Revista de História da Educação Matemática
HISTEMAT

**ISSN**: 2447-6447

**Submetido**: 25/05/2023
**Aprovado**: 20/07/2023

# PORCENTAGENS NA RETA NUMÉRICA? COMO ASSIM? UMA ANÁLISE DOS ERROS DE ALUNOS DO OITAVO ANO

## PERCENTAGES ON THE NUMBER LINE? LIKE THIS? AN ANALYSIS OF THE ERRORS OF EIGHTH GRADE STUDENTS

**Rodrigo Vitorassi**[1]
ORCID iD: https://orcid.org/0009-0008-9348-9728

**Barbara Winiarski Diesel Novaes**[2]
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-7763-7777

**Vanessa Largo Andrade**[3]
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-9286-2377

## RESUMO

O presente trabalho objetiva caracterizar erros cometidos por alunos do oitavo ano na resolução de uma questão que envolvia localização de números racionais com diferentes representações (frações, decimais e porcentagens) na reta numérica. Para tanto foi analisada uma questão aplicada a 42 alunos de dois oitavos anos, de um Colégio Estadual localizado no Oeste do Paraná, tendo como referenciais teórico e metodológico a Análise de erro e Análise de Conteúdo. Foram construídas as seguintes categorias para os erros: por incompletude na resolução; no reconhecimento das representações de porcentagens e na localização na reta numérica; por distração; e, pela inexistência da articulação entre as representações do número racional. O estudo conclui que, dos 30 alunos que resolveram a questão, 67% deles a responderam incorretamente por utilizarem localizações aleatórias na reta numérica, 25% acertaram a resolução parcialmente por demonstrarem compreender a fração como quociente, e 8% dos alunos responderam corretamente, porém com erros pontuais considerados como “distração”. Deste modo, destacamos a relevância e a nossa intenção de propormos um material didático para professores de Matemática do Ensino Fundamental, dos sextos aos nonos anos, com atividades que possam auxiliar a promover a articulação dos conceitos das diferentes representações dos números racionais, consideradas como fundamentais para os alunos, tanto para a vida escolar como cotidiana.

**Palavras-chave:** Educação Matemática; Análise de Erro. Reta Numérica; Números Racionais.

[1] Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE). Docente da Secretaria do Estado e Educação (SEED), Santa Terezinha de Itaipu, PR, Brasil. Endereço para correspondência Rua Floriano Peixoto, 802, Jardim Ascari, Santa Terezinha de Itaipu, Paraná, CEP: 85875-000. *E-mail*: rvmatematica@gmail.com.

[2] Doutora em Educação pela Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUCPR). Docente da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Toledo, Paraná, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Cristo Rei, 19, UTFPR, Vila Becker, Toledo, Paraná, Brasil, CEP: 85902-490. *E-mail*: barbaraw@utfpr.edu.br.

[3] Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Docente da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Toledo, PR, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Cristo Rei, 19, UTFPR, Vila Becker, Toledo, Paraná, Brasil, CEP: 85902-490. *E-mail*: vanessalargo@utfpr.edu.br.

## ABSTRACT

The present work aims to characterize errors committed by eighth grade students in solving a question that involved locating rational numbers with different representations (fractions, decimals and percentages) on the number line. For that, a question applied to 42 students of two eighth years of a State College located in the West of Paraná was analyzed, having as a theoretical and methodological reference the Error Analysis and Content Analysis. The following categories for errors were constructed: due to incomplete resolution; in the recognition of representations of percentages and in the location on the number line; by distraction; and by the lack of articulation between the representations of the rational number. The study concludes that, of the 30 students who solved the question, 67% of them answered it incorrectly because they used random locations on the number line, 25% got the solution right partially because they demonstrated that they understood the fraction as a quotient, and 8% of the students answered correctly, however with punctual errors considered as "distraction". In this way, we highlight the relevance and our intention of proposing didactic material for Mathematics teachers of Elementary School, from sixth to ninth years, with activities that can help to promote the articulation of the concepts of different representations of rational numbers, considered as fundamental for students, both for school and everyday life.


**Keywords:** Mathematics Education; Error analysis; Number line. Rational Numbers.

## INTRODUÇÃO

Em artigo recente publicado na folha de São Paulo intitulado “Menos com menos é mais: o papel do erro na matemática”, Edgar Pimentel[4] (2023)[5]argumenta que errar não se limita ao universo estudantil, “Em matemática, e em ciência em geral, errar não só é humano como é parte da rotina”. O autor traz um exemplo envolvendo o matemático Henri Poincaré que, ao participar de uma competição promovida pela revista *Acta Mathematica* para homenagear os 60 anos do rei Oscar II, da Suécia e Noruega, ganhou o primeiro lugar com a monografia “Sobre o problema de três corpos e as equações da dinâmica” (Pimentel, 2023). Nos fins de novembro de 1889, Poincaré enviou um telegrama a Mittag-Leffler (editor da revista) pedindo que interrompesse a impressão da revista, pois havia um erro. No ano seguinte, Poincaré enviou uma versão corrigida, o que configurou questões fundamentais na teoria dos sistemas dinâmicos. A atitude do matemático leva a uma questão moral: ao corrigir o erro, aprendemos todos.

Na perspectiva da História da educação matemática, o erro foi tema explorado por Wagner Rodrigues Valente (2022, p. 226), que se propôs a responder à questão “Como foram construídas e modificadas as representações sobre o erro em matemática?” em que analisa a representação do erro em quatro momentos históricos. No longo período que se estendeu desde a criação de escolas de primeiras letras no Brasil, nas décadas iniciais do século XIX até as suas décadas finais, prevalecia o cálculo exato, no qual o estudante não poderia errar, pois a finalidade da escola era “de preparar o estudante para as lides do adulto, ao cursar apenas quatro anos de ensino primário” (Valente, 2022, p. 238).

“O advento da psicologia experimental de base estatística altera o cotidiano escolar” e a pedagogia científica faz com que o professor paute sua prática a partir de uma base científica com os resultados vindos dos laboratórios de psicologia. Nesse sentido, “O erro do aluno passou a ser visto como fracasso do trabalho do professor” (Valente, 2022, p. 239). Com a chegada do Movimento da Matemática Moderna (MMM) há uma ênfase no ensino de álgebra e “o erro passou a ter outra natureza: tratava-se de levar o aluno à compreensão do encadeamento lógico das proposições e justificativas, progredindo até o aprendizado das estruturas algébricas” (Valente, 2022, p. 239).

[4] Edgard Pimentel é pesquisador do Centro de Matemática da Universidade de Coimbra e professor da PUC-Rio.
[5] Artigo publicado no Blog Ciência Fundamental, em 11 de maio de 2023, e disponível em: https://www1.folha.uol.com.br/blogs/ciencia-fundamental/2023/05/menos-com-menos-e-mais-o-papel-do-erro-na-matematica.shtml?utm_source=whatsapp&utm_medium=social&utm_campaign=compwa. Acessado em 15 de junho de 2023.

A partir das décadas de 1980, as teorias construtivistas estiveram presentes na formação continuada dos professores e têm princípio estruturante "a concepção do erro como hipótese integrante da construção do conhecimento pelo aluno" (Pinto, 2000, p. 10). As diretrizes valorizam a resolução de problemas para tomada de decisões e com o advento das tecnologias, o cálculo renasceu para a pesquisa matemática. Para Valente (2022, p. 239) "o erro passa a ter, desse modo, uma nova representação".

Partindo-se de uma visão histórica, acreditamos que o professor de matemática ao refletir sobre o erro dos alunos e utilizá-lo como metodologia de ensino pode potencializar aprendizagens, por considerar que "os erros são bons indicadores de lacunas e falhas sistemáticas, e por essa razão devem proporcionar uma 'regulamentação' competente" (Pinto, 2000, p. 23).

