



CÁLCULO MENTAL NO ENSINO DE NÚMEROS RACIONAIS: sistematizações de uma *expert* que mobiliza perspectivas de Guy Brousseau e Gérard Vergnaud

Mental calculation in the teaching of rational numbers: systematizations of an expert who mobilizes perspectives from Guy Brousseau and Gérard Vergnaud

Ruth Edite Cosme¹

Secretaria Municipal de Educação - Palotina/PR

E-mail para contato: ruthinhacosme@gmail.com

 Lattes: <http://lattes.cnpq.br/0936436009134518>

 Orcid: <https://orcid.org/0009-0003-5941-3272>

Danilene Gullich Donin Berticelli²

Universidade Federal do Paraná

E-mail para contato: danilene@ufpr.br

 Lattes: <http://lattes.cnpq.br/4202253939821084>

 Orcid: <https://orcid.org/0000-0003-3051-4750>

¹ Mestre em Educação Matemática pela Universidade Federal do Paraná – Setor Palotina (UFPR). Professora vinculada à Secretaria Municipal de Educação (SEMEC), Palotina, Paraná, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Candido Portinari., n. 1905, casa, bairro Bela Vista, Palotina, Paraná, Brasil, CEP: 85951-008. E-mail: ruthinhacosme@gmail.com.

² Doutora em Educação (PUC/PR). Docente na Universidade Federal do Paraná -Setor Palotina (UFPR). Palotina, Paraná, Brasil. Rua Vereador Antonio Pozzan, n. 800. Palotina, Paraná, Brasil. Cep: 85950-037.E-mail: danilene@ufpr.br.

RESUMO

O presente trabalho é um recorte de uma pesquisa de mestrado que apresenta a *expertise* profissional de Cecilia Parra mobilizada para a sistematização de um manual pedagógico para o Governo da Cidade de Buenos Aires no início do século XXI, em que Parra era diretora de currículo. Pretendemos expor recortes de uma entrevista realizada com Parra, para compreender como esses saberes foram mobilizados e quais teorias foram utilizadas para tal. O recorte tem por finalidade verificar se Parra pode ser considerada um *expert*, tendo em vista os saberes de cálculo mental no ensino de números racionais presentes no material. Chartier (1990, 2002) nos auxilia com a História Cultural, quando trazemos para o estudo conceitos de apropriação dos saberes matemáticos presentes no material direcionado para docentes e estudantes. São apresentados conhecimentos matemáticos (Berticelli e Zancan, 2021), dentre eles o cálculo mental, auxiliando no processo de resolução de problemas (Parra, 1996). Os autores Bertini e Valente (2020) nos auxiliam na compreensão da matemática do ensino de frações, decimais e porcentagens de uma determinada cultura escolar, articulada ao cálculo mental. A conversa com a autora nos revelou o embasamento centrado na teoria das situações didáticas, de Guy Brousseau (2008), e na teoria dos campos conceituais, de Gérard Vergnaud (1996, 2019). A caracterização da *expertise*, sistematizada no manual, deu-se à luz do que é definido por Hofstetter, Schneuwly e Freymond (2017), visto que Parra atende a uma demanda do Estado. O estudo indicou que Parra pode ser considerada uma *expert*, visto que atendeu a uma demanda do estado, trabalhando na elaboração de novos saberes *a e para* ensinar, articulados à matemática do ensino de cálculo mental com números racionais.

Palavras-chave: Cálculo mental. Números racionais. *Expertise*.

ABSTRACT

This paper is an excerpt from a master's research project that presents Cecilia Parra's professional *expertise* mobilized for the systematization of a pedagogical manual for the Government of the City of Buenos Aires at the beginning of the 21st century, when Parra was curriculum director. We intend to present excerpts from an interview with Parra in order to understand how this knowledge was mobilized and which theories were used to do so. The purpose of the clipping is to see if Parra can be considered an *expert*, given the knowledge of mental calculation in the teaching of rational numbers present in the material. Chartier (1990, 2002) helps us with Cultural History, when we bring to the study concepts of appropriation of the mathematical knowledge present in the material aimed at teachers and students. Mathematical knowledge is presented (Berticelli and Zancan, 2021), including mental calculation, which helps in the problem-solving process (Parra, 1996). The authors Bertini and Valente (2020) help us to understand the mathematics of teaching fractions, decimals and percentages in a particular school culture, linked to mental calculation. The conversation with the author revealed a foundation centered on the theory of didactic situations, by Guy Brousseau (2008), and the theory of conceptual fields, by Gérard Vergnaud (1996, 2019). The characterization of *expertise*, systematized in the manual, took place in the light of what is defined by Hofstetter, Schneuwly and Freymond (2017), since Parra meets a state demand. The study indicated that Parra can be considered an *expert*, since she met a demand from the state, working on the development of new knowledge *to* and *for* teaching, articulated to the mathematics of teaching mental calculation with rational numbers.

Keywords: Mental calculation. Rational numbers. *Expertise*.

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Este estudo faz parte de uma pesquisa de mestrado, intitulada “Estratégias de cálculo mental com números racionais: um olhar sobre a *expertise* profissional de Cecilia Parra”, que abrange um recorte temporal de 2004 a 2010. A pesquisa apresenta uma análise em documentos curriculares argentinos que trazem a autora Cecilia Parra como diretora de currículo, a convite do Governo da Cidade de Buenos Aires. Os documentos são articulados a um material produzido pela autora citada, em conjunto com uma equipe, em que se trabalha atividades envolvendo cálculo mental com números racionais, voltado para professores e alunos. O material era direcionado para professores do 5º ao 9º ano (3º e 4º ciclos, correspondentes no Brasil) e do 4º ao 7º *grado* (ano), 2º ciclo, em Buenos Aires, Argentina.

A questão central da pesquisa de mestrado é: Como se caracteriza a *expertise* profissional de Cecília Parra no ensino de cálculo mental com números racionais presente no material argentino, no período de 2004 a 2010? A investigação traz como um dos objetivos analisar os conhecimentos e estratégias de cálculo mental utilizados nas atividades envolvendo números racionais, o qual será explorado neste artigo. Neste artigo, o objetivo é o enfoque nas teorias brevemente discutidas, de Guy Brousseau (2008) e Gérard Vergnaud (1996, 2009), que trazem os saberes profissionais do professor que ensina matemática, relacionados aos números racionais.

Para compreender de que forma esta investigação contribui para a História da Educação Matemática, recorreremos a História Cultural, campo da história que aborda a “representação” para identificar as formas como o ser humano compreende a realidade social de determinada época e como ele se “apropria” do que a história lhe oferece, interpretando as diversas formas de construção da realidade de outras épocas (Chartier, 2013). Para isso, os procedimentos de pesquisa são fundamentais, uma vez que “[...] asseguram o funcionamento reflexivo da representação: nos quadros, a moldura, o enfeite, a decoração; para os textos, o conjunto dos dispositivos discursivos e materiais que constituem o aparato formal da enunciação” (p. 16).

