Revista de História da Educação Matemática
HISTEMAT

ISSN: 2447-6447
Submetido: 05/06/2023
Aprovado: 04/08/2023

UMA RELEITURA SOBRE O APROVEITAMENTO DIDÁTICO DE ERROS EM MATEMÁTICA: reescrever é escrever, reler é ler de outro modo

UNA RELECTURA SOBRE EL USO DIDÁCTICO DE LOS ERRORES EN MATEMÁTICAS: reescribir es escribir, releer es leer de otra manera

Antonio José Lopes[1]
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-9207-3359

RESUMO

Apresenta-se uma releitura e reescrita do artigo publicado há 36 anos "Erros: Mentiras que parecem Verdades ou Verdades que parecem Mentiras". O foco dos dois artigos é o "uso didático dos erros", baseado nos pressupostos didáticos, epistemológicos e filosóficos, bem como na pesquisa e experiência de educadores que se dedicaram a interpretar as respostas dos alunos frente a questões matemáticas. São apresentados e discutidos cenários reais a fim de contribuir para a mudança de concepções e estratégias de ensino, por meio de modelos didáticos em que o "erro" é explorado como objeto de conhecimento matemático, que pode dar indícios de concepções e estratégias dos estudantes que devem ser interpretadas e exploradas num processo dialógico de provas e refutações. Os cenários são discutidos à luz de referenciais filosófico-epistemológicos sobre a natureza do conhecimento matemático, bem como de teorias e experiências didáticas que promovem a aprendizagem de conceitos e relações matemáticas.
Palavras-chave: Erros em matemática. Ambiente de verdades provisórias. Problematização. Investigação matemática.

ABSTRACT/RESUMEN/RÉSUMÉ

Se presenta una relectura y reescritura del artículo publicado hace 36 años "Errores: Mentiras que parecen Verdades o Verdades que parecen Mentiras". El foco de los dos artículos es el "uso didáctico de los errores", basado en supuestos didácticos, epistemológicos y filosóficos, así como en la investigación y experiencia de educadores que se dedicaron a interpretar las respuestas de los estudiantes a preguntas matemáticas. Se presentan y discuten escenarios reales con el fin de contribuir al cambio de concepciones y estrategias de enseñanza, a través de modelos didácticos en los que se explora el "error" como objeto de conocimiento matemático, que puede dar evidencia de concepciones y estrategias de los estudiantes que deben ser interpretados y explorados en un proceso dialógico de pruebas y refutaciones. Los escenarios se discuten a la luz de referentes filosófico-epistemológicos sobre la naturaleza del conocimiento matemático, así como de teorías y experiencias didácticas que promueven el aprendizaje de conceptos y relaciones matemáticas.
Palabras clave: Errores en matemáticas. Ambiente de verdades provisionales. Problematización. Investigación matemática.

[1] Doutor em Didática da Matemática pela Universitat Autónoma de Barcelona (UAB). Pesquisador do Centro de Educação Matemática (CEM) e professor da Arco Escola-Cooperativa. E-mail: bigode@pentaminos.mat.br.

INTRODUÇÃO: Bastidores de uma investigação

Dedico-me ao estudo de “erros” nas respostas dos estudantes há cerca de 4 décadas, neste período fiz investigações em sala de aula, apresentei comunicações em eventos nacionais e internacionais, dei cursos para professores em exercício e publiquei artigos, com destaque para o que consta nos anais do 39º encontro da Comissão Internacional pelo Estudo e Melhoria do Ensino de Matemática realizado em 1987[2], cujo tema central era “*O papel dos erros na aprendizagem e no ensino da matemática*”. Desde então tenho acompanhado a pesquisa nacional e internacional de educadores/as matemáticos/as, tendo tido a honra de prefaciar o livro “*Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos*” (2002) da Profª Helena Cury, que pesquisou o tema “erros” em sua dissertação de mestrado e tese de doutorado. Ao ler o livro de Cury (2007) surpreendi-me ao ver meu nome encabeçando uma tabela de classificação com 40 trabalhos sobre erros de autores brasileiros (p. 47), em que a autora classificou meu artigo como o primeiro entre, os pesquisadores brasileiros, a tratar do tema “erros” de modo explícito. Meu interesse pelos erros era tão grande que desde que surgiu a plataforma Lattes coloquei o trabalho de 1987[3] como uma de minhas cinco produções mais importantes.

Ao ser convidado pela Profª Neusa Bertoni a submeter um artigo para avaliação neste número especial do GHEMAT “Dossiê – O Erro em Matemática em Perspectiva Histórica”, pensei no texto publicado no Canadá, desconhecido da maioria dos pesquisadores brasileiros, uma vez que a versão original foi publicada na língua francesa.