Desde 2015, um dos autores tem pesquisado sobre as frações no ensino fundamental, tanto numa perspectiva histórica quanto atual, e recentemente sentiu a necessidade de ampliar os estudos para os números racionais. Segundo Onuchic e Avellato (2008, p. 81) "educadores matemáticos concordam que o ensino e a aprendizagem dos conceitos relacionados aos números racionais permanecem um sério obstáculo no desenvolvimento matemático dos alunos". Nesse sentido, estudos sobre os erros relacionados aos números racionais podem auxiliar os professores a torná-los *observáveis* em sua prática e, consequentemente, um *observável* para o aluno (Pinto, 2000).

A compreensão do número racional é entendida como um pré-requisito para o raciocínio proporcional bem-sucedido (Behr et al., 1983), mas pesquisas têm mostrado que a compreensão de frações e o raciocínio proporcional bem-sucedido também podem promover a compreensão de número racional (Howe et al., 2011).

O presente trabalho é um resultado parcial da dissertação de mestrado em andamento no Programa de Pós-graduação em Matemática (PROFMAT), no Polo de Toledo, intitulado "Frações, decimais e porcentagens no ensino fundamental: possibilidade de articulação", que objetiva "Analisar, por meio do processo de resolução das atividades desenvolvidas por alunos dos anos finais do ensino fundamental, se há articulação dos conteúdos frações, decimais e porcentagens e a partir disso propor um material didático para o uso em sala de aula[6]" e que prevê a criação de um produto educacional através da caracterização dos erros dos alunos em relação a este conteúdo.

[6] O problema de pesquisa do mestrado é: o aluno consegue demonstrar que compreendeu os conceitos de número na forma fracionária, decimal e percentual e suas representações?

Para tanto, foi construído uma atividade contendo 5 questões sobre frações, decimais e porcentagens, aplicada no mês de abril, de 2023, em duas turmas de sextos, de sétimos, de oitavos e nonos anos, de uma escola estadual de um município localizado na região Oeste do estado do Paraná.

O presente artigo parte da inquietação dos autores sobre erros cometidos pelos alunos ao articular frações, decimais de porcentagens ou na ausência desta articulação. Em função da limitação de espaço, objetivamos caracterizar erros cometidos por alunos do oitavo ano na resolução de uma questão que envolvia localização de números racionais com diferentes representações (frações, decimais e porcentagens) na reta numérica.

A questão norteadora é: Como os erros cometidos pelos alunos do oitavo ano do ensino fundamental podem demonstrar se há articulação entre as diferentes representações dos números racionais?

A escolha pela análise da questão nas duas turmas do oitavo ano se deu pelo fato de, em 2022, provavelmente terem visto o conteúdo no sétimo ano, ou em anos anteriores. Segundo a BNCC, para o sétimo ano está previsto como uma das habilidades da unidade temática números "(EF07MA10) Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica" (Brasil, 2018, p. 305). Vale observar que, em 2020 e 2021, esses alunos estavam respectivamente nos quintos e sextos anos, e o ensino ocorreu de forma remota em função da pandemia de COVID-19.

Para análise dos dados, utilizamos autores que trabalham com a análise de erros (Cury, 2019; Pinto, 2000) e análise de conteúdo (Bardin, 2004). Após uma análise pré-textual da resposta dos alunos à questão, construímos as seguintes categorias: erro por incompletude na resolução, erro no reconhecimento das representações de porcentagens e na localização na reta numérica, erro por distração; e, erro pela inexistência da articulação entre as representações do número racional.

## 1. SOBRE A COMPREENSÃO DOS NÚMEROS RACIONAIS

Os conceitos que envolvem frações, decimais e porcentagens são fundamentais para o desenvolvimento matemático dos alunos, pois permitem a compreensão de relações numéricas, a resolução de problemas do cotidiano e a interpretação de informações quantitativas. Além disso, eles fornecem uma base sólida para a progressão em conceitos matemáticos mais avançados, como proporções, porcentagens fracionárias, cálculos abrangendo números decimais e estatísticas (Cavaliere, 2005).

Todavia, além de compreender as definições e propriedades desses conceitos, é importante enfatizar a conexão entre eles. Frações, porcentagens e números decimais estão inter-relacionados e podem ser representados de diferentes formas. Por exemplo, uma fração pode ser convertida em um número decimal ou em uma porcentagem, e vice-versa. Essas diferentes representações são ferramentas poderosas que permitem aos alunos visualizar e compreender a relação entre as quantidades e realizar cálculos com maior flexibilidade (Aquino, 2013).

Cyr (2003), ao pesquisar sobre a construção de esquemas para resolver problemas que envolvessem frações, decimais e porcentagens, com alunos canadenses do sexto ano, chega à seguinte conclusão: os alunos que têm um raciocínio multiplicativo demonstraram uma compreensão coerente e evoluída das frações e aos diferentes conceitos que estão associados (parte-todo, operador, razão, medida) em detrimento aos alunos que possuem esquemas baseados num raciocínio aditivo. Esse últimos demonstraram cálculos aleatórios e uma representação pouco coerente.

Resultados semelhantes foram encontrados por Kamii e Clark (1995), em pesquisas sobre frações equivalentes. Os pesquisadores reforçam que as frações equivalentes envolvem dois aspectos relacionados com o pensamento operatório identificados por Piaget: o pensamento multiplicativo e a consideração do todo e das partes. Ao analisarem dificuldades de alunos dos quintos e sextos anos, ao resolverem tarefas que envolvem frações equivalentes, chegaram à conclusão que a maioria das crianças resolve de forma perceptiva (baseada em formas, que são observáveis) em vez de recorrer aos aspectos relacionados ao pensamento operatório (baseado em operação, que não são observáveis) das frações equivalentes.

Em relação ao ensino de porcentagem, Tian e Siegler (2018) relatam a falta de artigos publicados sobre a aprendizagem de porcentagem e que, "juntamente com a importância do tema, faz pesquisas sobre a compreensão das crianças sobre porcentagens essenciais para uma representação abrangente do conhecimento dos números racionais e seu desenvolvimento" (p. 366). E complementam que não encontraram pesquisas "que examinasse a conversão entre porcentagens e outras notações de números racionais em qualquer direção" (p. 367).

Um dos estudos, citados por Tian e Siegler (2018), analisa a compreensão de alunos dos sétimos e oitavos anos dos Estados Unidos, sobre o senso numérico relativo à porcentagem (Gay & Aichele, 1997). Um dos resultados apontados pelo estudo é que "mesmo que os alunos aprendam as relações entre frações, decimais e porcentagens, e estudantes poderiam citar exemplos específicos de frações e decimais que eram equivalentes a porcentagens, eles não pareciam usar as inter-relações entre as representações numéricas com confiança" (Gay & Aichele, 1997, p. 33). Além disso, os alunos demonstraram "algumas relações errôneas em seu conhecimento de porcentagem e frequentemente usavam regras e procedimentos incorretos com confiança" (p. 33) o que pode ser resultado de um currículo que enfatiza regras e procedimentos em vez de conceitos sobre porcentagem.

Na mesma direção, Monteiro e Costa (1996) argumentam que:

> A utilização prematura das regras no estudo de frações e decimais, tem sido detectado como outro fator que atrasa a compreensão dos números racionais, visto que os alunos não reconhecem a ligação entre o seu conhecimento dos números e as respectivas regras na resolução de situações na sala de aula de matemática (Monteiro & Costa, 1996, p.62).

Uma regra prematura pode levar a um "esquecimento" da criança de um ano para outro. Na teoria piagetiana poderia estar "profundamente relacionado a sua não-incorporação de conhecimentos suficientes para organizar suas ações mentais naquela situação" (Pinto, 2000, p. 117).

## 2. SOBRE FRAÇÕES, DECIMAIS E PORCENTAGEM NA RETA NUMÉRICA

A abordagem da reta numérica é uma estratégia eficaz no ensino e aprendizado de frações, porcentagens e números decimais. A reta numérica é uma representação visual que organiza os números em uma linha reta, permitindo a localização e comparação de diferentes valores numéricos. Ao posicionar os números nessa linha, os alunos podem identificar a sua localização relativa e realizar comparações entre eles. Isso ajuda a desenvolver a compreensão de equivalência entre diferentes formas de representação numérica, como frações equivalentes, porcentagens e números decimais (Mandarino & Sant'anna, 2019).