O material analisado foi elaborado em Buenos Aires, Argentina, datado de 2004 a 2007 e apresenta o cálculo mental em toda a sua composição, de forma explícita ou subentendida. Em se tratando do cálculo mental, Berticelli e Zancan (2021) ressaltam que

esses saberes, destacados pelas autoras como “conhecimento³”, quando bem estruturados na educação básica, contribuem para a formação, dando oportunidades ao indivíduo de decifrar “operações de forma mental”, fazendo com que consiga “resolver questões em qualquer outra área, aprimorando seu raciocínio, seu pensamento, sua capacidade de estabelecer conexões” (p. 16-17).

As discussões aqui levantadas, que envolvem a matemática que permeia os conhecimentos de cálculo mental, nos levam a refletir sobre a utilização destes saberes com números naturais. Nesta perspectiva, estendemos a reflexão para os números racionais: como ensinar as frações, porcentagens e decimais na escola? De que forma o cálculo mental poderia ser mobilizado nestas situações? Existe a possibilidade de articulação destes saberes? Como construir a *matemática do ensino* (Morais, Bertini e Valente, 2021) de frações, decimais e porcentagens, conectados ao cálculo mental, inseridos em uma determinada cultura escolar (Julia, 2001)?

Com base nessas reflexões, discutiremos a respeito do cálculo mental com números racionais (frações, decimais e porcentagens). Esta discussão se dará por meio de um diálogo entre dois autores: Guy Brousseau (2008), com a teoria das situações didáticas e Gérard Vergnaud (1996, 2019), com a teoria dos campos conceituais, em convergência com os conhecimentos e estratégias de cálculo mental presentes no manual pedagógico argentino.

As teorias de Brousseau e Vergnaud surgiram a partir de uma entrevista realizada com Parra⁴, em que ela nos apontou as bases teóricas que fundamentam seus estudos e trabalhos relacionados ao cálculo mental. Desta forma, foi necessário um aprofundamento destas teorias, para compreender as atividades apresentadas no manual. Faremos uma conversa entre as teorias citadas, presentes no material, e a entrevista realizada com a autora, para compreender de que forma ocorreu esta articulação. A razão para provocarmos um diálogo entre as duas teorias, de Brousseau e Vergnaud, está no fato de Parra ter trabalhado na elaboração do manual argentino analisado, além de outros materiais didáticos, embasando-se nestes autores.

Cecilia Parra é argentina, professora de Educação Primária, formada pela Escuela Normal N° 1 de Profesores Roque Saenz Peña, desde 1974; graduada em 1978 como professora de educação pré-escolar. Em 1987 se formou em Ciências da Educação, formada pela Faculdade de Filosofia e Letras, Universidad de Buenos Aires. Desde o ano de 2007, é

³ Quando estivermos nos referindo à pesquisa das autoras Berticelli e Zancan (2021) utilizaremos o termo “conhecimentos”. Quando nos referirmos à análise que fizemos, faremos referência aos “saberes”, de acordo com Hofstetter e Schneuwly (2017).

⁴ Os recortes da entrevista encontram-se na dissertação. Para conhecer mais sugere-se a leitura.

especialista em Políticas Educacionais. Trabalhou junto a uma equipe, na parte direcionada à matemática, elaborando documentos curriculares da cidade de Buenos Aires e na produção de materiais para a formação docente, sendo referência em didática da matemática.

Parra se caracteriza como *expert* no que diz respeito ao cálculo mental com números racionais, visto que recebeu um convite para cumprir uma demanda do Estado (Hofstetter, Schneuwly e Freymond, 2017) da Cidade de Buenos Aires. Seu envolvimento em ações a pedido de órgãos públicos demonstra o reconhecimento de sua *expertise*, que é relacionada também à docência, visto que Bertini, Morais e Valente (2017) compreendem a *expertise* profissional, como aquela que caracteriza a profissão do professor, este de posse dos saberes *a* e *para ensinar*⁵. Os autores afirmam que os saberes, relacionados à *expertise*, são específicos para a profissão de ensinar. Cecilia Parra recebeu a incumbência de “ensinar” professores a ensinar matemática, por meio dos materiais que ela elaborou. Em entrevista realizada com Parra, ela afirma que “*Nos anos 90 nos chamaram para participar dos Planos de Formação de Professores. E para participar, desde o ano de 89 já comecei a trabalhar dentro do planejamento educacional da cidade de Buenos Aires*” (Parra, 2023, tradução nossa).

Segundo Hofstetter, Schneuwly e Freymond (2017), a *expertise* está ligada a “[...] uma instrução pública orgânica e juridicamente ligada ao poder público” (p. 57). Parra afirma que desenvolveu um trabalho voltado para os docentes, cumprindo assim uma demanda do governo de Buenos Aires. Parra começou a fazer “*experiências com professores da escola do Estado da cidade de Buenos Aires*” e passou a “*produzir materiais destinados a professores iniciantes*” (Parra, 2023, tradução nossa). Esta é uma das competências dos *experts*. Segundo Hofstetter, Schneuwly e Freymond (2017), “A *expertise* é, portanto, realizada por pessoas do meio escolar, isto é, pela profissão docente” (p. 67), quando há o cumprimento de uma demanda do estado.

1. UM OLHAR SOBRE A EXPERTISE PROFISSIONAL DE CECILIA PARRA: alguns conceitos

A temática aqui discutida trata diretamente dos saberes que envolvem o cálculo mental no ensino de números racionais, do final do século XX e início do século XXI. É importante

⁵ Os saberes *a ensinar* referem-se aos “diferentes campos científicos considerados importantes para a formação dos professores”, trazendo uma lógica que autentica a competência dos professores das disciplinas, sendo base para a formação docente (Bertini, Morais e Valente, 2017, p. 11). Desta forma, o cálculo mental pode ser considerado um saber *a ensinar*, conteúdo que deve ser trabalhado nos primeiros anos escolares (Parra, 1996). Os saberes *para ensinar* são agregados à docência, ligados aos saberes específicos para a função docente, vinculados aos estudos pedagógicos (Bertini, Morais e Valente, 2017). Ambos constituem a *matemática do ensino* (Valente e Bertini, 2022) de cálculo mental.

destacar que quando se analisa documentos históricos, em busca de métodos, didáticas, orientações pedagógicas, à medida que vão sendo sistematizados, se transformam em saberes objetivados e conduzem “[...] a um movimento de institucionalização de *saberes para ensinar* referenciados em *saberes a ensinar*” (Bertini, Morais e Valente, 2017, p. 25, grifo dos autores).

Por meio da institucionalização desses saberes, disciplinas são criadas, normativas são constituídas, materiais didáticos são produzidos atendendo às normas, se configurando em saberes a serem trabalhados no ambiente escolar (Bertini, Morais e Valente, 2017). Para além, ainda segundo os autores, quando este processo perpetua, outros aspectos se responsabilizam pela promoção e sustentação da *expertise*, fazendo emergir novos *experts*.