O convite gerou alguns dilemas. Publicar uma versão traduzida ou fazer uma releitura e reescrita incorporando o estado atual das pesquisas sobre o tema? As concepções e experiências discutidas no texto original ainda tem importância?

Pensando nisso e parafraseando o linguista Carlos Alberto Faraco, que teve um artigo relido e esquadrinhado por outros autores 22 anos após sua publicação, estou seguro de que “*meu texto ainda respira*”, tem vida, mantém a originalidade, traz contribuições para a formação de professores e um “novo” olhar para o erro em aulas de matemática. Optei então por traduzi-lo reescrevendo-o, inserindo novas reflexões e referências teóricas surgidas após a escrita do original, com o propósito de dialogar com a nova geração de pesquisadores em

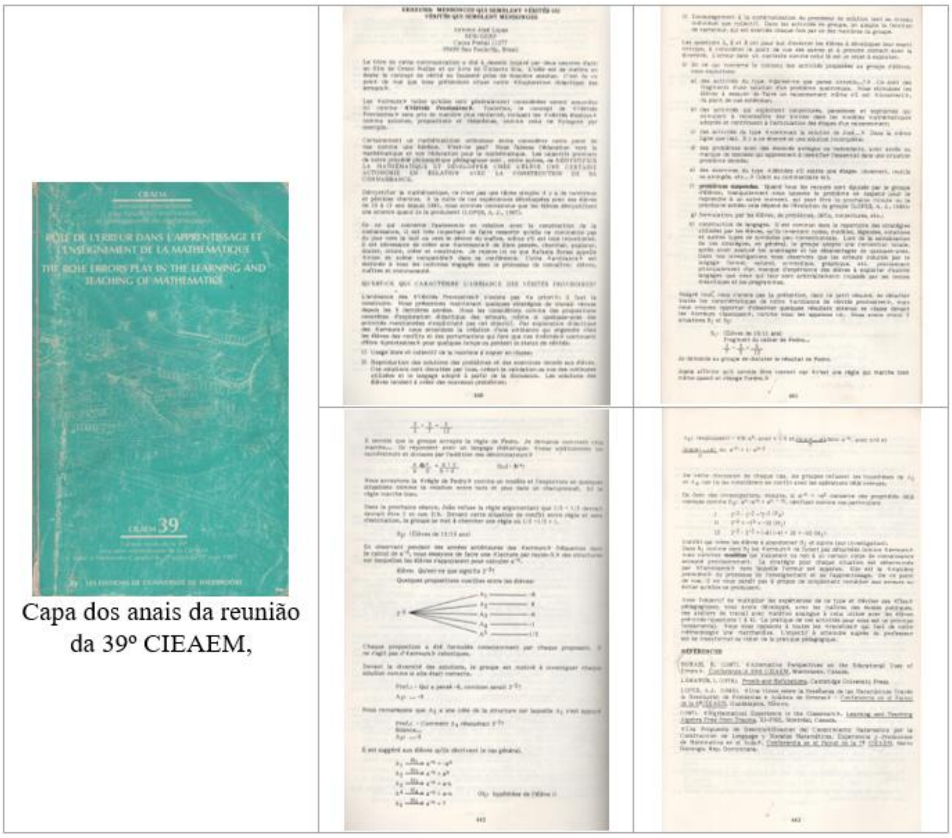
[2] Fundada em 1950, as reuniões da CIEAEM ocorrem anualmente e cada ano trata de um tema diferente, a 39ª CIAEM foi realizado na cidade de Sherbrooke, Canadá em 1987 com o tema “*The role of errors in the learning and teaching of mathematics*”

[3] A apresentação do trabalho ocorreu em 1987 e a ata foi publicada em 1988.

Educação Matemática, professores e professoras e leitores interessados, para que o erro seja compreendido como um objeto matemático que é natural que ocorra e que deve ser interpretado e considerado como parte do processo de ensino e de aprendizagem.

> [...] deveria existir um tempo na vida adulta dedicado a revisitar as leituras mais importantes da juventude. Se os livros permaneceram os mesmos (mas também eles mudam, à luz de uma perspectiva histórica diferente), nós com certeza mudamos, e o encontro é um acontecimento totalmente novo.
> Portanto, usar o verbo ler ou o verbo reler não tem muita importância. De fato, poderíamos dizer:
> 4. Toda releitura de um clássico é uma leitura de descoberta como a primeira.
> 5. Toda primeira leitura de um clássico é na realidade uma releitura.
> A definição 4 pode ser considerada corolário desta:
> 6. Um clássico é um livro que nunca terminou de dizer aquilo que tinha para dizer.