No ensino de frações, a reta numérica pode ser utilizada para demonstrar a relação entre partes de um todo. Os alunos podem posicionar as frações ao longo da reta numérica, identificando sua posição em relação ao inteiro e comparando o tamanho das mesmas. Isso auxilia-os na compreensão dos conceitos de numerador e denominador, bem como na comparação e ordenação de frações (Mandarino & Sant'anna, 2019).

No caso das porcentagens, a reta numérica pode ser usada para representar as diferentes porcentagens de um número inteiro. Os alunos podem localizar pontos específicos na reta numérica para representar 25%, 50%, 75% e, assim por diante. Isso permite que os alunos visualizem as diferentes quantidades representadas por essas porcentagens e estabeleçam relações com frações e números decimais equivalentes.

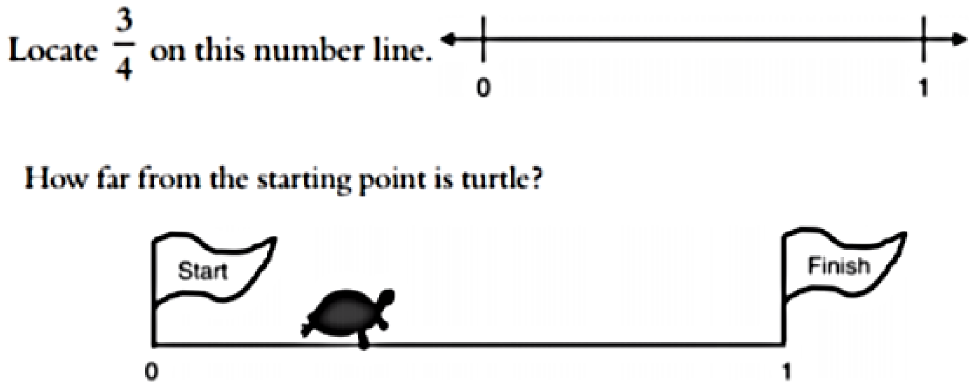
Já no contexto dos números decimais, a reta numérica pode ser usada para representar valores decimais entre dois números inteiros. Os alunos podem posicionar os números decimais ao longo da reta numérica, observando sua proximidade com os números inteiros e comparando seus valores. Isso auxilia-os na compreensão da relação entre frações e números decimais, bem como na interpretação e localização de valores decimais (Mandarino & Sant'anna, 2019).

Onuchic e Avellato (2008) definem diferentes "personalidades" dos números racionais: ponto racional, quociente, fração, razão e operador. Para as autoras, "todo número racional a/b ocupa um ponto bem definido na reta e, reciprocamente, a todo ponto racional da reta corresponde um número racional" (p. 87).

Lamon (2020) chama atenção em relação à representação das frações na reta numérica, salientando que falamos desses números como se fossem pontos da reta, mas na realidade não são pontos, são medidas de distância, isto é, a distância que um determinado ponto da reta está de zero, considerando números racionais positivos. Quando um intervalo, nesse caso uma reta numérica, possui comprimento igual a "l" e esse comprimento é subdividido em "b" subintervalos iguais, cada um destes subintervalos terá medida igual a "1/b". A partir disso, a reta numérica sempre pode ser dividida sucessivamente em quantas subunidades forem necessárias, e com isso, o número de partes iguais na reta pode variar.

A autora chama a atenção para duas formas de exercícios (Figura 1), em que, mesmo sendo ambas as atividades de medição na reta numérica, possuem distinção na forma como os alunos vão desenvolver a solução. No primeiro, eles são convidados a localizar a fração 3/4 na reta, percebe-se uma semelhança muito grande com exercícios que trabalham com a interpretação da fração como parte-todo, pois os alunos são levados a dividir o intervalo dado em quatro partes iguais e demarcar o fim do terceiro intervalo, representando assim três partes do todo, o mesmo que realizam para representar a forma gráfica da fração por meio de uma pizza, por exemplo, dividindo-a em quatro partes e pintando três delas. Já no segundo exercício, os estudantes são induzidos a dividir a reta por sucessivas subdivisões até o momento que consigam, por meio da construção de suas marcas, demarcar a posição em que a tartaruga está disposta (Lamon, 2020).

**Figura** 1. Representação de frações na reta numérica




**Fonte**: Lamon (2020, p. 221-222)

A palavra “reta numérica” aparece 20 vezes na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), em que se espera que o aluno saiba “reconhecer, comparar e ordenar números reais, com apoio da relação desses números com pontos na reta numérica” (Brasil, 2018, p. 269). A menção à reta numérica ocorre desde o primeiro ano e na unidade de números há objetos de conhecimento relacionados à “Leitura, escrita e comparação de números naturais (até 100) e reta numérica” (p. 278).

No terceiro ano, a orientação é a construção de fatos de adição, subtração e multiplicação de números naturais e suporte à reta numérica. A primeira vez que ocorre o termo frações associado à reta numérica é no quarto ano. A prescrição é “EF04MA09 - Reconhecer as frações unitárias mais usuais (1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/10 e 1/100) como unidades de medida menores do que uma unidade, utilizando a reta numérica como recurso” (p. 291). Para o quinto ano temos previsto o ensino dos “Números racionais expressos na forma decimal e sua representação na reta numérica” (p. 294) e o “Cálculo de porcentagens e representação fracionária” (p. 294).

Para o sexto ano, destacamos as habilidades de “EF05MA06 – Associar as representações 10%, 25%, 50%, 75% e 100% respectivamente à décima parte, quarta parte, metade, três quartos e um inteiro, para calcular porcentagens, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros” (p. 295) e “EF06MA08 – Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica” (p. 301).

No sétimo ano, “EF07MA10 – Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica” (p. 305). No oitavo ano não aparece nenhuma indicação em relação à reta numérica; e, no nono ano, a reta numérica está associada à representação dos números irracionais.

Na BNCC, ou ocorre a articulação entre as representações fracionárias e decimais ou das frações com a porcentagem e nunca entre os três. Concordamos com Trindade e Búrigo (2021) quando afirmam que “a BNCC compreende que os diferentes significados de número racional, bem como a noção de número racional, devem ser alcançados até o sétimo ano, visto ser este o último ano em que o documento estabelece maiores especificações em relação a essas aprendizagens” (p. 13).

Schrenk (2021) faz um mapeamento de produções didáticas pedagógicas dos professores da rede estadual de ensino, do estado do Paraná, resultantes da participação do Programa de Desenvolvimento Educacional (PDE) no que tange ao ensino de frações como medida, utilizando a reta numérica. Foram localizadas 106 produções didáticas pedagógicas, o que demonstra que os professores têm conhecimento desta representação, mas que o número não é muito expressivo perto de mais de 20 mil produções.

Behr et al. (1983) realizaram uma pesquisa com 77 alunos da quarta série, dos Estados Unidos, no que concerne à interpretação das frações ¾, ⅔ e 5/3 na reta numérica, na forma discreta, em círculos e retângulos. Concluíram que há um número desproporcional de erros em problemas de reta numérica para as três frações propostas. Pontuam que isso provavelmente se deve ao fato de que a maioria das experiências dos alunos foram com a interpretação parte-todo da fração em um contexto contínuo (área). Isso sugere que a interpretação da reta numérica é especialmente difícil para as crianças. Os estudos mostraram uma noção imprecisa e inflexível de frações na reta numérica mesmo no nono ano.

Vaz (2013), ao investigar o desempenho de alunos de duas turmas do sétimo ano do ensino fundamental, no município de Itaboraí – RJ, utilizando metodologia de pesquisa baseada na análise das soluções (erros e acertos) em tarefas sobre frações inspirado nos trabalhos de Cury (2019), também constatou alto teor de dificuldade em uma questão relacionada à reta numérica. A questão era “Entre quais números representados na reta numérica abaixo podemos colocar a fração ⅖”. Os estudantes tinham que posicionar essa fração em uma reta, iniciando em zero e com cinco marcações com números de 1 a 5. O percentual de acertos no Pré-teste foi de 0% e, no Pós-teste, de 17,19%, sendo que a maioria dos alunos posicionou o ⅖ entre os números 2 e 5.