Nesta perspectiva, compreendemos a elaboração minuciosa do material argentino que analisamos, a sistematização da *expertise* da autora, junto a uma equipe de colaboradores, como um trabalho de especialista, ou, sob a vertente de Bertini, Morais e Valente (2017), um trabalho desenvolvido por uma *expert*. Esse conceito possui uma atribuição ampla, por se tratar de estudiosos que são especialistas em educação. Os autores Hofstetter, Schneuwly e Freymond evocam a *expertise* como:

[...] uma instância, em princípio reconhecida como legítima, atribuída a um ou vários especialistas [...] distinguidos pelos seus conhecimentos, atitudes, experiências, a fim de examinar uma situação, de avaliar um fenômeno, de constatar fatos. Esta *expertise* é solicitada pelas autoridades do ensino tendo em vista a necessidade de tomar uma decisão (Hofstetter, Schneuwly e Freymond, 2017, p. 57).

Percebemos, pela análise do material, que a colaboração como diretora de currículo novamente comprova sua atuação como *expert*, visto que “a documentação pode nos possibilitar a análise de processos e dinâmicas de constituição do saber profissional do professor pela via de *experts* em educação” (Morais e Valente, 2020, p. 8).

Vale concordar com Morais e Valente (2020), quando reiteram que há três pontos relevantes para que haja uma convocação ou um convite do Estado à função do *expert*: “[...] (1) uma demanda do Estado; (2) a convocação da *expertise*; (3) a resolução de um problema prático” (Morais e Valente, 2020, p. 8).

Corroborando com tais afirmações, destacamos a *expertise* de Parra no campo pedagógico, segundo os autores Hofstetter, Schneuwly e Freymond (2017), quando afirmam que “A solicitação de *expertise* [...] participa decisivamente da produção de novos saberes no campo pedagógico” (p. 57). De acordo com Parra (2023), naquele momento, o que se tinha em sala de aula “[...] era a ideia de repertórios, conhecer o repertório aditivo e multiplicativo.

[...] depois disso, foi depreciado, porque na reforma da Matemática Moderna não tinham valor” (Parra, 2023, tradução nossa).

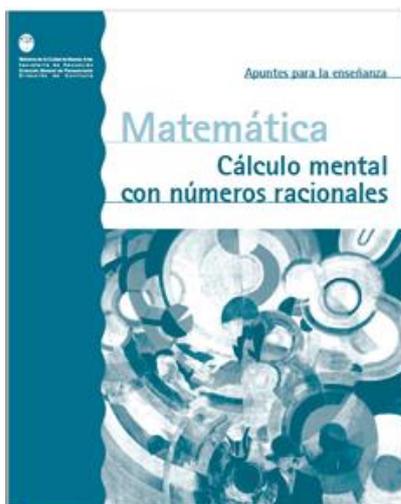
A autora afirma que desenvolveu um trabalho voltado para os docentes, cumprindo assim uma demanda do governo de Buenos Aires. A mesma começou a fazer “*experiências com professores da escola do Estado da cidade de Buenos Aires*” e passou a “*produzir materiais destinados a professores iniciantes*” (Parra, 2023, tradução nossa). Esta é uma das competências dos *experts*. Segundo Hofstetter, Schneuwly e Freymond (2017), “A *expertise* é, portanto, realizada por pessoas do meio escolar, isto é, pela profissão docente” (p. 67), quando há o cumprimento de uma demanda do estado. Em meio a essas experiências, a autora iniciou um trabalho na produção do manual pedagógico de Buenos Aires.

2. AS TEORIAS DE BROUSSEAU E VERNAUD MOBILIZADAS EM ATIVIDADES DO MANUAL PEDAGÓGICO

O material analisado é uma apostila que faz parte do projeto “Plan Plurianual para el Mejoramiento de la Enseñanza - 2004-2007”.

Investigamos atividades desenvolvidas no manual cujo título é “*Matemática – Cálculo mental com números racionales – Apuntes para la Enseñanza*”, produzido para atender uma demanda do Governo da Cidade de Buenos Aires – Secretaria da Educação, em que Parra é *Directora de Currícula*”, além de vários colaboradores: Susana Wolman (Coordenação na área da Educação Primária); Adriana Cajamajor (colaboradora na área da Educação Primária); Patricia Sadovsky (Coordenação autoral e da área de Matemática); María Emilia Quaranta e Héctor Ponce na elaboração do material.

Figura 1 – Capa do manual argentino analisado



Fonte: A autora (2023)

O manual possui uma apresentação, onde os autores ressaltam as ações desenvolvidas pela Secretaria de Educação do Governo da Cidade de Buenos Aires para aperfeiçoamento do ensino em nível primário. Faz parte do *Plan Plurianual para el Mejoramiento de la Enseñanza em el Segundo Ciclo del Nivel Primario* das escolas da cidade, plano desenvolvido para o período de 2004 a 2007.

Estes materiais são direcionados para os docentes, de modo que se apropriem dos comentários e sugestões e busquem um melhoramento no processo de ensino de Matemática. *Matemática – Cálculo mental con números racionales (Apuntes para la enseñanza)* é uma referência para professores do segundo ciclo, sendo que o material que faz referência aos números naturais se enquadra nos conteúdos de 4º e 5º anos do ensino fundamental, dentro do sistema educacional brasileiro e o material relativo aos números racionais está orientado ao 5º, 6º e 7º *grados*⁶.

Os autores abordam a importância do cálculo mental sistematizado para este ciclo, retratando a distinção entre cálculo com algoritmos e cálculo mental. Ressaltam que a ideia de se utilizar o cálculo mental é relevante, uma vez que abre um leque de possibilidades para o aluno encontrar uma resposta, utilizando diversos caminhos, algo que o algoritmo não permite. Quanto à relevância do cálculo mental envolvendo números racionais, afirmam que

⁶ A divisão de séries/anos escolares na Argentina é em 7 séries ou anos chamadas de educação *primaria* (nas séries iniciais do ensino fundamental. Utiliza-se o nome *grado*. Por exemplo, 6º grado corresponde a 6ª série) e são 5 séries chamadas de educação *secundaria* (no ensino médio. Utiliza-se o nome *año*. Por exemplo, 5º año). Somam-se 12 anos, tal como no Brasil, sendo 9 anos no ensino fundamental (séries iniciais e finais) e 3 anos no ensino médio. Disponível em: <https://espacioteca.com/2020/05/12/estructura-del-sistema-educativo-de-la-pcia-de-buenos-aires-ley-13-688/>. Acesso em 20 fev., 2023.

A ideia é estabelecer uma prática que exija estratégias diferentes com base nas propriedades das operações. Ao implementar essas estratégias em uma situação específica, torna-se possível analisar as relações envolvidas nelas (Buenos Aires, 2006, p. 12, tradução nossa).

Nesta parte do material, eles indicam o que entendem por cálculo mental, sendo este um

[...] conjunto de procedimentos que, analisando os dados por tratar, se articulam sem recorrer a um algoritmo preestabelecido, para obter resultados exatos ou aproximados (...) se caracteriza pela presença de uma diversidade de técnicas que se adaptam aos números em jogo e aos conhecimentos (ou preferências) do sujeito que as utilizam (Buenos Aires, 2006, p. 11, tradução nossa).