(Ítalo Calvino, em *Por que ler os clássicos*[4])



Capa dos anais da reunião da 39º CIEAEM,

Texto completo publicado pela Universidade de Sherbrooke, Canadá em 1988

[4] Obra publicada no Brasil pela Editora Companhia das Letras (1995)

1. ERROS MENTIRAS QUE PARECEM VERDADES OU VERDADES QUE PARECEM MENTIRAS[5].

ERREURS: MENSONGES QUI SEMBLENT VÉRITÉS OU VÉRITÉS QUI SEMBLENT MENSONGES

Antonio José Lopes
SEM/GERP
Caixa Postal 11277
05499 Sao Paulo/Sp, Brasil

Le titre de cette communication a été à dessein inspiré par deux oeuvres d'art: un film de Orson Welles et un livre de Ûmberto Eco. L'idée est de mettre en doute le concept de vérité ou fausseté prise de manière absolue. C'est de ce point de vue que nous prétendons situer notre «Exploration didactique des erreurs».

Les «erreurs» telles qu'elles sont généralement considérées seront assumées ici comme **«Vérités Provisoires»**. Toutefois, le concept de «Vérités Provisoires» sera pris de manière plus renfermé, incluant les «vérités établies» comme axiomes, propositions et théorèmes, comme celui de Pytagore par exemple.

Fragmento do artigo original publicado em Sherbrooke, Canadá

O título desta comunicação (artigo) foi inspirado em duas obras de arte: um filme de Orson Welles[6] e um livro de Umberto Eco[7]. Ambos trataram de miragens e do caráter relativo de fatos, concepções e conceitos, e sobre a frágil fronteira entre verdade e mentira, o falso e o verdadeiro, o certo e o errado. Na época em que foi escrito nosso propósito era o de questionar o conceito de verdade ou falsidade tomados de maneira absoluta, como era praxe na escola tradicional, em que o erro raramente era discutido, apenas contabilizado e cuja devolução, no sentido de Brousseau (1986), era e ainda é, de natureza punitiva, por meio da atribuição de uma nota que "qualifica" o estudante, não raro decidindo seu futuro por meio de mecanismos de aprovação ou reprovação. É deste ponto de vista que pretendemos situar nossa ***exploração didática dos erros***.

Os "erros", como geralmente são considerados, serão aqui tratados como objetos de *um tipo de conhecimento.* Fazemos aqui o que Lins (2012) chamou de leitura positiva em oposição à leitura pela falta (do aluno). Para isso delineamos o que vamos chamar daqui em diante de ***ambiente de verdades provisórias*** (AVP), inspirado nos escritos de Bachelard (2004) que interpreta, *"(...) no âmbito da cultura e do conhecimento, não mais a verdade, mas as verdades múltiplas, históricas, provisórias, a natureza efêmera do conhecimento articulada ao conceito de verdade"*. Entretanto nossa visão de um ambiente de verdades provisórias, busca ser mais

[5] Comunicação apresentada no 39º encontro da CIEAEM, realizado em Sherbrooke, CN em 1987, o artigo correspondente foi publicado nas Atas do evento, em 1988 v.1. Editores responsáveis *C. Goupille e L. Thérien.* p. 440-443.
[6] "Verdades e mentiras" (1973), filme escrito e dirigido por Orson Welles.
[7] "Mentiras que se parecem verdades" (1980) é um livro de Umberto Eco em coautoria com Mariza Bonazzi. Publicado pela Editora Summus.

abrangente, incluindo as chamadas "verdades estáveis" já estabelecidas pela comunidade matemática, como axiomas, proposições e teoremas. Temos consciência que tal posicionamento possa ser tratado como uma heresia por parte de um matemático ortodoxo, o que pode ocorrer se se tirar estas palavras do contexto do artigo. O diferencial que pretendemos realçar é o tratamento das ocorrências de aula, das proposições, conjecturas e descobertas dos estudantes.

Concordamos com Lins (1988)[8], ao afirmar que nosso objetivo é "*fazer educação pela matemática, e não (exclusivamente) para a matemática*" Nossa abordagem pretende desmistificar a matemática no que se refere à fonte do conhecimento e à liberdade de pensar sem pedir licença a uma autoridade, num ambiente desprovido de elementos constrangedores simbólicos ou materiais, em que a sala de aula se constitui num laboratório-usina de construção de conhecimento, um espaço de livre pensar coletivo frente a uma situação problema, contribuindo para aumentar a autoconfiança e potencializar a autonomia, por meio de processos de problematização e investigação num movimento de provas e refutações na sala de aula (caráter público) de inspiração lakatosiana.