Um aspecto conflitivo é quando ocorrem intervenções não construtivas por parte dos professores. Pinto (2000) exemplifica que as crianças aprendem que zero é nada num momento em que ainda não têm um conceito bem formado de valor posicional dos algarismos. As crianças “‘inventam’ regras para completar as tarefas, regras essas que acabam incorporando a seus esquemas” (Pinto, 2000, p. 117) que se transformam em erros sistemáticos, expressando conhecimentos malformados. Talvez possa ser o que tenha acontecido, quando as crianças posicionaram ⅖ entre 2 e 5, interpretando que poderia ser um número inteiro entre 2 e 5.

Segundo Vaz (2013, p. 64, grifo nosso):

> As observações realizadas em sala indicaram, em consonância com o referencial teórico desta pesquisa, que **a maioria dos alunos teve o primeiro contato com a reta numérica durante essa sequência didática**. Ou seja, eles cursaram todo o primeiro segmento do ensino fundamental e o sexto ano sem terem trabalhado com a reta numérica. Outro fator apontado nas referências deste trabalho e observado nesta pesquisa foi a dificuldade de aprendizagem da reta numérica, alunos demonstraram em alguns momentos certo desconforto em trabalhar com tal conceito

Howe et al. (2011) chegaram em resultados semelhantes e pontuam que talvez o significado de frações na reta numérica (medida) não tenha sido abordado com os alunos no estudo que realizaram. Os alunos acabam utilizando conhecimentos errôneos ou incompletos como, por exemplo, ⅗ e 5/4 para 3,5 e 5,4 criando suas próprias regras.

Vaz (2013) sugere que diante da dificuldade do tema "este assunto pode, e deve, ser abordado de forma constante e permanente nas séries posteriores, por exemplo, durante a introdução dos números inteiros".

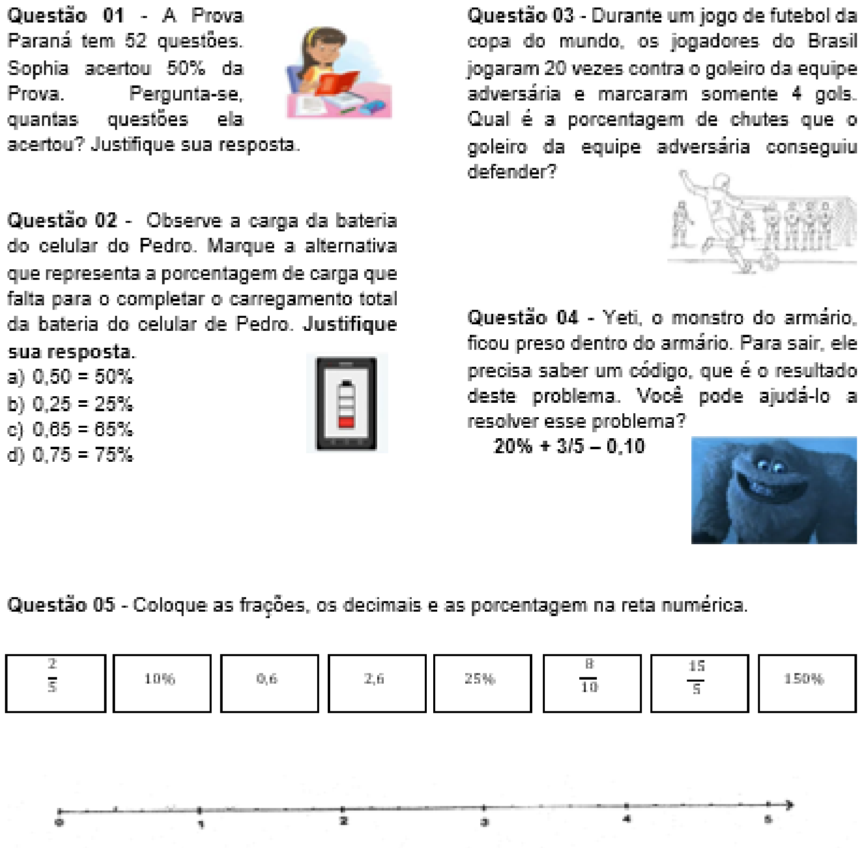
## 3. ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

Para investigarmos como os alunos demonstram compreender e articular as representações dos números fracionários, decimais e percentuais, organizamos atividades que pudessem nos dar indícios dessa articulação.

De início, definimos que seriam um total de seis a sete questões, apresentadas por meio de questões abertas e de múltipla escolha. Cada questão precisaria, em ordem crescente de dificuldade, abordar as diferentes representações do número racional.

Ao final, optamos por apresentar cinco questões aos alunos (figura 2), pois julgamos ser um número adequado para ser resolvido em uma hora-aula, considerando que seria aplicada com alunos dos sextos aos nonos anos. Caso algum aluno terminasse antes do tempo, seriam entregues duas questões extras, entretanto isso não foi necessário.

**Figura 2**. Atividades sobre frações, decimais e porcentagem propostas aos alunos



**Questão 01** - A Prova Paraná tem 52 questões. Sophia acertou 50% da Prova. Pergunta-se, quantas questões ela acertou? Justifique sua resposta.

**Questão 02** - Observe a carga da bateria do celular do Pedro. Marque a alternativa que representa a porcentagem de carga que falta para o completar o carregamento total da bateria do celular de Pedro. **Justifique sua resposta**.

a) 0,50 = 50%

b) 0,25 = 25%

c) 0,65 = 65%

d) 0,75 = 75%

**Questão 03** - Durante um jogo de futebol da copa do mundo, os jogadores do Brasil jogaram 20 vezes contra o goleiro da equipe adversária e marcaram somente 4 gols. Qual é a porcentagem de chutes que o goleiro da equipe adversária conseguiu defender?

**Questão 04** - Yeti, o monstro do armário, ficou preso dentro do armário. Para sair, ele precisa saber um código, que é o resultado deste problema. Você pode ajudá-lo a resolver esse problema?

**20% + 3/5 – 0,10**

**Questão 05** - Coloque as frações, os decimais e as porcentagem na reta numérica.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{2}{5}$ | 10% | 0,6 | 2,6 | 25% | $\frac{8}{10}$ | $\frac{15}{5}$ | 150% |



**Fonte:** Dos autores (2023)

De acordo com a BNCC (2017), alguns dos objetivos das questões propostas para além das apresentadas anteriormente sobre a reta numérica são:

> [...] (EF06MA08) reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica. [...] (EF06MA11) Resolver e elaborar problemas com números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e a potenciação, por meio de estratégias diversas, utilizando estimativas e arredondamentos para verificar a razoabilidade de respostas, com e sem uso de calculadora. [...] (EF06MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da “regra de três”, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros (Brasil, 2018, p. 301).

A primeira questão foi autoral e a segunda questão é recorrente em vários *sites* de matemática disponíveis na Internet. Já as três últimas questões foram inspiradas no trabalho de Cyr (2003), que se propôs a estudar esquemas de conhecimento para aprender frações entre 22 alunos do sexto ano do ensino fundamental, no Canadá. A nossa intenção foi propormos cinco questões, partindo-se do pressuposto que, ao resolver as quatro anteriores, os ajudaria a resolver a quinta questão.

As atividades foram desenvolvidas por um total de 199 alunos de uma escola estadual – oito turmas, duas turmas do sexto (55 alunos), duas do sétimo (53 alunos), duas do oitavo (42 alunos) e duas do nono ano (49 alunos) do Ensino Fundamental. Todas as folhas foram impressas coloridas e entregues aos alunos. O tempo médio para a realização das atividades foi de cinquenta minutos e sem o auxílio do professor. Cada folha de atividade, depois de recolhida, foi escaneada e arquivada para posteriores análises.

Por questão de organização dos dados, uma primeira codificação foi realizada, sendo A18A – aluno um, oitavo ano, turma A. As atividades foram desenvolvidas também em turmas de uma escola particular, porém, o nosso foco será na atividade desenvolvida por alunos da escola pública.