Em contrapartida, os autores consideram os cálculos algoritmizados como aqueles que consistem em uma série de regras aplicadas em uma ordem determinada, sempre do mesmo modo, independente dos dados, que garantem alcançar o resultado com base em um número finito de passos. Geralmente recorrem a uma única técnica para uma operação dada. Por exemplo, no cálculo de frações equivalentes por meio do algoritmo, costuma-se multiplicar ou dividir o numerador e o denominador por um mesmo número⁷. Por outro lado, eles exemplificam que, com o uso de estratégias de cálculo mental, existem outras possibilidades que exigem a reflexão do aluno no trabalho com frações equivalentes.

Dentre elas está a análise da relação existente entre o numerador e o denominador das frações. Por exemplo “[...] $\frac{8}{12}$ é uma fração tal que o numerador “entra” uma vez e meia no denominador, qualquer outra fração que repete esta relação será uma escrita equivalente do mesmo número” (Buenos Aires, 2006, p. 23, tradução nossa).

Parra, por meio da entrevista, destaca sobre a importância do cálculo mental no ensino de racionais quando se trata de equivalência, ressaltando que este terreno é muito “*Fértil para resolver por equivalências, resolva tudo por equivalências, pensando nas equivalências sem precisar ser com algoritmo*” (Parra, 2023, tradução nossa). Ela segue refletindo sobre como fica a concepção do aluno quando resolve fração sem noção de cálculo mental, ou do que ele proporciona. Segundo a autora, o aluno questiona:

[...] era que tinha que fazer o de cima pelo de baixo eu coloquei... e o de baixo pelo de cima, onde coloco? Isso não faz sentido no mundo de hoje, não faz sentido treinar os alunos. Então, sim, frações estão no projeto para chegar mais perto conceitualmente, este novo universo de racionais. O que é feito para operar deixe ir na mesma direção da construção de significado (Parra, 2023, tradução nossa).

A autora ainda ressalta que, se o objetivo da sistematização do cálculo mental não estiver bem solidificado, não agregará saber. O aluno irá entender que este tipo de cálculo

⁷ Entendemos que este processo que se utiliza da regra deve ser o fim, e não o meio de ensinar frações equivalentes. Após compreender o processo o próprio aluno percebe a relação que existe entre o numerador e o denominador.

com números naturais, no primeiro momento, dará a impressão de que não servirá para trabalhar com racionais, não funcionando para eles. Ela reitera que se deve trabalhar com “[...] *relações, não com algoritmos. Porque relações são conceituais, relações contribuem para a conceitualização*” (Parra, 2023, tradução nossa).

O manual aponta a amplitude nas discussões sobre questões que envolvem o ensino de cálculo mental nas operações com frações, decimais e porcentagens. Com relação aos algoritmos, afirmam que eles “[...] usam uma única técnica para uma determinada operação, que é sempre a mesma, independentemente dos números envolvidos” (Buenos Aires, 2006, p. 11, tradução nossa).

Os autores fazem uma análise dos algoritmos no ensino de equivalência de frações, utilizando a multiplicação ou divisão do numerador e denominador pelo número em comum, a divisão de frações por meio de algoritmos; “[...] o algoritmo para dividir um número decimal por outro número decimal; e assim por diante (Buenos Aires, 2006, p. 11, tradução nossa). Destacam que estes também são importantes, desde que o aluno tenha domínio do cálculo mental, anteriormente, para utilizá-lo no algoritmo, ambos alimentando-se de forma recíproca. “O fato de a aritmética mental se distinguir da aritmética algorítmica não significa que se oponha a ela; pelo contrário, o conhecimento acumulado sobre um tipo de cálculo e outro se alimenta mutuamente” (Buenos Aires, 2006, p. 12, tradução nossa).

Apresenta dois tópicos que envolvem o cálculo mental, “Cálculo mental com frações” e “Cálculo mental com números decimais”.

Para compreender os conceitos de Vergnaud (1996, 2019) e Brousseau (2008) presentes nas atividades, utilizaremos dois exemplos do material; um que traz equivalência de frações e outro sobre porcentagem.

Para este fim, é necessário discutirmos sobre os conceitos estudados, com intuito de refletir sobre questionamentos que surgem conforme analisamos as atividades, como por exemplo: De que forma foram elaboradas? Partindo de quais princípios? Como se dá o desenvolvimento do estudante diante dos desafios que lhes são apontados em atividades que envolvem cálculo mental com números racionais? Ou nas palavras de Vergnaud (2019), “O desenvolvimento é um processo importante; mas o que é que se desenvolve?” (p. 5). De acordo com Brousseau (2008), o estudante precisa passar pelas quatro situações de aprendizagem, para que os saberes advindos daquilo que o professor almeja sejam sistematizado e possam se concretizar. São elas: Situação de “ação, formulação, validação e institucionalização”.

Nesta perspectiva, é relevante compreendermos a definição de situação, na ótica de Brousseau (2008). Para ele, uma situação é:

[...] o modelo de interação de um sujeito com um meio específico que determina um certo conhecimento, como o recurso de que o sujeito dispõe para alcançar ou conservar, nesse meio, um estado favorável. Algumas dessas *situações* requerem a aquisição “anterior” de todos os conhecimentos e esquemas necessários, mas há outras que dão ao sujeito a possibilidade de construir, por si mesmo, um conhecimento novo em um processo de gênese artificial (p. 19-20, grifos do autor).

Cecilia Parra ressalta sobre o processo de construção de saber, explicitado pelo autor, destacando sua importância no ensino de matemática:

Guy Brousseau propunha desenvolver situações que funcionem na escola. Para que, funções pelas quais as crianças podem se apropriar do conhecimento, desenvolver respostas para os problemas que foram levantados, digamos, e ele o foi muito em nosso quadro (Parra, 2023, tradução nossa).

Neste sentido, para que a situação seja sistematizada, é essencial passar pelos quatro momentos, ou situações, relevantes para esse processo. A primeira delas, chamada de ação (Brousseau, 2008) é quando os alunos aprendem a criar estratégias, partindo de algo aleatório que eles próprios criaram, e não do que veio do educador. No contexto do cálculo mental dentro de situações com números racionais, por exemplo, percebem que “responder aleatoriamente não é a melhor estratégia”. Esta etapa é chamada de situação de ação (Brousseau, 2008, p. 23). Após perceberem que necessitam de estratégias, é fundamental que avancem para a segunda situação, chamada de formulação, onde “[...] descubrem a importância de discutir e definir estratégias” (p. 24). Nesta, percebem o valor contido no diálogo e na discussão sobre o que podem desenvolver para vencer os desafios. Esta é denominada situação de formulação (Brousseau, 2008). A terceira situação para solidificar uma situação se firma na demonstração da verdade em uma determinada circunstância, denominada situação de validação (Brousseau, 2008). A quarta situação é a institucionalização, momento em que o professor verifica tudo o que foi sistematizado nas três fases anteriores, classificando o que pode ser reutilizado, revendo o que foi feito (Brousseau, 2008).

