fazia presente na *aritmética para ensinar*, sistematizada por Maciel (2019), partimos dos critérios, elaborados pela autora, de análise das orientações contidas nos manuais. Nos manuais de Aritmética, tais critérios compreenderam: a introdução ao tema a ser ensinado e a explicação dele; a graduação do ensino do tema e a articulação deste com os demais temas a serem ensinados; a sequenciação com que ele era apresentado e a generalização do tema; e, por fim, a mensuração e a prática, ou mesmo as formas de avaliação do tema a ser ensinado. No caso dos manuais de Pedagogia, foi preciso olhar para a proposta de organização do cálculo a ser ensinado, as formas de articulação, de graduação e de generalização dele.

Dessa maneira, buscamos articular as características apontadas na aritmética intuitiva do ensino, caracterizada por Oliveira (2017), às sistematizações de uma *multiplicação* e de um *cálculo para ensinar*, realizadas por Maciel (2019), com base nos critérios de análise elaborados por esta autora.

Um dos destaques dados por Oliveira (2017), a respeito da aritmética intuitiva do ensino, refere-se à relação entre o professor, o saber e a criança. O autor destaca que esta relação se fundamentava na conversação, ou seja, em um conjunto de perguntas que o professor fazia e que a criança deveria, de forma espontânea, respondê-las.

Segundo o autor,

a depender da lição e da matéria, requeria-se o tocar, o ver, o cheirar, o ouvir e/ou o degustar. Independente da finalidade, a criança sempre utilizava seus sentidos e faculdades, analisando os objetos e fazendo abstrações dos aspectos por meio das comparações. (p.90)

Na visão de intuição defendida por Pestalozzi, de acordo com Oliveira (2017), o ensino se daria do concreto para o abstrato. Aquele representado pelos “objetos materiais”, “móveis”; e este, pelo “processo do interior da criança no qual ela simplifica/sintetiza as informações que chegam pelos sentidos, transformando-as em conhecimento e em saber-fazer para construir o saber” (p.103).

Tais elementos podem ser verificados na *aritmética para ensinar* sistematizada por Maciel (2019) no manual de Barreto (1912). O manual apresenta lições encadeadas de forma gradual e, a cada lição, um maior nível de dificuldades é oferecido ao aluno. As lições são introduzidas pela conversação entre professor e aluno. O professor se faz mediador entre a criança e o objeto, instigando-a a observar os objetos e as representações desses por meio de desenhos, do quadro ou de recortes de papel, e a dar respostas aos questionamentos sobre as observações, explorando cada sentido dela.

Antes mesmo de iniciar a primeira lição, quando Barreto (1912) apresenta alguns “conselhos aos professores”, o autor sugere o modo de ensino, fazendo menção ao uso do objeto e às maneiras de organização da sala de aula, quando orienta “durante os exercícios, ter as creanças de pé, em torno de uma mesa sobre a qual estejam objectos que devem ser manejados” (p.9). Novamente, antecedendo ao “estudo graduado dos números”, da primeira lição, o autor propõe que seja dado à criança um saco com “numerosos objetos” (p.13). Desse saco, deveria se pedir para a criança tirar um, depois dois, depois três objetos do saco, e assim sucessivamente, até o professor verificar quantos objetos a criança tiraria em “um só golpe” (p. 13) (de uma vez só) quantidades que ela conhecesse. Depois disso é que o professor passaria para a primeira lição. Observamos que, mesmo antes de começar a primeira lição, as referências ao uso de objetos são bem demarcadas. Verificar o conhecimento prévio das crianças sobre pequenas quantidades de objetos deveria ser algo a ser observado pelo professor.