Neste artigo, trazemos para discussão apenas as atividades desenvolvidas pelas duas turmas de oitavos anos. As demais análises e discussões estão sendo tecidas para comporem a dissertação de mestrado do primeiro autor. E ainda, por questões de espaço e tempo, selecionamos a questão cinco para apresentar as análises, questão esta que envolve a reta numérica, frações, decimais e porcentagens, conteúdo previsto a partir do quinto ano do Ensino Fundamental.

Para a verificação das respostas dos alunos, nosso enfoque será nos erros. Deste modo, a metodologia de análise de dados por nós utilizada será a Metodologia da Análise de Erros, proposta por Cury (2019).

Ao reconhecer e valorizar o erro como um componente natural da aprendizagem matemática, os educadores podem criar um ambiente seguro e encorajador, onde os alunos se sentem à vontade para explorar, cometer erros e refletir sobre suas estratégias.

> Na análise de erros, busca-se compreender as razões pelas quais os alunos cometem erros matemáticos e, a partir dessa compreensão, desenvolver estratégias de ensino que possam auxiliá-los na superação dessas dificuldades. A análise dos erros dos alunos nos oferece insights valiosos sobre as concepções e os processos cognitivos envolvidos na resolução de problemas matemáticos, permitindo-nos direcionar nossa prática docente de maneira mais efetiva e proporcionar uma aprendizagem mais significativa para os estudantes (Cury, 2019).

Para organização dos erros, a Análise de Conteúdo de Bardin (2004) se fez necessária, no momento que foram realizadas as leituras flutuantes dos nossos dados, e optamos por apresentar os erros referentes à questão cinco neste artigo.

Destacamos que, nos oitavos anos, 42 alunos fizeram a atividade, trinta resolveram a questão cinco, e doze a deixaram em branco. Dois responderam corretamente; oito, parcialmente correto; e vinte, totalmente incorreto. No quadro 1 apresentamos uma primeira categorização dos erros dos alunos.

**Quadro 1 –** Categorização dos erros dos alunos dos oitavos anos

| Codificação | Categorização do Erro |
|---|---|
| A28A, A128A, A148A, A198A, A138B | **Por incompletude na resolução** |
| A178A, A218A, A108B | **No reconhecimento das representações de porcentagens e na localização na reta numérica** |
| A58B, A208B | **Por distração** |
| A18A, A58A, A108A, A118A, A138A, A158A, A168A, A208A, A18B, A28B, A38B, A48B, A68B, A78B, A88B, A128B, A148B, A168B, A178B, A198B | **Pela inexistência da articulação entre as representações do número racional** |

**Fonte**: Dos autores (2023)

E para finalizar, definimos os recortes dos processos de resolução a serem apresentados em cada categoria para as análises.

## 4. AS CATEGORIAS COM OS RESULTADOS DAS ANÁLISES

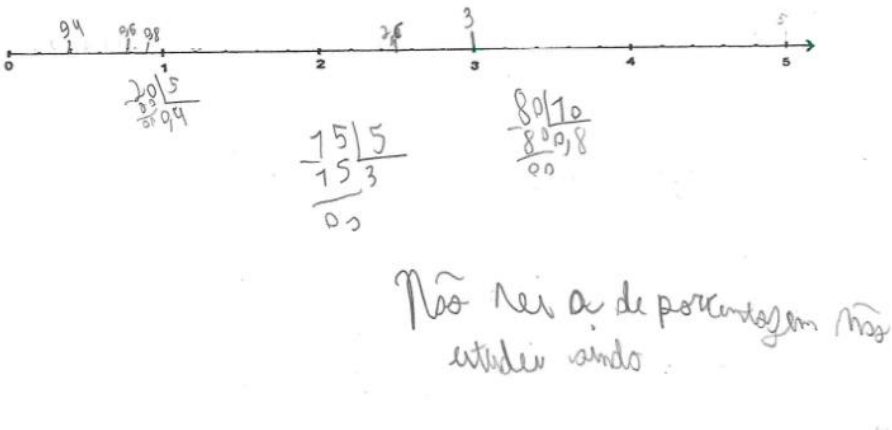
Ao apresentar a tarefa de localizar frações, decimais e porcentagens em uma reta numérica, os alunos foram desafiados a relacionar diferentes representações desses conceitos matemáticos e posicionar corretamente cada valor na reta. Essa atividade visou desenvolver a compreensão dos alunos sobre a relação entre essas três formas de representação numérica e fortalecer sua habilidade de articular e sintetizar esses conteúdos de maneira clara.

Nas próximas seções trazemos as categorias com os resultados das análises e algumas imagens para elucidar as estratégias de resolução dos alunos e seus erros.

### 4.1 Erro Por Incompletude Na Resolução

Os alunos A28A, A128A, A148A, A198A, A138B demonstraram no processo de resolução que compreendem fração como quociente, por efetuarem a divisão, e localizaram a representação decimal corretamente na reta numérica, entretanto, observamos que desconhecem a representação do número racional na forma de porcentagem, por ignorarem ou desconsiderarem estas representações. Selecionamos três recortes para exemplificarmos, do A28A, do A128A e do A138B.

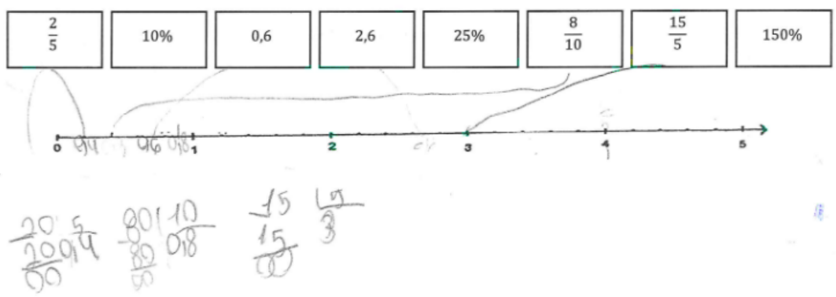
**Figura 3.** Resolução do A28A




**Fonte:** Dos autores (2023)

Observamos na figura 3, que A28A deixa explícito na questão que desconhece o conteúdo relacionado à porcentagem. Porém, encontra-se no oitavo ano, ou seja, parece não ter “memorizado” ou “entendido” o conceito estudado em anos anteriores. Resultado semelhante ao encontrado por Tian e Siegler (2018) e Gay e Aichele, (1997), com estudantes dos Estados Unidos.

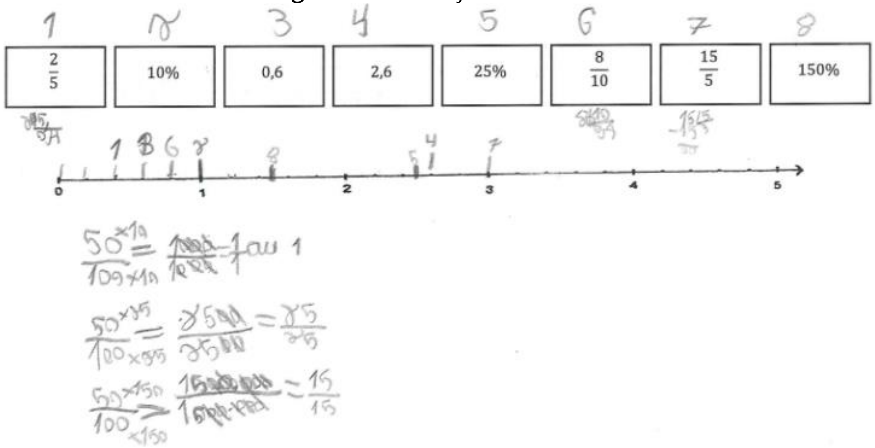
**Figura 4**. Resolução do A128A




**Fonte:** Dos autores (2023)

A128A (figura 4) localizou na reta numérica somente as representações do número racional na forma de decimal e frações, assim como A28A.