Partindo desta concepção, Parra aponta para alguns questionamentos acerca da importância de se obter os conhecimentos de cálculo mental, neste momento, com base em Berticelli e Zancan (2021). Nos anos de 1960 e 1970, por exemplo, utilizava-se o cálculo mental para fazer o troco em uma compra, ou para realizar um negócio, venda, compra, enfim, a utilidade do cálculo mental era mais visada (Berticelli, 2017). Mas nas conjunturas atuais, de acordo com Cecilia,

Qual é o significado? Qual é o objetivo de aprender cálculo? Hoje, 2023, tem o CHAT GPT⁸ [...], qual é o sentido de que tipo de cálculo, para que? Quando fazemos essas perguntas, e é no âmbito dessas questões que demos força ao cálculo mental. Mais por razões educacionais do que por razões práticas (Parra, 2023, tradução nossa).

À medida que o aluno vai desenvolvendo maneiras de obter os resultados, utilizando estratégias de cálculo mental, percebe que, por meio do processo já obtido para chegar à resposta, consegue enriquecer as técnicas de alcançar o objetivo, diversificando as estratégias de cálculo, realizando de uma forma diferente do que já fez (Brousseau, 2008). Aqui cabe o conceito introduzido por Gérard Vergnaud, chamado de “teorema-em-ato”, citado por Brousseau (2008), em seu texto. Em outras palavras, quando se trata de um jogo, por exemplo, “são necessárias várias partidas, até que cada aluno seja capaz de formular uma tática, justificá-la e, finalmente, tirar conclusões” (p. 25).

Ao exposto acima, Brousseau (2008) chama de “situação de ação”, onde, segundo o autor:

Em geral, adota-se uma estratégia descartando, intuitiva ou racionalmente, uma anterior. Submetida à experiência, a nova estratégia pode ser aceita ou não, conforme a apreciação que o aluno faça de sua eficácia. A sucessão de situações de ação constitui o processo pelo qual o aluno vai aprender um método de resolução de um problema (p. 25).

Parra trata deste tipo de situação, chamada de “ação” colocando a diferença desta para as outras situações, afirmando que “[...] agir resolvendo um problema não é o mesmo que poder escrever, explicar ou ser capaz de escrever um cálculo que recupere e identifique os dados que foram processados [...]” (Parra, 2023, tradução nossa).

Entendemos que o processo de amadurecimento é fundamental para a solidificação das estratégias, visto que, na visão de Vergnaud (1996), este permite que o aluno adquira mais conhecimento, partindo daquilo que ele já consegue compreender.

Tudo isso ocorre no “meio”, que é construído pelo conjunto de estratégias, que envolvem a comunicação entre os participantes, por exemplo: um aluno, para chegar ao resultado 12, propõe a soma $4+4+4$, enquanto outro estudante, partindo da soma, consegue formular uma multiplicação, apresentando 3×4 . Neste ínterim, outro já aciona a memória de dobros (Berticelli e Zancan, 2023), trazendo $6+6$. Comunicando entre si, são capazes de encontrar mais formas de se chegar ao número 12. Parra (2023) afirma, com base neste

⁸ O chat GPT foi criado pela OpenAI, uma empresa de pesquisa e implantação de inteligência artificial, cuja missão é garantir que a inteligência artificial geral beneficie toda a humanidade. O chat OpenAi é um sistema de conversação baseado em inteligência artificial (IA) que utiliza a tecnologia do modelo GPT (Generative Pre-trained Transformer, ou transformador gerador pré-treinado), que gera respostas em conversas textuais com usuários. GPT é treinado em uma grande quantidade de texto de diversas fontes, como livros, artigos, páginas da web, etc. Mais informações disponíveis em: <https://openai.com/about>. Acesso em 15 de julho, 2023.

conceito, que formular é “[...] *ser capaz de explicar um procedimento que é usado, resolver algo, isso é formular, e isso é outra coisa*” (tradução nossa).

Na formulação, a comunicação é fundamental para fortalecer o processo de aprendizagem. De acordo com Brousseau (2008, p. 26), “[...] a mera formulação não tinha influência alguma sobre os conhecimentos e as convicções dos alunos, mas impedia o desaparecimento dos teoremas-em-ação” (p. 26). Isto significa que, sem essa etapa, o processo não seria assertivo, uma vez que, por meio desta, o aluno conseguirá chegar a uma teoria sobre a melhor maneira de encontrar um resultado que seja satisfatório, e desta forma, passar para a próxima etapa, chamada por Brousseau (2008) de “validação”.

A situação de validação é o momento em que o estudante, por meio de uma teoria, tenta legitimar suas estratégias, utilizadas como forma de obtenção dos resultados. Segundo Brousseau (2008), neste tipo de situação, “os alunos organizam enunciados em demonstrações, constroem teorias [...]” (p. 27). Os estudantes afirmam seus resultados, suas teorias, nesta etapa e em conformidade com o autor, na qual as mesmas são “[...] elucidadas, construídas, testadas, debatidas e acordadas. O aluno não só deve comunicar uma informação, como também precisa afirmar que o que diz é verdadeiro dentro de um sistema determinado” (p. 27).

Parra corrobora com o autor, quando diz que validar, é “[...] *achar duvidoso o que foi feito, se está correto ou não, se funciona ou não, se sustenta, é outro tipo de prática*” (Parra, 2023, tradução nossa).

Após estas três fases, complexas, porém, muito relevantes para a concretização da aprendizagem matemática, Brousseau trata da “institucionalização das situações”. Segundo o autor, enquanto fazia experiências em determinada escola francesa, percebeu que “[...] os professores, depois de certo tempo, precisavam ordenar um espaço. Não queriam passar de uma lição à seguinte, queriam parar para ‘rever’ o que já haviam feito” (Brousseau, 2008, p. 31).

Nesta lógica, o professor, em experiências na sala de aula, necessita verificar, após certo período de sistematização de determinado conteúdo, qual nível de conhecimento seus alunos conseguiram alcançar acerca do que foi trabalhado. Brousseau denomina como “institucionalização das situações”, que junto à “argumentação”, confere o saber, mostrando ser necessário considerar as fases discutidas anteriormente. Parra (2023) destaca sobre esta importante etapa do processo aqui discutido, que não se pode deixar de atentar para nenhuma delas.

[...] a teoria das situações [...] distingue entre ação, formulação, validação e depois colocam também institucionalizações para dizer o quanto o conhecimento já é considerado e nomeado, inicializado na sala de aula, na escola, na sociedade, enfim [...] (Parra, 2023, tradução nossa).

Percebemos que são vários os pontos a serem considerados para que uma situação seja conceituada como tal. Podemos elucidar este excerto com o que Vergnaud chama de um conjunto de conceitos, situações, problemas, relações, procedimentos de pensamento, ligados uns nos outros e entre si, no decorrer do processo de aquisição de conhecimento (Vergnaud, 1996).

No que tange ao cálculo mental com números racionais, a autora destaca que “*As propriedades de sistemas de numeração, de operações...já respondemos isso para cálculo mental. Depois, a questão se renova para os números racionais, especialmente para as frações*” (Parra, 2023, tradução nossa).