O arcabouço epistemológico que procuramos pôr em ação é fortemente inspirado na filosofia falibilista de Lakatos (1977) e no conceito de legitimidade, tal como descrito por Lins (2012) na sua caracterização do Modelo dos Campos Semânticos (MCS)

> O interlocutor é uma direção no qual se fala. Quando falo na direção de um interlocutor é porque acredito que este interlocutor diria o que estou dizendo e aceitaria/adotaria a justificação que me autoriza a dizer o que estou dizendo.
>
> O interlocutor é um ser cognitivo, não um ser biológico.
>
> Quem fala não espera que um interlocutor responda, mas a mera existência do interlocutor instaura a dialogia. É assim que a fala interior também é dialógica.
>
> Toda fala é dialógica.[. .]
>
> Na ZPD (Vygotsky), segundo o MCS, o que se internaliza não é conteúdo, não são conceitos, e sim legitimidades: a pessoa já era capaz de fazer, mas não sabia que nesta ou naquela situação aquilo era legítimo, que nesta ou naquela situação aquele modo de produção de significado era legítimo". (Lins, 2012 pp19-20)

Neste sentido o modo que propomos que os "erros" sejam tratados na sala de aula, contribui para desmistificar a matemática e empoderar os estudantes, no sentido cognitivo, para que produzam significados a objetos, fatos, relações e problemas matemáticos independentemente da aprovação do professor quando no papel de guardião das verdades.

[8] Manifesto pela fundação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), mimeografado e não disponível.

Com base em nossas experiências com estudantes de 10 a 15 anos desde 1981, estamos convencidos de que os alunos desmistificam uma ciência quando têm a oportunidade de produzi-la e a produção é acolhida por meio de reflexões e problematizações, como forma de devolução e não um mero aceite, o que implica que a partir de uma leitura positiva Lins (2012) a produção dos alunos tende a ser autêntica dado que, no sentido de Lins (1994) o conhecimento é uma crença-afirmação seguida de uma justificação.

Quanto à autonomia, que potencializa a construção do conhecimento, cabe destacar que não se desenvolve do dia para a noite, por desejo ou decreto do docente, mesmo que bem-intencionado. É necessário criar um *ambiente de livre pensamento* e discussão, que possibilita ao estudante buscar, explorar, duvidar, acreditar, investigar, criar e construir, sem constrangimentos pessoais ou os institucionais que exercem controle como na atribuição de notas que decidem quem deve ser aprovado ou reprovado.

Por fim nos alinhamos às posições de Borasi (1987)[9] e sua ideia de "cenário compatível" apresentada na conferência da 39ª CIEAEM, em que o "ambiente" é desenhado e usufruído por todos os indivíduos engajados no processo de conhecer: alunos, professores e comunidade. Borasi defende o uso dos erros como oportunidades para aprendizagem e investigação sobre o pensamento matemático dos estudantes, suas concepções e crenças, além de se constituir como um trampolim para a exploração de novos conhecimentos matemáticos em vez de um uso exclusivamente diagnóstico e preventivo.

2. O AMBIENTE DAS VERDADES PROVISÓRIAS

Um *ambiente das verdades provisórias* não existe *a priori*, há que construí-lo por meio do respeito e consideração às vozes dos aprendizes no sentido freiriano Freire (1992).

Antes de discutir alguns "erros" dos estudantes apresentamos algumas estratégias de trabalho vivenciadas em sala de aula, com foco na "***exploração didática dos erros***", ainda que algumas das atividades mencionadas não explicitem tal objetivo. Por exploração didática dos "erros", entendemos a criação de um ambiente que gera nos alunos conflitos e perturbações que fazem com que as "verdades" sejam "provisórias" enquanto houver disposição para problematizá-las por meio da socialização, do diálogo dos estudantes entre si e com o professor

[9] Conferência proferida no 39° CIEAEM 1987

e os raciocínios lógicos que podem conduzir a uma prova ou uma refutação que lhes tire o status de verdade, por meio de contraexemplos ou incongruências:

1. Professor como elemento catalisador de energias é quem socializa as proposições, hipóteses e conjecturas vindas do grupo de alunos, responde com uma pergunta, problematiza e pensa em público (na frente dos) e com os estudantes;

2. Uso livre e coletivo do quadro (lousa, ecrã) como espaço público de registros, explorações e investigações[10];

3. Socialização das soluções dos problemas e exercícios feitos pelos alunos, para serem discutidas por todos, levando à validação (ou refutação) dos resultados e estratégias utilizadas na linguagem em que foram criadas. O aperfeiçoamento da linguagem e dos métodos é produto da discussão coletiva. De modo geral, as soluções dos estudantes tendem a gerar novos problemas;

4. Estímulo à sistematização do processo de solução tanto a nível individual como coletivo. Nas atividades em grupo, adota-se a função do narrador/a e do sistematizador/a, que é exercida em rodízio pelos/as componentes do grupo.