A conversação, elemento presente na caracterização da aritmética do ensino conforme aponta Oliveira (2017), é uma característica presente em todas as lições apresentadas por Barreto (1912). Na primeira lição do manual de Barreto (1912), referente ao ensino do número um e do número dois, o autor orienta o diálogo entre o professor e a criança, de maneira a instigá-la a observar partes do corpo dela, apresentando um conjunto de perguntas do tipo “*Esconda a mão esquerda. Quantas mãos escondeu? Quantos pés tem você? E quantos olhos? E quantas cabeças? [...] “Quantos cubos tenho na mão? Quantos quadrados tenho?”*” (Barreto, 1912, p.13). Ao levar a criança a observar o próprio corpo, a partir de pequenas quantidades, o autor indica ao professor considerar os conhecimentos prévios que a criança já possuísse sobre as partes do seu corpo. Cada pergunta sugerida pelo autor no primeiro capítulo, que versava sobre o número um e o número dois, tem como resposta correta um (1) ou dois (2). Após

questionar as crianças sobre as partes do corpo, Barreto (1912) passa às representações de quantidades de um objeto através de representações de figuras geométricas em fichas de papel, etapa intermediária para a abstração. Com isso, o autor recomenda ao professor levar a criança a comparar as quantidades de seu corpo, já conhecidas por ela, com a quantidade de figuras representadas, instigando a verificação da correspondência entre quantidades equivalentes, quando diz “Mostre dois dedos. Eu tenho na mão dois triangulos - Mostre-me também dois triangulos” (Barreto, 1912, p.14). Barreto, ao pedir para a criança olhar os dois dedos e os dois triângulos, ensina-os a fazer relação entre quantidades equivalentes de diferentes objetos ou figuras e a comparar.

Após as representações, Barreto (1912) passa ao ensino do número, que seria o último passo rumo à abstração. Do objeto para as representações de figuras, de modo a comparar quantidades equivalentes e, por fim, para o símbolo do número (que o autor denomina “signal”), mostrando a representação escrita do que era o número um, “1”, o número dois, “2” e que o autor denominou de “nenhum”, “0”. A compreensão do sinal ou do símbolo numérico aconteceria na última etapa para a abstração. Do objeto quantificável para a generalização, representada pelo significado e o símbolo numérico daquela quantidade. Sendo assim, o uso dos sentidos como a visão, o tato, a audição, o olfato e até mesmo o paladar, conforme exemplos de alimentos que faziam parte do dia a dia da criança, como laranja, leite, pudim, pão etc., poderiam incentivá-la a raciocinar e seriam fundamentais para o ensino e a aprendizagem da aritmética, segundo as ideias do método intuitivo.

Retomando a tese de Oliveira (2017), outro elemento apontado pelo autor é que o ensino de cálculo deveria ser interpretado pela criança, inicialmente, como um *saber sentido*, depois como um *saber visual*, e somente depois, como um *saber escrito* (p. 96). Isto pode ser constatado nos manuais de Aritmética (onde observamos a passagem do objeto, para outros tipos de representações, até a escrita dos números) e de Pedagogia que Maciel (2019) analisou. A autora afirma que, nos manuais de Pedagogia, os autores orientavam os professores ao uso de um material didático no ensino de cálculo (ensino de números e operações de modo geral), o contador mecânico (representação do ábaco). Como orientação, em um primeiro momento, os alunos poderiam participar juntamente com o professor que, com o auxílio de uma vareta, poderia passar as contas para o aluno realizar a contagem delas, depois de contar até 100 passaria às operações/fatos fundamentais. O uso da composição e da decomposição seria essencial para o ensino de operações como a adição e a subtração, por exemplo. Ensinar com o contador mecânico e uso de objetos que representassem os números (*saber sentido*). Em um segundo momento, a contagem e as operações seriam realizadas, por meio da visualização das

“contas” do contador (*saber visual*) e registro oral dos números e das operações. Somente depois aconteceria o ensino do algarismo, números e operações de forma escrita (*saber escrito*), representando a abstração do concreto. A passagem do cálculo oral para o cálculo escrito, *saber sentido* ao *saber escrito*, é o que Oliveira (2017) denominou de “progressão psicológica do cálculo” (p.100), indicando um caminho do sensível ao inteligível.