**Figura 5**. Resolução do A138B



**Fonte:** Dos autores (2023)

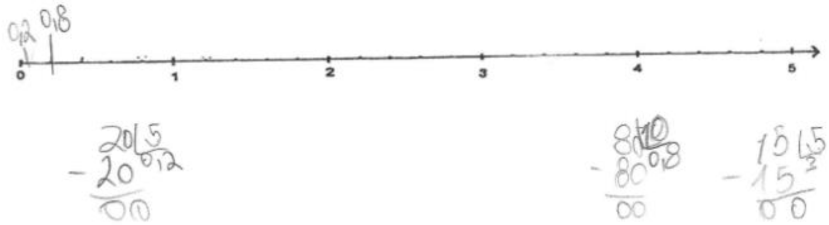
O A138B (figura 5) "arriscou" localizar as porcentagens na reta numérica, associando o número 1 ao 10%; 1,5 ao 150% (correto) e o 2,5 ao 25% (subdividiu o intervalo entre 2 e 3 e marcou exatamente o 2,5). Observamos que essas "localizações" na reta numérica são resultados de algumas operações, com o auxílio de frações equivalentes, porém utilizou a fração $\frac{50}{100}$ para multiplicar por $\frac{10}{10}$ , depois fez o mesmo com $\frac{50}{100}$ e multiplicou por $\frac{25}{25}$ e novamente, $\frac{50}{100}$ multiplicando por $\frac{150}{150}$.

Parece-nos que a memorização do uso de regras para "conversão" da representação para decimais com confiança pode ter levado ao erro, como afirmam Gay e Aichele (1997).

### 4.2 Erro no Reconhecimento das Representações de Porcentagens e na Localização na Reta Numérica

Os alunos A178A, A218A e A108B também demonstraram compreender a fração como quociente, por registrarem o cálculo da divisão e obterem como resultado um número na forma decimal. Ao observarmos o processo de resolução no excerto do A178A (figura 6), não há a resolução completa da questão, porém esse aluno efetuou as divisões dos números fracionários, armou a operação na chave e acreditamos que errou a divisão de 20 por 5 por falta de atenção. Além disso, localizou incorretamente e somente, 0,2 e 0,8 na reta numérica, desconsiderando as demais representações dos números racionais propostos na questão.

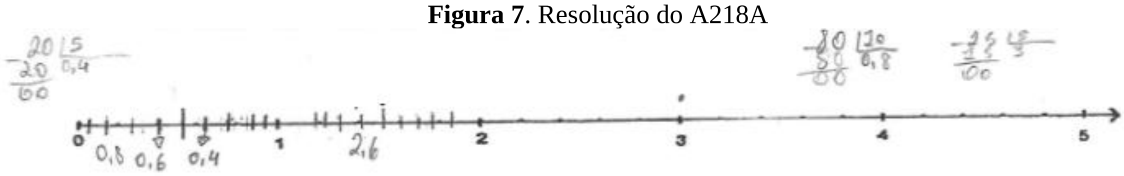
**Figura 6**. Resolução do A178A



**Fonte:** Dos autores (2023)

A218A (figura 7) efetuou as divisões dos números fracionários corretamente, fez algumas subdivisões na reta numérica, porém os localizou incorretamente, como podemos observar no intervalo de 0 a 1, registrando-os 0; 0,8; 0,6; 0,4; 1.

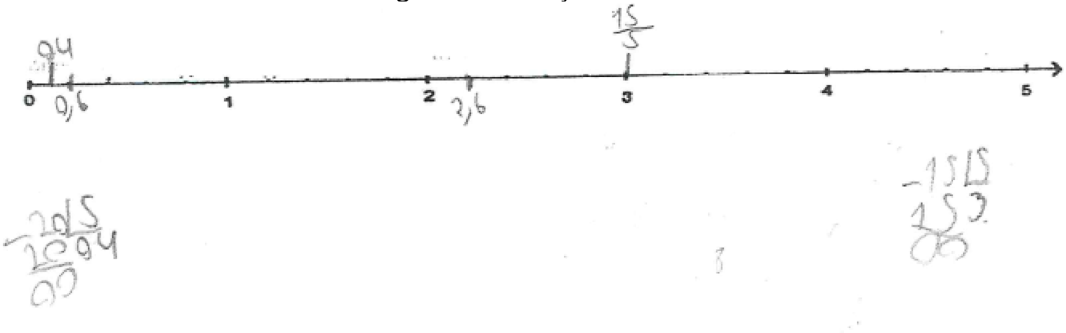
**Figura 7**. Resolução do A218A




**Fonte:** Dos autores (2023)

A108B (figura 8) efetuou as divisões dos números fracionários corretamente, não os localizou de forma correta na reta numérica e ignorou os números representados por porcentagens.

**Figura 8**. Resolução do A108B

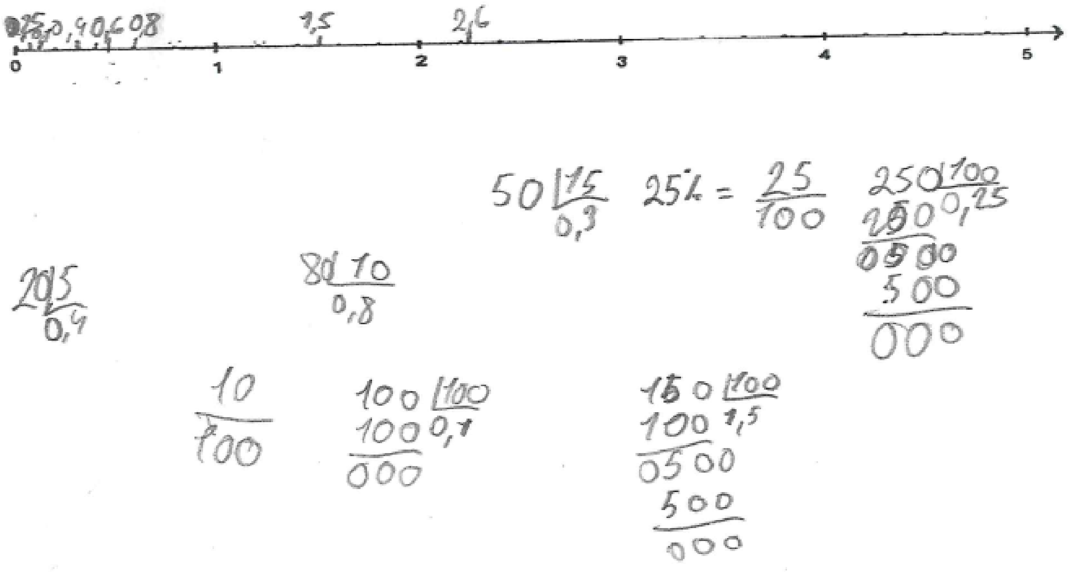



**Fonte:** Dos autores (2023)

### 4.3 Erro por Distração

Os alunos A58B e A208B demonstraram ter compreendido fração como quociente, localizaram corretamente os números na reta numérica e compreenderam porcentagem como fração e como quociente. No excerto da resolução do A58B (figura 9), observamos que realizou o cálculo da divisão de 15 por 5 incorretamente, fazendo na chave 5 dividido por 15, ou seja, inverteu o numerador com o denominador porque entendeu que o numerador não poderia ser maior que o denominador. A58B localizou na reta numérica o número 2,6 incorretamente. Este aluno demonstrou compreender que 25% pode ser representado por $\frac{25}{100}$ e também que pode efetuar a operação relativa a esta divisão, ao registrar a conta armada na chave.