Os itens 1, 2 e 3 visam exercitar os alunos no desenvolvimento do espírito crítico, uma vez que contribui para que considerem e pensem do ponto de vista do outro, levando-os a entrar em contato com a diversidade de saberes, experiências e estilos cognitivos. O erro, suposto ou real, em um contexto como esse é um objeto de investigação a ser explorado.

5. Sobre o conteúdo das atividades propostas ao grupo de alunos, exploramos:

a) atividades do tipo "O que Joana pensou?" São fragmentos de uma solução de um problema, que encoraja os alunos a tentarem "refazer um raciocínio", mesmo que "incorreto", do ponto de vista de um outro que não quem o produziu;

[10] Com o desenvolvimento das tecnologias digitais, professor e alunos fotografam a lousa com as hipóteses e registros dos estudantes.

Não raro, utilizamos enunciados de problemas clássicos que foram estudados por outros pesquisadores, como ´´e o caso do problema da idade do capitão (descrito mais adiante) e de uma questão do NAEP[11] (1983) discutida por Alan Schoenfeld (1985).

“Um ônibus do exército pode transportar 36 soldados. Quantos ônibus são necessários para transportar 1.128 soldados para o campo de treinamento?

O inusitado não é o problema em si, mas sim as respostas dadas por estudantes pré-universitários. 29% dos alunos, simplesmente dividiram 1.128 por 36 e escolhem a resposta de múltipla escolha “31, resto 12”. Outros 18% arredondaram para baixo e escolheram a resposta 31, e 30% escolheram a resposta “outros”. Apenas 23% deram a resposta correta de 32 ônibus. Para Schoenfeld muitos dos alunos que deram respostas incorretas, argumentou, o fizeram porque estavam simplesmente aplicando regras matemáticas que aprenderam sem analisar a natureza do problema ou considerar suas implicações no mundo real.

b) atividades que exploram conjecturas, paradoxos e sofismas que estimulam o reconhecimento de limites nos modelos matemáticos adotados e contribuem para a articulação das etapas de um raciocínio;

c) atividades do tipo "continue a solução de José” em que são propostos enunciados de problemas ou exercícios com uma solução incompleta;

d) problemas com enunciados ambíguos ou redundantes, com excesso ou falta de dados que exigem a identificação do que é essencial em uma situação problema dada. Um exemplo deste tipo de situação é o clássico problema da idade do capitão.

“Em um barco há 26 cordeiros e 10 cabras. Qual é a idade do capitão?”

O enunciado do “problema” acima é um clássico do estudo sobre as respostas dos alunos, fez parte de um estudo desenvolvido em 1979 por pesquisadores em Didática da Matemática da Universidade de Grenoble, França com 97 alunos do 3º ano de uma escola pública da cidade de mesmo nome. A tabulação das respostas apontou que 76 alunos (78%) deram alguma resposta usando os números que aparecem no enunciado, muitos alunos atribuíram ao capitão 36 anos, como resultado da adição 26 + 10 usando os números que apareciam no enunciado. Desde então problemas deste tipo foram replicados em vários países do mundo obtendo-se resultados análogos e reflexões teóricas sobre “contrato didático”.

e) exercícios do tipo "decida se há uma etapa incorreta, inútil ou ambígua, na solução";

f) problema “pendurado” (suspenso). Quando todos os recursos foram esgotados pelo grupo de alunos, calmamente deixa-se o problema para ser retomado em outro momento, que pode ser o próximo minuto ou dias ou semanas depois, dando o devido tempo para que as ideias

[11] National Assessment of Educational Progress (NAEP), avaliação nacional do Depto. de Educação dos EUA.

sejam amadurecidas e os estudantes possam fazer simulações, verificações, apresentar novas hipóteses, trazer novos conceitos e técnicas que podem resolver o problema no futuro, tal como ocorre com problemas avançados da matemática pura (Lopes, 1985);

g) formulação, pelos alunos, de problemas, desafios e conjecturas, em que se colocam da perspectiva do outro imaginando obstáculos para que a situação proposta não tenha uma solução trivial que possa ser resolvida de modo mecânico;

h) construção de linguagens (notações, terminologia, símbolos, esquemas). É comum no repertório de estratégias usadas pelos alunos que inventem códigos, símbolos, legendas, notações e outros tipos de representações pouco convencionais. A partir da socialização de estratégias, em geral, o grupo adota uma convenção local, após analisar vantagens e desvantagens de algumas. Em nossas investigações, observamos que os erros induzidos pela linguagem formal, natural, simbólica e gráfica provêm, principalmente, da falta de experiência dos alunos em explorar outras linguagens além das que lhes são prescritas por meio de materiais instrucionais, programas e pelo professor.

Esta lista é uma seleção, não esgota o acervo de estratégias didáticas que caracterizam o "ambiente de verdades provisórias".