Outro elemento essencial nas caracterizações de uma aritmética intuitiva por Maciel (2019) foi a graduação do ensino. Graduação entendida não como uma sequenciação, estrutura com que a aritmética é apresentada, mas como “uma dada concepção de ensino e aprendizagem” (Morais et al., 2021). Assim, Barreto (1912), visando incorporar elementos do método intuitivo nas suas orientações, propõe que a graduação do ensino não partiria mais de cada elemento matemático para o todo, mas sim, seguiria uma outra lógica, do todo para as partes, essência do método analítico. A ênfase estaria nos rudimentos e não nos elementos, conforme Valente (2016),

Somente os rudimentos poderão se articular com os problemas da vida cotidiana. Com eles forma-se o aluno que aproveita a parte útil e transferível do saber para a vida comum. Não se trata de iniciar o aluno no percurso da ciência, dando-lhes os elementos de cada saber avançado. A escola dos primeiros anos é prática, tem caráter terminal e precisa usar o seu tempo formativo para melhor municiar os alunos que dela saírem com os instrumentos úteis à vida de cada um. (p.43)

A graduação estava presente também nos manuais de Pedagogia, conforme Maciel (2019). Segundo a autora, Daligault (1874) afirmava que o professor deveria ensinar número para depois ensinar sua composição e decomposição, indicando a marcha do todo para as partes. No caso do manual de Pontes (1881), o autor indicava ao professor partir do conhecido para o desconhecido como forma de direcionar o método a se utilizar. Já Araújo (1886) orientava ao ensino dos rudimentos e, portanto, do fácil para o difícil, indicando também o uso do método analítico, do todo para as partes.

Em suma, a forma de manifestação do método intuitivo nos manuais pedagógicos, no ensino de aritmética/cálculo, está imbricada nas diretivas de um ensino que partisse do concreto, com o uso de objetos materiais, móveis, quantificáveis ou mesmo com o auxílio de materiais didáticos para o ensino de números e das operações, principalmente, passando depois pela comparação entre quantidades equivalentes por meio da visualização, de quaisquer que fossem as representações do concreto, fazendo uso da oralidade, configurando uma etapa intermediária rumo à abstração; e, por fim, a escrita do número bem como a resolução de operações e problemas da vida prática, fazendo uso de símbolos numéricos representaria a

última etapa para a abstração de uma *aritmética intuitiva para ensinar* prática, utilitária e rudimentar.

2. O MÉTODO INTUITIVO EM UMA *GEOMETRIA PARA ENSINAR*

Como mencionado, em finais do século XIX os manuais pedagógicos proporcionavam à formação do professor o estudo de propostas para ensinar geometria que traziam em sua elaboração elementos do método intuitivo, articulados aos conteúdos geométricos que costumavam integrar o ensino, ofício no qual tal professor atuaria. Neste artigo, buscaremos evidenciar como tais elementos eram mobilizados na *geometria para ensinar*, sistematizada por Fortaleza (2021), tendo em conta um conjunto de manuais pedagógicos da formação de professores dos primeiros anos escolares de tempos do método intuitivo.

A autora caracteriza a *geometria para ensinar* como uma matemática própria da formação do professor, pautada na articulação e na mútua dependência entre a *geometria a ensinar*, objeto de trabalho do professor, e os saberes *para ensinar geometria*, que seriam saberes da formação do professor mobilizados para o ensino de geometria, ferramentas de trabalho do professor, cuja intencionalidade de mobilização estaria dedicada ao ensino de geometria no processo de elaboração dessa *geometria para ensinar*.

Para sistematizar tal geometria, Fortaleza (2021) teve em conta as convergências possíveis de serem estabelecidas entre os sete manuais pedagógicos⁵ por ela utilizados como fonte de pesquisa, tendo em vista os seguintes parâmetros de comparação: a *geometria a ensinar* e os saberes *para ensinar geometria*: materiais de ensino indicados, a marcha de ensino, o processo de apresentação e o de generalização e, também, o ideário pedagógico de referência. Essas convergências demonstram a ampla circulação de uma mesma ideia para a formação do professor para ensinar matemática em determinado período, firmando-as como passíveis de serem transformadas em saber, como afirma Valente (2020).