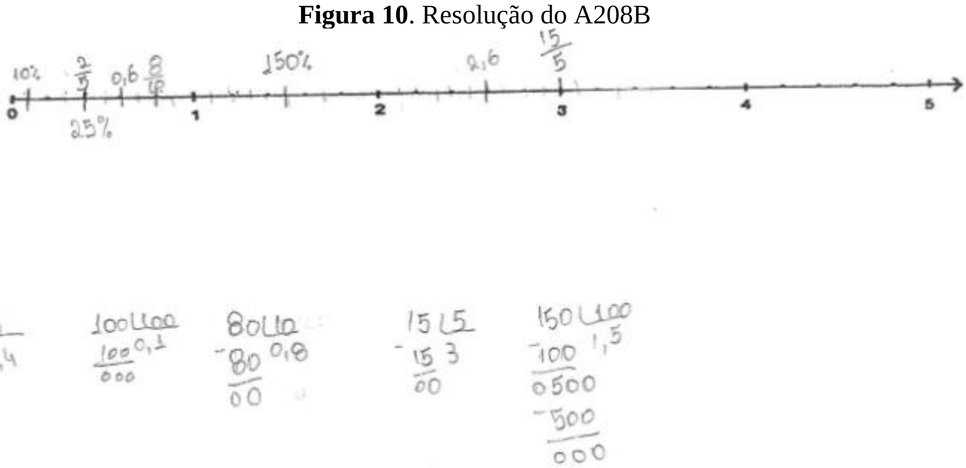
**Figura 9**. Resolução do A58B




**Fonte:** Dos autores (2023)

O aluno A208B (figura 10) localizou o número racional na forma de porcentagem (25%) de maneira incorreta. Acreditamos que esse erro se deu por distração.

**Figura 10**. Resolução do A208B

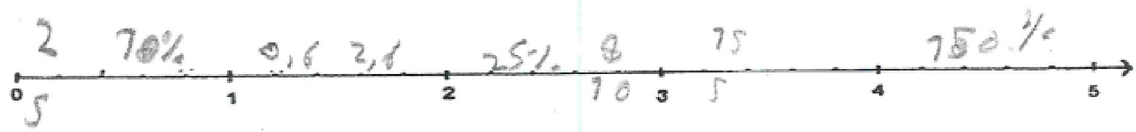



**Fonte:** Dos autores (2023)

## 4.4 Erro pela Inexistência da Articulação entre as Representações do Número Racional

Os alunos A18A, A58A, A108A, A118A, A138A, A158A, A168A, A208A, A18B, A28B, A38B, A48B, A68B, A78B, A88B, A128B, A148B, A168B, A178B e A198B demonstraram desconhecer as diferentes representações do número racional. Destes, erraram totalmente a questão os alunos A18A, A58A, A108A, A118A, A168A, A208A, A38B, A48B, A78B, A128B, A148B, A178B e A198B, por localizarem aleatoriamente os números na reta numérica, ou seja, não compreenderam as representações dos números, bem como sua localização na reta numérica. Apresentaremos alguns excertos de alguns destes alunos, como podemos observar na sequência, a resolução do A18A.

**Figura 11**. Resolução do A18A




**Fonte:** Dos autores (2023)

Podemos constatar na figura 11, que a localização dos números racionais propostos na questão se deu de forma aleatória. O recorte do processo de resolução do A18B, apresentado abaixo, confirma essa mesma aleatoriedade (Cyr, 2003; Kamii e Clark, 1995). Observamos que "marcou" os números na reta numérica no intervalo de 0 a 2,4.

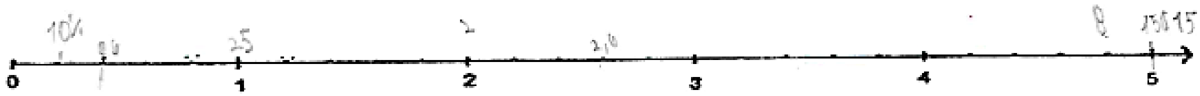
**Figura 12**. Resolução do A18B


**Fonte:** Dos autores (2023)

Como podemos perceber acima, o aluno A18B (figura 12) "agrupou" e localizou as representações dos números em ordem crescente de cada grupo – decimais, fracionários e porcentagens. Subdividiu a reta numérica em intervalos iguais e associou 0 a 0,6; e na sequência, localizou e escreveu o número decimal 2,6. Depois, registrou a representação fracionária dos números $\frac{2}{5}$, $\frac{8}{10}$ e $\frac{15}{5}$, e por último, localizou erroneamente os números 10%, 25% e 150%. Ou seja, com o mesmo "espaço" marcou na sequência 2,6; $\frac{2}{5}$; $\frac{8}{10}$; $\frac{15}{5}$; 10%; 25%; 150%.

Ao observarmos o próximo fragmento, constatamos que A138A (figura 13) localizou corretamente 2,6 na reta numérica, e nos questionamos, será que na sorte?

**Figura 13**. Resolução do A138A

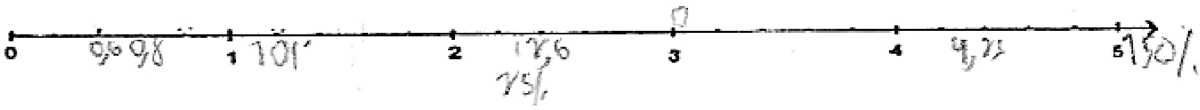



**Fonte:** Dos autores (2023)

Na figura 13, o aluno demonstrou “marcar aleatoriamente” os valores, associou o 5 da reta numérica ao 150 (sem a notação de porcentagem) e ao lado do 150, registrou o número 15.

Na figura 14, A158A efetuou a divisão de 8 por 10 corretamente, mas não apresentou o cálculo. Fez a tentativa de localizar 0,6 e 0,8 entre 0 e 1, porém não registrou todas as subdivisões no intervalo de 0 a 1. Inseriu 150% ao final da reta numérica.

**Figura 14**. Resolução do A158A

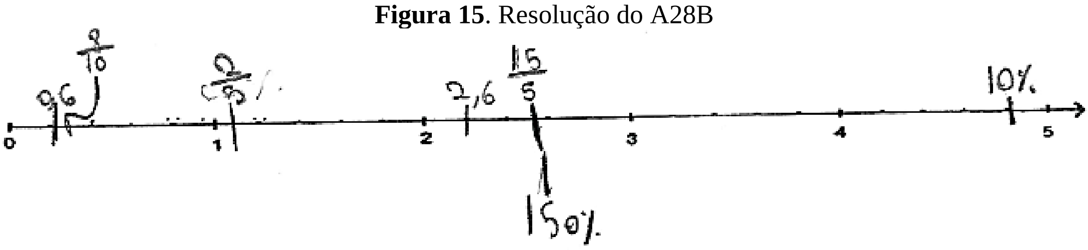



**Fonte:** Dos autores (2023)

No excerto acima, temos um valor entre 4 e 5, que seria um 4,25 e que não está entre os valores dados nesta questão. Entre 2 e 3, temos registrado o número 25% e ao lado, o 2,6. Associado ao algarismo 3, o aluno escreveu o número zero, e ao final da reta, registrou 150%. Uma sequência de erros aleatórios (Cyr, 2003; Kamii e Clark, 1995), em que esses alunos demonstram fragilidade no raciocínio multiplicativo.

Podemos observar a incoerência também no próximo excerto, referente ao aluno A28B (figura 15).

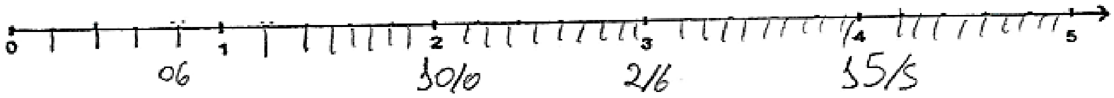
**Figura 15**. Resolução do A28B




**Fonte:** Dos autores (2023)

O A28B (figura 15) localizou aleatoriamente alguns números na reta numérica, associou 15/5 a 150% e marcou o número 10% próximo ao número 5. O aluno A68B (figura 16) registrou alguns números erroneamente na reta numérica, associou 10% a 2, $\frac{2}{6}$ , a 3 e $\frac{15}{5}$ a 4, como apresentado na figura a seguir.

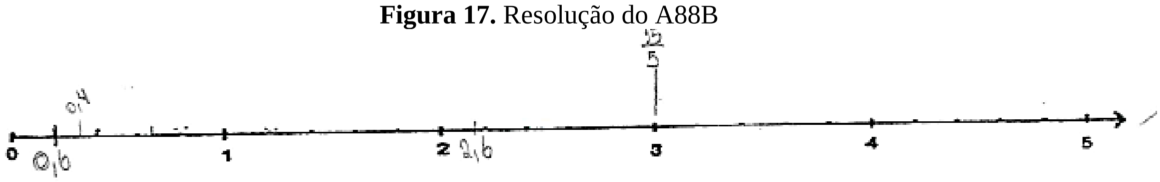
**Figura 16**. Resolução do A68B




**Fonte:** Dos autores (2023)

O excerto do aluno A88B (figura 17) – próxima figura, mostra-nos que localizou aleatoriamente alguns números na reta numérica, marcou 0,6 muito próximo do zero (poderíamos considerar como 0,2), e na sequência, marca 0,4, ou seja, não compreende a ordem, que 0,6 é maior que 0,4.