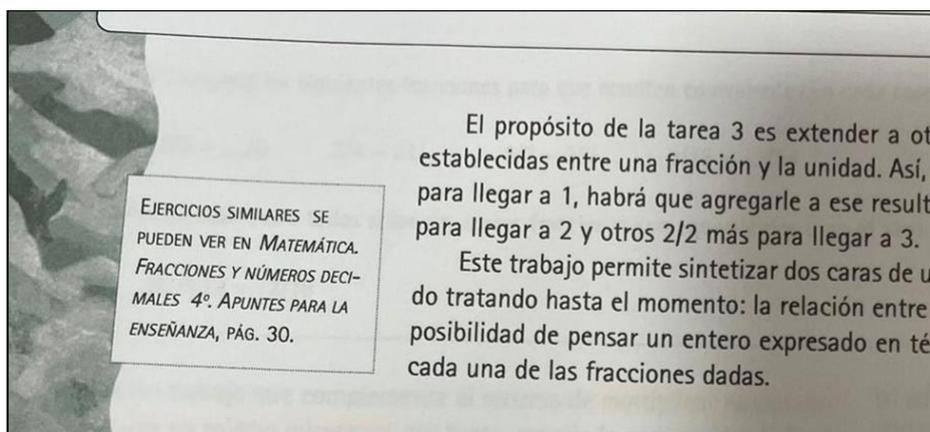
Em relação ao professor, Parra (2023) ressalta que é importante os professores terem experiências diversas de cálculo mental com os alunos, que possam ver e analisar as aulas, verificar como o trabalho poderia ser feito, analisando as práticas, “*[...] o que é muito importante porque senão, como você aprende a administrar a aula quando o que está sendo discutido é uma estratégia de cálculo, não é?*” (Parra, 2023, tradução nossa).

Neste sentido, Parra afirma que, partindo dos conhecimentos de cálculo mental adquiridos na base, com números naturais, irá alicerçar as operações, que posteriormente, “*[...] não podem ser resolvidas no campo natural[...]*”, mas fazem sentido no trabalho com frações.

Porque no mundo dos racionais, seremos capazes de dar muito sentido do significado dos racionais do lado das frações, do trabalho das frações, da medição, dos problemas que não podem ser resolvidos. [...] operar com frações para que no mundo de hoje? Quando operar com frações [...] que não seja a simples questão de me sobrar $\frac{3}{4}$ kg de doce sem uso e preciso de $\frac{1}{2}$? [...] há um terreno, ele se deixa absolutamente ser tratado pelo lado do cálculo mental sem a necessidade de algoritmos (Parra, 2023, tradução nossa).

Entendemos que nenhuma situação pode ser compreendida sem requerer um mínimo de conhecimento prévio. Algumas requerem mais, outras menos. Desta forma, apresentamos uma situação, a partir da definição de Brousseau (2008):

Figura 2: Situação envolvendo frações equivalentes



Fonte: Buenos Aires, 2006, p. 22

O material argentino apresenta uma explicação do raciocínio que se espera ao trabalhar com comparação de frações:

Por exemplo, como $\frac{1}{8}$ é uma fração, você precisa de 8 dessa quantidade para ter um número inteiro, para ter $\frac{1}{2}$ faltam 4 de $\frac{1}{8}$, quer dizer, $\frac{4}{8}$. Por tanto, $\frac{4}{8}$ e $\frac{1}{2}$ são equivalentes; ou seja $\frac{7}{4}$ e $\frac{14}{8}$ são equivalentes porque $\frac{1}{8}$ é a metade e $\frac{1}{4}$, então $\frac{1}{4}$ equivale a $\frac{2}{8}$, assim $\frac{7}{4}$ equivale a $\frac{14}{8}$, etc. (Buenos Aires, 2006, p. 22, tradução nossa).

Partindo do raciocínio apresentado na figura 2, o aluno analisa a relação entre o numerador e o denominador e, a partir dessa relação constrói uma rede de frações equivalentes com significado, ou seja, constrói um novo conhecimento, conforme observamos em Brousseau (2008).

Entendemos que, para resolver uma atividade envolvendo frações equivalentes como proposto na situação da Figura 2 é necessário, previamente, trabalhar com conhecimentos que permitam essa construção⁹. Mostrar essa relação entre numerador e denominador, levar os alunos a construírem as respostas de forma gradativa, respondendo positivamente ao meio onde está inserido. Este meio se trata da sala de aula, do ambiente que envolve a situação na qual o aluno está envolvido, as ações do professor, até a forma como o aluno responde às situações às quais está sendo exposto.

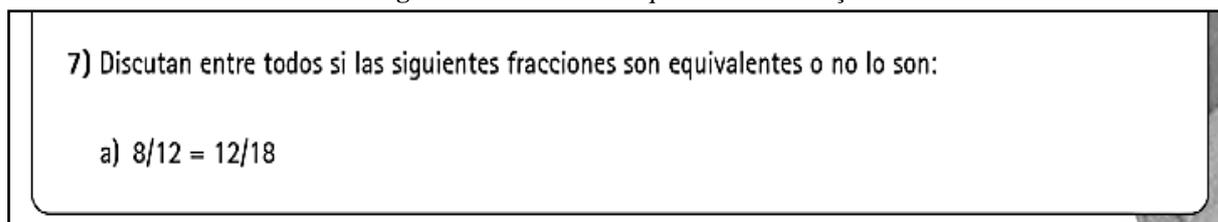
Para que o aluno se sinta parte do meio onde está inserido, é essencial que se encaixe nas situações propostas, em uma posição de aceitação, não de forma passiva, mas aceitar os desafios propostos pelo meio organizado pelo professor. Com relação a essa aceitação,

⁹ As páginas 22 e 23 do manual (Buenos Aires, 2006) apresentam exemplos de atividades que trazem previamente o conhecimento que pode ser adquirido por meio de construções, mostrando aos estudantes que há a possibilidade de construir diversos caminhos para encontrar a equivalência entre frações.

Vergnaud (2009, p. 13) ressalta que “conhecimento é adaptação”. O aluno necessita desta adaptação para dar oportunidade a si mesmo de adquirir e solidificar o conhecimento.

O autor questiona: “A que nos adaptamos e quem se adapta?”. De acordo com Vergnaud (2009), é “[...] por meio de uma evolução da organização de sua atividade que ele (aluno) se adapta” (p. 13).

Figura 3: Atividade de equivalência de frações



Fonte: Buenos Aires, 2006, p. 23

Na figura 3, o manual apresenta a complementação do recurso de multiplicar o numerador e denominador por um mesmo número, ampliando o conceito de frações equivalentes. Segundo os autores do manual, da forma como estão escritas, se o estudante conhece apenas a regra usada até o momento, a impressão que se tem é que “[...] não é possível estabelecer a equivalência entre $12/08$ e $18/12$, porque não há nenhum número natural que, multiplicado por 12, dê 18 (não há um número que, multiplicado por 8, dê 12)”. Todavia, se houver a simplificação da fração $8/12$, vai se estabelecer que “[...] é equivalente a $2/3$, que, por sua vez, é equivalente a $12/18$ (Buenos Aires, 2006, p. 23, tradução nossa).