O ideário pedagógico de referência, identificado como convergente, entre as orientações *para ensinar geometria*, analisadas pela autora, foi justamente aquele que estava em destaque na época (1870-1920). Estava, então, assentado o método intuitivo. Isso, tendo em vista também

⁵ Braun (1872); Pontes (1873); Affreixo e Freire (1890); Coelho (1892, s.d, 1907); Lições de Pedagogia (1907); Carré e Liquier (1920).

a forma como os saberes *para* ensinar geometria foram articulados e mobilizados, levou a autora a caracterizar a *geometria para ensinar* daquele período como *geometria intuitiva para ensinar*. Cabe-nos, aqui, analisar de que forma as ideias do método intuitivo estavam pautadas no processo de constituição dessa geometria.

A *geometria a ensinar* mobilizada era pautada em elementos da geometria euclidiana, representados pelo estudo de formas geométricas planas e espaciais, e os elementos que as constituem. Começando pela esfera, sua forma deveria ser objeto de atenção dos alunos, sendo utilizados materiais que a representassem concretamente para despertar os sentidos dos estudantes, recorrendo, inclusive, à ênfase de sua superfície estar em uma só cor para que gradualmente fosse viável observar que essa é uma forma geométrica cuja superfície é homogênea. Esse processo poderia ser guiado por questionamentos do professor para que os alunos desenvolvessem sua percepção sobre os elementos que caracterizam uma forma como a de uma esfera.

Para o ensino da esfera, tendo em vistas as ideias acerca do método intuitivo apresentadas na introdução (Valdemarin, 2001, 2006), fica evidente que, desde o princípio do processo de ensino, se faziam presentes articulações com postulações do método intuitivo, sendo, este, regedor do processo de apresentação desse objeto geométrico de ensino, iniciando o ensino da esfera a partir do concreto, valorizando o uso dos sentidos pelos alunos.

Em se tratando da atividade inicial para o ensino do cubo, segundo objeto geométrico de ensino a ser apresentado aos alunos, Fortaleza (2021, p. 179) destaca que cabia ao professor “assegurar que os alunos, a partir do despertar dos seus sentidos, da observação e da reflexão, viabilizado pelos materiais de ensino, entendam qual é a forma de um objeto geométrico chamado cubo”. Portanto, novamente ressaltamos a mobilização das ideias do método intuitivo para promover a primeira aproximação do aluno com o objeto geométrico que se pretendia que ele (o aluno) conhecesse. Por ora, apenas sua forma, mas, se pensarmos que o método intuitivo promove um entendimento do concreto para o abstrato, da percepção para a ideia, podemos esperar o desenvolvimento de um processo de ensino que prove esse desencadeamento.

A comparação entre cubos de mesmo tamanho e de tamanhos diferentes é um elemento apontado por Fortaleza (2021) no processo de sistematização de uma *geometria para ensinar*. Analisamos que essa comparação é possível pela observação que é viabilizada pela atenção dedicada pela mobilização dos sentidos, possibilitando ao aluno compreender gradualmente que as características que definem uma forma geométrica chamada “cubo” se mantêm independentemente de seu tamanho. Essa análise reitera a presença de ideias do método intuitivo no seguimento do processo de ensino do cubo.

Os mesmos procedimentos dedicados ao ensino do cubo são atribuídos ao ensino do paralelepípedo retângulo, próximo objeto de ensino a ser apresentado ao aluno. Neste caso, a comparação vai além, e o paralelepípedo deve também ser comparado com o cubo, de modo que se destaquem semelhanças e diferenças, exigindo mais do processo de observação, e, portanto, do refinamento da mobilização dos sentidos para que se constatem no concreto elementos definidores de tais formas geométricas.

Seguindo para o ensino do cilindro, a apresentação do objeto de ensino a partir do concreto se faz mais uma vez presente, e a indicação de colorir as superfícies de natureza diferentes com cores distintas reforça ainda mais a articulação com o método intuitivo. Nesse processo, estar em um objeto que representa a forma geométrica cilindro a superfície redonda de uma cor e a circular de outra despertaria a atenção do aluno, sobretudo pela visão, para esse elemento definidor de tal forma.