**Figura 17.** Resolução do A88B




**Fonte:** Dos autores (2023)

É interessante observarmos no fragmento acima, que A88B localizou corretamente $\frac{15}{5}$ na reta numérica e que efetuou a divisão de 2 por 5, resultando em 0,4. No próximo recorte, observamos uma tentativa do aluno A168B (figura 18) em localizar a fração $\frac{2}{5}$ na reta.

**Figura 18** - Resolução do A168B


**Fonte:** Dos autores (2023)

No excerto acima, o aluno registra tentativas de subdivisões na reta numérica e a localização de números que escreveu, porém os apagou. Localizou somente o ⅖ na reta, com insucesso, pois marcou ⅖ entre 2 e 3, e muito próximo do 3.

Podemos observar que os alunos inventaram regras para resolverem a questão, demonstrando erros sistemáticos e expressando conhecimentos malformados, corroborando com as considerações de Pinto (2000).

Na sequência, exporemos algumas considerações finais e possibilidades futuras de pesquisa.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste artigo, discutimos a importância do ensino de frações, decimais e porcentagens no contexto do Ensino Fundamental, bem como da relevância de analisarmos e refletirmos sobre os erros apresentados pelos alunos, por entendermos que esses conteúdos são fundamentais para o dia a dia dos mesmos, tanto na escola como para lidarem com situações cotidianas.

Para buscarmos respostas à questão proposta para esta investigação, "*Como os erros cometidos pelos alunos do oitavo ano do ensino fundamental podem demonstrar se há articulação entre as diferentes representações dos números racionais?"*, analisamos e categorizamos os processos de resolução apresentados pelos alunos em uma questão que os desafiava a posicionarem diferentes representações do número racional na reta numérica. A categoria que obteve o maior número de respostas de alunos (20 de 30) foi referente ao "erro pela inexistência da articulação entre as representações do número racional", na qual constatamos erros aleatórios, demonstrando um raciocínio multiplicativo frágil, uma noção imprecisa e inflexível na conversão das diferentes representações dos números racionais.

Pudemos observar, também, que a abordagem mobilizada pelos alunos foi a divisão do numerador pelo denominador para transformar em um número decimal, e o desconhecimento do conteúdo de porcentagem por alguns alunos, no oitavo ano. Destacamos que apresentaram dificuldades em localizar frações impróprias na reta numérica, uma tendência de usar a reta como parte-todo, e que o uso de frações equivalentes não prevaleceu – entendemos que o conhecimento sobre frações equivalentes facilitaria a flexibilidade da conversão das diferentes representações.

Ressaltamos que apresentar fração, decimal e porcentagem como conceitos diferentes pode ser uma prática comum em sala de aula, porém não parece ser interessante, como observamos nos erros apresentados pelos alunos, que demonstraram não terem habilidades para articularem os números racionais em suas diferentes representações.

Neste sentido, continuaremos os estudos teóricos e as análises das demais questões propostas na coleta de dados da nossa pesquisa, pois pretendemos elaborar, em um futuro próximo, um material didático para professores que ensinam matemática nos anos finais do ensino fundamental, com a proposição de atividades que promovam a conexão, e ou, articulação entre as representações dos números racionais, de modo a incentivar nos alunos o raciocínio multiplicativo e de estimular os professores – atuando como mediadores do processo de ensino e de aprendizagem, que explorem na reta numérica, a articulação desses conceitos.


## AGRADECIMENTOS

Gostaríamos de expressar nossos sinceros agradecimentos ao Colégio Estadual em que foi desenvolvida essa pesquisa, por seu apoio inestimável na realização deste trabalho. Sua calorosa recepção e permissão para conduzir a pesquisa nas turmas do Ensino Fundamental II foram fundamentais para a coleta e análise dos dados, contribuindo significativamente para a formulação deste artigo. Somos profundamente gratos pela oportunidade de realizar esse estudo em um ambiente tão acolhedor e dedicado à educação.


## REFERÊNCIAS


Aquino, J. P. G. de. (2013). *Frações: Uma abordagem pedagógica*. Dissertação apresentada à Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA, para a obtenção do título de Mestre em matemática. Mossoró – RN.

Bardin, L. (2004) *Análise de Conteúdo*. Lisboa; ed. 70.

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., & Silver, E. A. (1983). *Rational number concepts.* In R. Lesh & M. Landau (Eds.), Acquisition of mathematics concepts and processes. New York: Academic.

Brasil. Ministério da Educação. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília.

Cavaliere, L. (2005). *O ensino das frações.* Umuarama – PR. Monografia (Especialização em Ensino da Matemática), Coordenadoria de Pós-Graduação, Universidade Paranaense.

Cury, H. N. (2019). *Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos.* [S.l.]: Autêntica.

Cyr, M. (2003). *Les Représentations de la fraction: schèmes et connaissances chez des élèves de la fin du primaire.* Maître ès arts (M.A.) dissertation, Département d'enseignement et d'apprentissage, Faculté des Sciences de L'éducation, Université Laval.

Gay, A. S., & Aichele, D. B. (1997). Middle school students' understanding of number sense related to percent. *School Science and Mathematics,* 97(1), 27-36. doi:10.1111/j.1949-

8594.1997.tbl7

Howe, C., Nunes, T., & Bryant, P. (2011). Rational number and proportional reasoning: Using intensive quantities to promote achievement in mathematics and science. International *Journal of Science and Mathematics Education*, 9, 391–417.

Lamon, S. J. (2020). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding: Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers* (4th ed.). New York: Routledge.

Mandarino, S. P. F.; Sant'anna, N. da F. P. (2019) *Fração na reta numérica: experimentar, representar, compreender. A introdução ao ensino de frações nos anos iniciais do Ensino Fundamental*. Imperial Editora, 1ª Edição, Rio de Janeiro – RJ. Disponível em: bibliotecas.sedu.es.gov.br/bib/11632. Acesso em: 21 de maio de 2022.

Monteiro, C., & Costa, C. (1996). Dificuldades na aprendizagem dos números racionais. *Revista Educação e Matemática*, (40), 60–63. Portugal: APM.

Onuchic, L. R., & Alevatto, N. S. (2008). As diferentes "Personalidades" do Número Racional Trabalhadas através da Resolução de Problemas. *Boletim de Educação Matemática*, 21(31), 79-102.

Pinto, N. B. (2000). *O erro como estratégia didática: Estudo do erro no ensino da matemática elementar* (2 ed.). Campinas, SP: Papirus.

Schrenk, S. (2021). *As produções dos "professores PDE" para o ensino de frações como medida na reta numérica: possibilidades para o apoio pedagógico no Ensino Fundamental.* Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Curso Superior de Licenciatura em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo.

Tian, J., & Siegler, R. S. (2018). Which Type of Rational Numbers Should Students Learn First? *Educational Psychology Review*, 30(2), 351-372. Retrieved from https://www.jstor.org/stable/44956398

Trindade, S. S., & Búrigo, E. Z. (2021). As abordagens dos diferentes significados de número racional presentes na Base Nacional Comum Curricular. In *5° Fórum Nacional sobre Currículos de Matemática (pp. 1-13)*. Canoas: Ulbra.

Valente, W. R. (2022). *O erro em matemática: subsídios para a história da educação*. In M. J. Warde & F. R. de Oliveira (Eds.), História da Educação: sujeitos, objetos e práticas (Vol. 1, pp. 231-252). L F Editorial.

Vaz, R. F. N. (2013). *Metodologia didática de análise de soluções aplicada no ensino de frações* (Dissertação de mestrado). Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.