3. RELATO DE UMA INVESTIGAÇÃO

A pesquisa sobre erros em matemática tem muitas vertentes, com destaque para estudos sobre as causas (variáveis) da ocorrência dos erros; estudos dedicados ao tratamento curricular e à aprendizagem matemática visando remediar ou evitar a ocorrência de erros por meio do design de tarefas e avaliações e da reorganização curricular, entre outras estratégias de intervenção; estudos que buscam analisar e classificar os erros, estudos obre a gestão da aula, entre outros, com destaque para a linha adotada aqui, o aproveitamento didático dos erros com foco na problematização e na dialogia dentro da sala de aula.

Para ter um panorama dos resultados que temos obtido em nossas intervenções e investigações apresentamos neste artigo dois cenários com resultados obtidos em sala de aula diante de “erros” comuns, alguns clássicos, observados na resposta dos estudantes de países de vários continentes[12].

[12] No ano de 1987 foi realizada na cidade de Sherbrooke, Canadá o 37º encontro da Comissão Internacional para a Melhoria do Ensino de Matemática (CIEAEM) cujo tema central foi “*O papel do erro no ensino e aprendizagem da Matemática*”

Como amostra selecionamos duas situações S1 e S2 observadas em uma escola de ensino fundamental da cidade de São Paulo, sobre dois temas tradicionais da matemática escolar: soma de frações e potência com expoente negativo.

S1: (Alunos de 10/11 anos)

No estudo sobre como somar frações, o professor propõe exercícios para levantar os conhecimentos prévios dos alunos sobre o conteúdo que pretende que aprendam, para entender as estratégias utilizadas e as hipóteses gerais que lhes dão suporte.

Fragmento do caderno de Pedro: $\frac{3}{7} + \frac{2}{5} = \frac{5}{12}$

Trata-se de um erro resistente, advindo de um conhecimento antigo que foi eficiente num dado contexto, que é cometido por alunos de distintas culturas, condições sociais ou tradições pedagógicas. Borasi (1987) nomeou este tipo de erro de "sobregeneralização", apoiada em regras já conhecidas, como é o caso da multiplicação de frações, tal erro é detectado inclusive em cursos universitários.

Erro semelhante ocorre quando os estudantes acreditam que $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, que Cury (2007) chamou de "saliência visual" da expressão da raiz do produto.

Em sua palestra na 5ª CIAEM (1985) o educador matemático mexicano Eduardo Mancera (1998) propõe a investigação de casos particulares em que a regra errada "funciona", dá como exemplos simplificações erradas que produzem um resultado correto.

$$\frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5} = \frac{2}{5}$$

Discute ainda macetes que nem sempre dão errado, como a regra de "simplificação"
$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} = a + b$; basta que um dos elementos a ou b seja 0.

$$\sqrt{5^2+0^2} = \cancel{\sqrt{}}5^{\cancel{2}} + \cancel{\sqrt{}}0^{\cancel{2}} = 5 + 0 = 5$$

O professor pede ao grupo que discuta o resultado de Pedro.

Joana afirma que parece estar correto porque "é uma regra que funciona bem mesmo quando mudamos a ordem", um indicador de que a estudante tem consciência da propriedade comutativa da adição de números naturais e a utilizou no contexto das frações para sustentar sua crença na regra.

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{5}{12}$$

No primeiro momento o grupo parece aceitar a regra de Pedro.

O professor pergunta como a regra funciona.

Alguns estudantes respondem usando linguagem retórica: "*somamos os numeradores e dividimos pela soma dos denominadores*"

Em linguagem simbólica a regra do Pedro pode ser expressa do seguinte modo.

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}, (b.d \in \mathbb{N}^*)$$

O professor evita corrigir a regra de Pedro, ao contrário a aceita como um modelo e propõem exercícios para que os alunos do grupo a experimentem.

Cabe aqui apontar que a regra $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$, não é de todo incorreta.

> No 4º ICME - realizado no ano de 1980 em Berkeley, EUA - o matemático norte-americano Peter Hilton, proferiu a conferência "*Do We Still Need Fractions in the Elementary Curriculum*" em que discutiu porque não deveríamos ensinar frações (do jeito que ensinamos) destacando equívocos na metodologia do ensino e contextos em que a regra de Pedro é adequada, como no caso em que frações representam razões que expressam a relação entre gols e jogos em um campeonato de dois turnos. Se um determinado jogador marcou 2 gols em 5 partidas do 1º turno e 3 gols em 7 partidas do 2º turno, no campeonato ele marcou 2 + 3 = 5 gols em 5 + 7 = 12 partidas do campeonato.