Ao analisarmos os procedimentos para o ensino do prisma, cone e da pirâmide, tratados na sequência do cilindro, percebemos que as ideias do método intuitivo continuam sendo determinantes para o processo de apresentação desses objetos de ensino. O uso de formas concretas que os representem e a importância dada à observação permanecem como elementos integrantes dessa fase do processo de ensino. Em particular no caso do cone, o uso de cores diferentes para a superfície redonda e a circular, indicando suas diferentes naturezas, confirmam tal constatação.

Nossa análise do processo de ensino das formas superficiais, o qual dá prosseguimento ao ensino de geometria, nos leva a apontar, como elemento articulador do método intuitivo à *geometria a ensinar*, a utilização da geometria que já deveria ser conhecida pelo aluno para aproximá-lo da geometria que se desejava que ele conhecesse. Esse elemento torna-se perceptível, ao se recorrer às formas espaciais para ensinar as planas. Os alunos passariam a reconhecer a forma do quadrado, por exemplo, observando-o como uma parte do cubo, e, ao mesmo tempo, conhecendo o quadrado, novos horizontes se abririam para o entendimento gradual da ideia de cubo, tendo em vista que este poderia ser compreendido como uma forma geométrica composta por seis quadrados iguais.

Esse mesmo elemento, seguindo raciocínio análogo, pode ser observado na utilização do paralelepípedo como objeto geométrico que o aluno já conhece, como ponto de partida para que ao aluno seja ensinado o retângulo, e que este seja destacado como elemento constituinte daquele, viabilizando-lhe a ideia, ainda incipiente, das propriedades que definem o paralelepípedo.

Constatamos que, de modo análogo, se segue com o ensino do triângulo, partindo da pirâmide, e do círculo, tendo em vista o cilindro ou o cone. Nesses processos, sempre recorrendo ao concreto e exigindo o despertar dos sentidos dos alunos para que se construam percepções acerca dessas formas planas e se inicie a formulação ideal de pirâmide, cilindro e cone, tendo em mente as formas planas que as constituem e como se dão essas formações.

Podemos verificar que ideias do método intuitivo também seguem presentes no ensino das linhas, que são apresentadas a partir de objetos concretos e de superfícies que já são conhecidas pelos alunos. As noções de linhas adquiridas pelo exercício dos sentidos colaboram para que as ideias abstratas de formas sólidas e planas sejam construídas, à medida que se faz o movimento de destacar as formas planas como composição de linhas e as sólidas como composição de planas, sendo possível, por exemplo, caracterizar um cubo a partir de suas propriedades: os quadrados sendo vistos como faces e as linhas como arestas. E dado o estudo do ponto, do mesmo modo a partir da mobilização dos sentidos em torno do concreto que o representa, este passa a ser visto como vértice, mais um elemento definidor do cubo, possibilitando a passagem da percepção para a ideia de cubo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Buscamos, ao longo deste texto, evidenciar os resultados de nossas análises acerca do modo como as ideias do método intuitivo encontravam-se integradas às matemáticas da formação, particularmente, na articulação entre as *matemáticas a ensinar* e as *matemáticas para ensinar*, particularmente, da aritmética e da geometria.

Observamos que, na sistematização de uma *aritmética para ensinar*, os elementos apresentados são indicativos de como o método intuitivo integrava novos saberes na formação. As caracterizações indicaram que a introdução ou a explicação do ensino de números e operações, representados pela multiplicação (nos manuais de Aritmética) e pelo cálculo (nos manuais de Pedagogia) iniciava-se pelo concreto. Na aritmética analisada, de René Barreto (1912), o autor orientava o ensino pela conversação, por meio de perguntas e respostas, e que seria fundamental a mediação do professor entre criança e objeto. A conversação começava observando a quantidade de objetos, depois se passaria ao desenho desses objetos e

representações de figuras geométricas em cartões, somente então para a escrita do número, do símbolo numérico, abstração do número; do concreto para o abstrato; da oralidade para a escrita.