A fase nomeada por Brousseau como institucionalização acontece quando o professor promove um debate com os resultados encontrados pelos alunos, o grau de veracidade, as formas variadas de se encontrar um mesmo resultado e, finalmente, uma explanação dos conceitos que envolvem a situação, institucionalizando o que foi produzido e aprendido até o momento (Brousseau, 2008). Podemos observar este excerto da teoria de Brousseau (2008) no que as autoras Humphreys e Parker (2019) destacam como conversas numéricas. Quando o professor, de acordo com as autoras, promove um momento de troca de estratégias, com o aluno fazendo mentalmente o processo para chegar à resposta e compartilhando como o fez. Percebemos que é muito mais proveitoso um exercício comentado do que uma lista deles que traz como objetivo repetir conhecimentos.

Por exemplo, ao trabalhar com subtração com números decimais, temos dois caminhos. No primeiro o professor dá uma lista de atividades com vários exercícios, conforme a figura abaixo, em que a solução se dará por meio do algoritmo:

Quadro 1: Subtração com números decimais

Resolva as subtrações:				
$\begin{array}{r} 11 \\ - 1,9 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 15 \\ - 0,7 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 18,8 \\ - 1,9 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 24,7 \\ - 6,5 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 19,9 \\ - 11,4 \\ \hline \end{array}$

Fonte: Elaborado pelas autoras

No segundo, é sugerido um exemplo onde os alunos são convidados a resolver a mesma operação de formas diferentes, por meio de estratégias de cálculo mental:

Quadro 2: Subtração com números decimais

Resolva a $11 - 1,9$ por métodos diferentes:				
$11 - 1,9 =$	$11 - 1,9 =$	$11 - 1,9 =$	$11 - 1,9 =$	$11 - 1,9 =$
$11 - 1,9 = 0,1 + 9$ Calculou o que faltava para chegar no 2. Depois o que faltava para chegar no 11. Usou a ideia de completar ¹⁰ .	$11 - 1,9 = 11 - 2 + 0,1$ Arredondou o 1,9 para 2 e depois somou 0,1 que é a diferença entre 1,9 e 2.	$11 - 1,9 = 11 - 1 - 0,9$ Usou a decomposição do 1,9 em $1 + 0,9$. Subtraíu o inteiro e depois o decimal.	$11 - 1,9 = 11,1 - 2 = 9,1$ Usou o balanceamento ¹¹ , ou seja, somou 0,1 nos dois números e depois subtraíu.	$11 - 1,9 = 10 - 1,9 = 8,1$ $8,1 + 1 = 9,1$ Decompôs o 11 em $10 + 1$, utilizando a dezena mais próxima.

Fonte: Elaborado pelas autoras

Em que situação estamos trabalhando de acordo com os pressupostos de Brousseau? Na primeira (quadro 1), memorizamos o algoritmo e repetimos esse conhecimento em todos os exercícios. Na segunda, oferecemos apenas uma situação e solicitamos diversas respostas diferentes, em que cada aluno responde de acordo com seus conhecimentos prévios.

A pergunta acima pode ser respondida quando olharmos para as atividades do quadro 2, exposto anteriormente. Certamente, ao abordar a subtração com decimais, envolvendo a Situação 2 (quadro 2), estaríamos promovendo uma aula muito mais rica, onde a criatividade seria valorizada, proporcionando ao aluno uma relação muito melhor com a Matemática, por meio do cálculo mental.

Ainda dentro da situação de ação, Brousseau (2008) ressalta que “A aprendizagem é o processo em que os conhecimentos são modificados”. O autor destaca que as representações que fazemos dos conhecimentos podem acontecer por meio de exposições estratégicas, “[...] que o indivíduo parece seguir ou pelas declarações daquilo que parece levar em consideração [...]” (p. 28). Entendemos que, nesta fase, o aluno toma suas primeiras iniciativas, entra em

¹⁰ Berticelli e Zancan, embasadas por Backheuser (1946), destacam a estratégia que transforma a subtração em adição para chegar à resposta, chamado de método austríaco, considerado como uma estratégia para a subtração (Berticelli e Zancan, 2023, no prelo).

¹¹ De acordo com Berticelli e Zancan (2023, no prelo), com base em Thompson (1999a), o balanceamento é a retirada de uma quantidade ou parcela para acrescentar na outra, “[...] como pensar que $9 + 7 = 10 + 6$ ” (Berticelli e Zancan, 2023, p. 4).

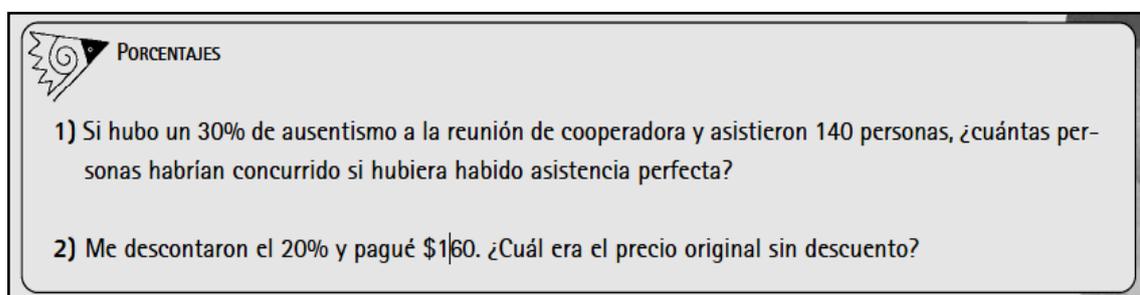
contato direto com a situação e com o que ela provoca, construindo seus conhecimentos de forma instrumental.

Na situação de formulação, de acordo com Brousseau (2008), seguida do amadurecimento vindo da ação, há o envolvimento do *meio* onde o estudante está inserido. O conceito de *meio*, nesta condição, se refere ao conjunto de situações que envolvem todo o processo de construção das estratégias realizadas até o momento.

Em situações que envolvem porcentagem, os autores do manual pedagógico afirmam que o conceito de porcentagem adquire importância *partindo de seu uso* social propagado de forma ampla. Isto requer um conhecimento básico, onde o aluno necessita saber, depois de conhecer previamente o conceito, partindo do que aprendeu sobre frações e decimais, que 25% é $\frac{1}{4}$ de determinada quantidade, assim como 50% é $\frac{1}{2}$ e 10% é a décima parte de determinada quantidade (Buenos Aires, 2006).

O aluno, partindo do que já domina sobre cálculo mental envolvendo frações e decimais, poderá apresentar sua teoria acerca de possíveis resultados, por exemplo, para as situações abaixo.

Figura 4: Situações problemas envolvendo cálculo mental com porcentagem.



Fonte: Buenos Aires, 2006, p. 69.

A figura 4 apresenta duas situações em que o aluno tentará, por meio do que aprendeu previamente sobre conceitos que envolvem porcentagem, e em discussão com os colegas, validar as estratégias utilizadas para obter uma possível resposta correta, o que associamos ao conceito de situação definido por Brousseau (2008).