A pedir aos alunos que apliquem regra do Pedro para calcular $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, João a recusou argumentando que $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ deveria ser 1 e não $\frac{2}{4}$. Vê-se que o resultado, mesmo que obtido de uma regra que no primeiro momento parecia ser verdadeira, gerou um conflito com um sentido numérico mais estável. Considerando que os resultados advindos da regra e o sentido de estimativa eram excludentes, o grupo rejeita a regra de Pedro e passa a procurar uma regra em que $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Frente ao novo cenário o professor dispõe de melhores condições para ensinar a regra da soma de frações por um caminho que não resultou da percepção imediata dos estudantes.

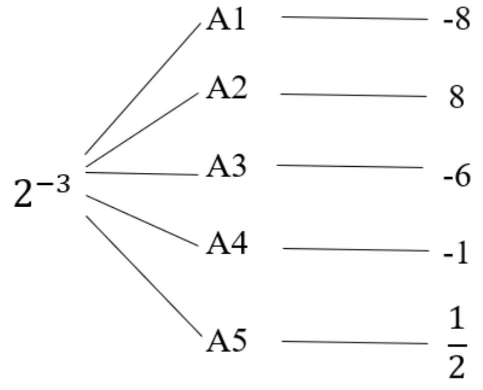
S2: (Alunos de 12/13 anos)

Ao observar, em anos anteriores, "erros" frequentes no cálculo de a^{-n}, um professor resolveu fazer uma "leitura de raio-x" das estruturas nas quais os estudantes se baseavam para calcular potências com expoentes negativos.

Em sua investigação percebeu que, salvo raras exceções, cada hipótese formulada pelos alunos tinha uma lógica interna, mesmo no caso em que não tinham consciência disso.

O que significa 2^{-3}?

A seguir apresentamos cinco respostas coletadas entre os alunos:



Cabe observar que as cinco respostas não eram "erros" caóticos ou ‘chutes’, pois mostraram-se resistentes, mesmo quando a base e o expoente variavam.

Diante da diversidade das soluções, o grupo foi convidado a investigar cada solução como se estivesse correta.

> *Prof.: - Para quem achou que $2^{-3} = -8$, quanto seria 3^{-2} ?*
> *A2: . . . -9.*
> *Vê-se que A2 se apoiou na estrutura da regra usada por A1.*
> *Prof.: Pensando como A4 quanto seria 3^{-2} ?*
> *A5: . . . 1.*

Este é mais um indício de que A5 conseguiu pensar do ponto de vista de A4.

O professor está tendo sucesso no seu intento de levar os alunos a se colocarem do ponto de vista do outro, levando-os a abstraírem com foco na estrutura algébrica da regra utilizada por cada colega.

O próximo passo foi pedir que descrevessem um modelo geral para a^{-n}, com n $\in N^*$.

- A1 $\overset{H_1}{\to} a^{-n} = -a^n$
- A2 $\overset{H_2}{\to} a^{-n} = a^n$
- A3 $\overset{H_3}{\to} a^{-n} = a \cdot n$ $\qquad (H_i\text{: hipótese do aluno } i)$
- A4 $\overset{H_4}{\to} a^{-n} = a - n$
- A5 $\overset{H_5}{\to} a^{-n} = ?$

Da discussão de cada caso, os estudantes rejeitaram as hipóteses de A3 e A4, pois as consideraram em conflito com as operações mais estáveis e incorporadas a seu sistema de pensamento aritmético.

Ninguém conseguiu dizer como A5 pensou, frente a isso A5 foi solicitado a explicar o modelo que sustentava sua resposta.

A5 (explicando): "Se $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot .. \cdot a}_{n\ vezes}$, com n > 1, então $a^{-n} = \underbrace{a \div a \div .. \div a}_{n\ vezes}$.

E é por isso que $2^{-3} = \underbrace{2 \div 2}_{1} \div 2 = 1 \div 2 = \frac{1}{2}$.

Devolvendo para o grupo, generalizam: $a^{-n} = \underbrace{a \div a \div .. \div a}_{n\ vezes} = a^{n-2}$.

Partiram para a investigação sobre a regra geral de A5.

Queriam saber se $a^{-n} = -a^n$preservava propriedades já conhecidas, ou seja, se $a^m \cdot a^n = a^{m+n} (P_1)$ fazendo verificações com casos particulares

$$[I]: 2^{-3} \cdot 2^{-2} = 2^{-5}\ (por\ P_1)$$

$$[II]: 2^{-5} = -2^5 = -32\ (por\ H_1)$$

$$[III]: 2^{-3} \cdot 2^{-2} = (-8) \cdot (-4) = 32\ \neq -32\ (\ por\ H_1)$$

O conflito levou os alunos a abandonarem H_1 e seguir na sua investigação.