No caso dos manuais de Pedagogia, era proposto, na introdução ao ensino do cálculo, o uso do contador mecânico. O ensino se dava do concreto ao abstrato. Um concreto com o uso do material didático (a criança poderia tocar), depois a criança apenas visualizaria o material e participaria de forma oral, respondendo às perguntas do professor. Somente depois de compreender essa etapa, se passaria ao cálculo escrito. Portanto, inicialmente seria ensinado um cálculo sentido, depois um cálculo visual e, por fim, um cálculo escrito.

A graduação dar-se-ia do concreto para o abstrato e do todo para as partes, a partir do objeto viria a vontade se de conhecer mais sobre as partes. Assim, se partiria do objeto ao número, priorizando uma aritmética dos rudimentos, que fosse útil e utilitária, que resolvesse problemas da vida prática. Tal aritmética deveria estar estruturada (sequenciação), o ensino de números e dos fatos fundamentais (operações) deveria se dar do fácil para o difícil, de forma progressiva e gradual, aumentando os níveis de dificuldade. Conforme o ensino de números fosse avançando, as quantidades iam sendo ensinadas utilizando bastante os princípios da composição e da decomposição dos números. Assim, se ensinava o 4, como quantidade que pode ser composta e decomposta, como $1 + 3$, como $2 + 2$, ou como a metade de 8.

O ensino da aritmética partiria do conhecido para o desconhecido, ou seja, para iniciar o ensino de números, o aluno deveria mobilizar conhecimentos prévios, elementos que já conhecesse, como as partes de seu corpo, os alimentos, os objetos conhecidos. A criança deveria ter noções de quantidades mínimas para então aprender os números. Assim, partiria do que conhecia e, sequencialmente, de forma progressiva e gradual, ia aprendendo o que não conhecia.

Em se tratando das articulações do método intuitivo com a *geometria a ensinar* na constituição de uma *geometria para ensinar*, percebeu-se que esta se faz presente em todo o processo, sendo identificada nos elementos elencados como saberes *para* ensinar geometria integrante desta constituição. Os materiais de ensino representantes dos objetos geométricos que se pretendia que os alunos aprendessem eram constantemente mobilizados, valendo-se deles, sobretudo, na apresentação de cada novo objeto.

Caminhava-se em uma marcha que seguia do que os alunos conheciam para o que para eles era desconhecido, saindo do concreto para o abstrato, o qual se baseava em generalizações apoiadas primeiro na comparação estimulada pelo uso dos sentidos. De modo específico, por exemplo, eram utilizados objetos concretos em forma de cubo para apresentar esse objeto geométrico de ensino ao aluno, o qual seria explorado por ele sob diferentes pontos de vista. O

cubo, sendo uma forma já conhecida pelo aluno, seria utilizado como ponto de partida para o ensino do quadrado, cujo conhecimento já possibilitaria que, realizando uma retomada ao cubo, a este fosse atribuída alguma propriedade, que seriam ampliadas conforme o estudo das linhas e do ponto, também a partir do concreto e do conhecido, passando a serem vistos, respectivamente, como faces, vértices e arestas.

Percebemos, então, que a *aritmética para ensinar intuitiva* e a *geometria intuitiva para ensinar* eram saberes próprios do professor, presentes em sua formação em tempos de método intuitivo. Essas *matemáticas para ensinar* põem em articulação ideias do método intuitivo e as *matemáticas a ensinar*, conforme discutimos ao longo do texto. Sobretudo a ênfase dada a valorização dos sentidos para a construção da percepção acerca dos objetos matemáticos de ensino a partir da observação/manipulação de objetos concretos destes representantes, seguindo um caminho que parte deste concreto para a construção gradual da ideia abstrata, da oralidade para escrita, do todo para as partes são elementos do método intuitivo que aparecem nessas articulações que constituem essas *matemáticas para ensinar*, configurando novos saberes, matemáticas da formação.