Percebemos que o manual possui as quatro etapas, de acordo com Brousseau (2008) articuladas em todo seu conteúdo, ação, formulação, validação e institucionalização. Compreendemos que se acontecem essas quatro etapas, o conhecimento está sendo construído historicamente.

A experiência adquirida por meio da interpretação histórica que fizemos até o momento, da análise das fontes, da entrevista e das possibilidades que esta nos proporcionou, mostra que o conhecimento apreendido pelo educador necessita ser sistematizado, sempre que necessário, este buscando inovar suas maneiras de ensinar, embasado por aprofundamentos científicos que lhe tragam solidez, em se tratando de conhecimentos matemáticos, dentre eles os conhecimentos de cálculo mental, que irão acompanhar o aluno pela vida, tanto no meio escolar, acadêmico, quando no quesito social e familiar.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O processo que envolve o saber propriamente dito e solidificado, possibilitando o acesso a novas estratégias, mensagens e teorias, é complexo e necessita de todas as suas etapas consolidadas: a “ação”, momento em que o aluno aprende a criar estratégias, partindo do que eles próprios criaram; a “formulação”, situação em que os estudantes descobrem que é importante discutir sobre as estratégias e defini-las; a “validação”, momento em que as estratégias são testadas e solidificadas.

A última etapa é a institucionalização, em que entra a atuação direta do professor, validando o que os alunos construíram, elencando o que poderá ser reutilizado na construção de novas estratégias, em outras situações de aquisição de conhecimento. Essa consolidação é relevante para que, em situações futuras não haja rupturas no que concerne, dentro do contexto aqui exposto, nos conhecimentos matemáticos, e conseqüentemente, na vida social do indivíduo.

Percebemos que o manual pedagógico, elaborado por uma equipe responsável pela parte de matemática, do Governo da Cidade de Buenos Aires, cuja diretora de currículo foi Cecilia Parra, é permeado de conhecimentos (Berticelli e Zancan, 2021) e estratégias de cálculo mental no ensino de números racionais, algo diferente e novo no Brasil¹². Isto se revela a partir das orientações direcionadas ao professor, presentes no manual, que acompanham os exemplos das atividades, conforme exposto neste estudo. Parra é considerada *expert*, visto que atendeu uma demanda do Estado para a melhoria da qualidade do ensino da Cidade de Buenos Aires, consolidando sua *expertise* por meio da sistematização das atividades presentes no manual pedagógico.

¹² Informações e dados apresentados na pesquisa de mestrado citada anteriormente.

REFERÊNCIAS

- Berticelli, D. D. G., Zancan, S. *Conhecimentos e atividades para potencializar o cálculo mental*. In: Acta Scientiarum Education, 2023 (no prelo).
- Berticelli, D. D., & Zancan, S. (2023). *ARITMÉTICA COM CÁLCULO MENTAL: “Como você fez?”*. Revista De História Da Educação Matemática, 9, 1–15. Disponível em: <https://histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/551>. Acesso em 14 nov. 2023.
- Berticelli, D. G. D. (2017) *Cálculo mental no ensino primário (1950-1970) – um olhar particular para o Paraná*. 2017. 157f. |(Tese de Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2017.
- Berticelli, D. G. D.; Zancan, S. *CalMe Pro — Cálculo mental para professores*. Revista de Ensino de Ciências e Matemática, [S. l.], v. 12, n. 4, p. 1–21, 2021. DOI: 10.26843/rencima.v12n4a08. Disponível em: <https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/2982> . Acesso em: 20 mar. 2023.
- Bertini, L.F.; Morais, R.S.; Valente, W. R. (2017). *A Matemática a ensinar e a Matemática para ensinar: novos estudos sobre a formação de professores*. São Paulo: Editora Livraria da Física.
- Brousseau, G. *Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino*. São Paulo: Ática, 2008.
- Buenos Aires. *Diseño Curricular para la Escuela Primaria*. Segundo ciclo. Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires, 2004.
- Buenos Aires. Ministério da Educação de la Ciudad de Buenos Aires. Dirección de Curricula y Enseñanza. *Matemática: cálculo mental con números racionales*. 1 ed. Buenos Aires, 2006.
- Chartier, R. *Os desafios da escrita*. Trad: MORETTO, F. M. L. São Paulo, UNESP, 2002.
- Chartier, R. Por uma sociologia histórica das práticas culturais. In: *A História Cultural*. Lisboa: DIFEL, 1990.
- Cosme, R. E. C. (2024). *Estratégias de cálculo mental com números racionais: um olhar sobre a expertise profissional de Cecília Parra*. (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências, Educação Matemática e Tecnologias Educativas, Universidade Federal do Paraná, Palotina, 2024.
- Hofstetter, R.; Schneuwly, B.; Freymond, M. de. Penetrar na verdade da escola para ter elementos concretos de sua avaliação – A irresistível institucionalização do *expert* em educação (século XIX e XX). In: Hofstetter, R.; Valente, W. R. (org.). *Saberes em (trans) formação: tema central a formação de professores*. 1. ed. São Paulo: Editora da Física, 2017. p. 55-112.
- Humphreys, C. & Parker, R. (2019) *Conversas Numéricas: estratégias de cálculo mental para uma compreensão profunda da matemática*. Tradução: Sandra Maria Mallmann da Rosa. Porto Alegre: Penso.
- Julia, D. *A cultura escolar como objeto histórico*. In: Revista Brasileira de História da Educação. Campinas: Editora Autores Associados, nº 1, Janeiro/Junho, 2001. p. 9-43.

- Morais, R. dos S.; Valente, W. R. *Os Experts e o saber Profissional do Professor que Ensina Matemática*. CIÊNCIA & EDUCAÇÃO, v. 26, 2020. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/ciedu/a/PGtgDXQBsQk88TVyVmGGPqh/?lang=pt> Acesso em: 20 de junho, 2023.
- Morais, R. S., Bertini, L. F., Valente, W. R. *A matemática do ensino de frações: do século XIX à BNCC*. 1 ed. – São Paulo, Livraria da Física, 2021.
- Parra, C. Cálculo mental na escola primária. In: Parra, C., Saiz, S. (orgs) *Didática da Matemática: reflexões Psicopedagógicas*. Porto Alegre: Artmed, 1996, reimpressão em 2009.
- Parra, C. *Diálogo com Cecília Parra*. Entrevista cedida a Danilene Gullich Donin Berticelli e Ruth Edite Cosme. Google Meet, maio/2023.
- Valente, W. R., & Bertini, L. F. (Eds.). (2022). *A Matemática do Ensino: por uma história do saber profissional 1870 -1960*. São Paulo: Universidade Federal de São Paulo, Coleção Educação e Saúde, Vol. 1.
- Vergnaud, G. *A trama dos campos conceituais na construção dos conhecimentos*. Revista do GEMPA, Porto Alegre, Nº 4, 1996.
- Vergnaud, G. *Quais questões a Teoria dos Campos Conceituais busca responder?* Caminhos Da Educação Matemática em Revista (Online). V. 9, n. 1, 2019. Disponível em: https://periodicos.ifs.edu.br/periodicos/caminhos_da_educacao_matematica/article/view/296. Acesso em 15 de outubro, 2023.