Em S1, assim como em S2, os "erros" não foram descartados e sim tratados como modelos que se ajustavam (ou não) a um certo corpo de conhecimento estável ou em desenvolvimento, como uma *verdade provisória*. A estratégia para cada situação é determinada pelo "ambiente" no qual o erro apareceu e se constitui em "matéria-prima" do processo de ensino e de aprendizagem. Desse ponto de vista, não nos parece adequado simplesmente remediar erros ou tentar evitar que ocorram, renunciando à possibilidade de abordá-los quando surgirem de modo natural em algum momento do processo de ensino.

CONSIDERAÇÔES FINAIS

Acreditamos que a estratégia de generalizar o erro, reconhecendo-o como uma hipótese e aplicar a outras situações é uma estratégia válida, em especial no caso em que o objetivo do docente for o de levar os/as estudantes a deduzir, descobrir, inventar ou apenas compreender regras que não são tão intuitivas, como no caso das operações com frações, com destaque para a divisão, que não pode ser obtida por analogia a fatias de pizza e barras de chocolate, ou ainda a regra de sinais no caso da multiplicação de inteiros, regras de potenciação entre outros conteúdos mais abstratos que fogem ao senso comum.

Com o objetivo de multiplicar experiências desse tipo temos socializado resultados e produções da perspectiva do AVP, explorando atividades semelhantes às aqui descritas, em cursos de formação de professores da educação básica. A prática dessas atividades para nós é um princípio fundamental. Nos opomos a "receitas" que fazem de nossa metodologia uma mercadoria engessada que os estudantes têm que consumir de modo acrítico e sem sua contribuição e protagonismo, na forma de investigação e reflexão coletiva, como descrevemos nas duas situações aqui apresentadas.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao prof. Carlos Roberto Vianna do Departamento de Matemática – UFPR, pela leitura prévia, sugestões e pelo encorajamento.

À professora Helena Noronha Cunha professora aposentada da Universidade Franciscana de Santa Maria, RS e da PUC RS por suas pesquisas sobre erros que geraram seus trabalhos acadêmicos de mestrado e doutorado, artigos e o livro que tive a honra de prefaciar.

À Professora Neuza Bertoni Ponto pelo convite para submeter este artigo para publicação neste número especial do HISTEMAT.

REFERÊNCIAS

Bachelard, G. (2004). *“Ensaio sobre o conhecimento aproximado”* Rio de Janeiro: Contraponto.

Borasi, R. (1987). “*Alternative perspectives on the Educational Uses of errors*". In: Anais da 39° . CIEAEM, 1987, Sherbrooke, CN. *Rôle de L'Erreur dans L'Apprentissage et L'Enseignement de la Mathématique*. (42-47). Sherbrooke: Les Éditions de L´Université de Sherbrooke.

Brousseau, G. (1983), *Les obstacles épistémologiques et les problèmes en matematiqués*. Recherche en Didactique de Mathématiques. Vol. 4. Núm. 2. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Calvino, Í. (1993) *“Por que ler um Clássico.* São Paulo : Companhia das Letras.

Cury, H. N. (2007) *“Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos”*. Belo Horizonte: Autêntica.

Freire, P. (1992). *Pedagogia da esperança: um Reencontro com a Pedagogia do Oprimido*. Rio de Janeiro: Paz e Terra.

Lakatos, I. (1978). *A Lógica do Descobrimento Matemático: Provas e Refutações*, Orgs. Worral, J e Zahar, E (trad. Nathanael C. Caixeiro). Rio de Janeiro: Zahar.

Lins, R. C. (1994). *O modelo teórico dos Campos Semânticos: Uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico*. Dynamis, Blumenau. V.1, n.7, p-29-39, abr/jun 1994.

Lins, R. C. (2012). *O Modelo dos Campos Semânticos: estabelecimentos e notas de teorizações, in Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática*: *20 anos*. Org. Angelo et alii. São Paulo: Midiograf.

Lopes, A. J. (1985). "*Uma Visão sobre o Ensino de Matemáticas Através da Resolução de Problemas e Análise de Erros*" - Conferência no Painel da 6ª ,Guadalajara, México.

Lopes, A. J. (1988). “*Erreurs: Mensonges qui semblent vérités ou vérités qui semblent » mensonges*”. In: Anais da 39° . CIEAEM, 1987, Sherbrooke, CN. *Rôle de L'Erreur dans L'Apprentissage et L'Enseignement de la Mathematique*. (440-443). Sherbrooke: Les Éditions de L´Université de Sherbrooke :

Mancera, E. (1998) “*Errar es un placer: El uso de los errores para el desarrollo del pensamiento matemático*”. Ciudad de México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Schoenfeld, A. H. (1985) Mathematical Problem Solving, Orlando: Academic Press.