REFERÊNCIAS

- Affreixo, J. M. da G., & Freire, H. (1890). *Elementos de Pedagogia: para uso do magistério primário português* (8. ed.). Livraria Ferreira.
- Araújo, J. J. (1886). *Compêndio de Pedagogia Prática*.
- Barreto, R. (1912). *Série Graduada de Mathematica Elementar* (v 1). Escolas Profissionais Salesianas.
- Bertini, L. F., Moraes, R. dos S., & Valente, W. R. (2017). *A matemática a ensinar e a matemática para ensinar: novos estudos para a formação de professores*. Editora Livraria da Física.
- Braun, T. (1872). *Cours théorique et pratique de pédagogie et de méthodologie* (Vol. 2). H. Dessain, Imprimeur-Libraire.
- Carré, I., & Liquier, R. (1920). *Traité de Pedagogie Scolaire* (15. ed.). Librairie Armand Colin.
- Coelho, J. A. (1892). *Princípios de pedagogia* (Tomo II). STEixeira & Irmão Editores.
- Coelho, J. A. (s.d.). *Manual Prático de Pedagogia*. Livraria e Editora José Figueirinhas Júnior.
- Coelho, J. A. (1907). *Noções de pedagogia elementar*. Livraria Moderna.

- Daligault, J-B. (1874). *Curso Practico de Pedagogia: destinado aos alunos mestres das eschololas normais primarias e aos instituidores em exercicio*. A. A. da Cruz Coutinho.
- Fortaleza, F. J. dos S. (2021). *Uma geometria para ensinar: elementos do saber profissional do professor que ensina matemática (1870-1920)* [Tese de Doutorado em Educação Matemática]. Universidade Federal do Pará. <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/224446>
- Hofstetter, R., & Schneuwly, B. (2017). Saberes: um tema central para as profissões do ensino e da formação. In R. Hofstetter, & W. R. Valente (Eds.), *Saberes em (trans)formação: tema central da formação de professores* (pp. 113 - 172). Editora Livraria da Física.
- Lições de pedagogia: colleccionadas por um amigo da instrução. (1907). Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves.
- Maciel, V. B. (2019). *Elementos do saber profissional do professor que ensina matemática: uma aritmética para ensinar nos manuais pedagógicos (1880 – 1920)* [Tese de Doutorado em Ciências]. Universidade Federal de São Paulo. <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/199390>.
- Morais, R. dos S., Bertini, L. F., & Valente, W. R. (2021). *A matemática do ensino de frações: do século XIX à BNCC*. Livraria da Física.
- Oliveira, M. A. de. (2017). *A aritmética escolar e o método intuitivo: um novo saber para o curso primário (1870 – 1920)*. [Tese de Doutorado em Ciências]. Universidade Federal de São Paulo. <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/178956>
- Pontes, A. M. S. (1881). *Compendio de Pedagogia: para uso dos alumnos da escola normal da provincia do Rio de Janeiro*. Typ. da Reforma.
- Valdemarin, V. T. (2001). Ensino da leitura no método intuitivo: as palavras como unidade de compreensão do sentido. *Educar*, 18, 157-182. <http://www.scielo.br/pdf/er/n18/n18a10.pdf>
- Valdemarin, V. T. (2004). *Estudando as lições de coisas*. Autores Associados.
- Valdemarin, V. T. (2006). Os sentidos e a experiência: professores, alunos e métodos de ensino. In D. Saviani, *O Legado educacional do século XX no Brasil* (pp. 164-203, 2. ed.). Autores Associados.
- Valente, W. R. (2016). A matemática nos primeiros anos escolares: elementos ou rudimentos? *Revista História da Educação*, 20(49), 33-47. <https://www.redalyc.org/journal/3216/321645344002/html/>
- Valente, W. R. (2020). Investigación sobre la historia del saber profesional de los docentes que enseñan matemáticas: interrogatorios metodológicos. *Revista Paradigma*, XLI, 900-911. <http://revistaparadigma.online/ojs/index.php/paradigma/article/view/827/817>.