Revista de História da Educação Matemática
HISTEMAT

ISSN: 2447-6447 **Submetido:** 15/07/2024 **Aprovado**: 28/12/2024

https://doi.org/10.62246/HISTEMAT.2447-6447.2024.10.645

Diálogo entre um Problema Grego Clássico e os Números Transcendentes: o caso da quadratura do círculo

Dialogue entre un Problème Grec Classique et les Nombres Transcendants: le cas de la quadrature du cercle

Daniel Felipe Neves Martins[1]
Colégio Pedro II
daniel.martins.1@cp2.edu.br
Orcid: https://orcid.org/0000-0002-6131-237X

Anderson Reis de Vargas[2]
Colégio Pedro II
anderson.vargas.1@cp2.edu.br
Orcid: https://orcid.org/0000-0003-1309-8994

[1] Doutor em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia, pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Professor do Colégio Pedro II (CPII) / PMAT-UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil. Endereço para correspondência: Campo de São Cristóvão, 177, São Cristóvão, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, CEP: 20921-903. E-mail: daniel.martins.1@cp2.edu.br.
[2] Doutor em Matemática, pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio). Professor do Colégio Pedro II (CPII), Rio de Janeiro, RJ, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Marechal Floriano, 80, Centro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, CEP: 20080-001. E-mail: anderson.vargas.1@cp2.edu.br.

RESUMO

O presente artigo tem como principal intento mostrar a articulação entre um dos conhecidos problemas gregos clássicos de geometria, a quadratura do círculo, e a impossibilidade de construir alguns números reais com uso de régua não graduada e compasso. Estas linhas tomam por base as reflexões contidas no texto original de Felix Klein, Vörtrage Über Ausgewahlte Fragen Der Elementargeometrie Ausgearbeitet Von F. Tärget, de 1895, combinadas com os estudos de matemáticos que provaram a não construtibilidade de π, pelo fato deste número ser transcendente. Este último resultado é um possível caminho justificado pela álgebra abstrata moderna que resolve o questionamento proposto pelo problema grego.
Palavras-chave: Quadratura do círculo. Construção com régua e compasso. Números irracionais. Números transcendentes

ABSTRACT/RESUMEN/RÉSUMÉ

L'objectif principal de cet article est de montrer le lien entre l'un des problèmes de géométrie grecque classique bien connu, la quadrature du cercle, et l'impossibilité de construire quelques nombres réels à l'aide d'une règle non gradué et d'un compas. Ces lignes sont basées sur les réflexions contenues dans le texte original de Felix Klein, Vörtrage Über Ausgewahlte Fragen Der Elementargeometrie Ausgearbeitet Von F. Tärget, de 1895, combinées aux études de mathématiciens qui ont prouvé la non constructibilité de π, car ce nombre est transcendant. Ce dernier résultat est une voie possible justifiée par l'algèbre abstraite moderne qui résout la question proposée par le problème grec.
Mots-clés: Quadrature du cercle. Construction à la règle et au compas. Nombres irrationnels. Nombres transcendentes.

INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, o uso da História da Matemática no cotidiano da educação básica vem se tornando mais frequente e configura uma boa prática entre professores de Matemática que compreendem que é preciso descaracterizar o ensino da Matemática como frio e mecanizado, como nos alerta Chaquiam (2023), a fim de mostrar que a Matemática pode ser tratada de forma mais contextualizada e integrada a outras áreas, assim como mais dinâmica, criativa e, sobretudo, mais humanizada.

Muitos livros didáticos que fazem parte do Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) já trazem seções nas quais a História da Matemática aparece como um caminho para o professor introduzir conteúdos matemáticos, ou auxiliar na compreensão de uma ideia ou conteúdo de maneira menos formal em termos matemáticos. Estas seções configuram o que Fossa (2012) chamou de “uso ponderativo” da História da Matemática. Outras formas aparentes no livro didático são de “uso ornamental” (Fossa, 2012), ou seja, são inserções históricas que não visam diretamente o conteúdo, entretanto, trazem curiosidades que permitem excelentes discussões em classe, aumentando assim o capital cultural e matemático dos alunos e dos professores.

Chaquiam (2023) afirma que a inserção de História da Matemática como ferramenta didática na educação básica possibilita a compreensão das origens das ideias advindas de determinada cultura. Além disso, permite perceber que teorias que atualmente apresentam-se aparentemente acabadas e bem estruturadas do ponto de vista matemático, são, na verdade, resultados de grandes esforços entre distintos colaboradores. Tais estudos ainda permitem diversos questionamentos, principalmente sobre a gênese do conhecimento e correlações entre distintos campos dos saberes.

Ademais, estudar a evolução de uma ideia ou de um conceito matemático a partir da História da Matemática, desmistifica a falsa concepção de linearidade na construção do conhecimento matemático. Um bom exemplo para ilustrar esta afirmativa é reconhecer os inúmeros desdobramentos consequentes das ideias iniciais do Cálculo Infinitesimal desenvolvidas por Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1716). O conceito de infinitésimo, por exemplo, alimenta os mais diversos ramos da matemática, principalmente aqueles cujas preocupações primordiais baseiam-se em saber como uma ‘entidade matemática’ se comporta localmente. A possibilidade de compreender que a ordem do aparecimento das ideias que compõem a teoria é bem diferente das ideias apresentadas nos livros-texto de cálculo, com a famosa ordem “limites, derivadas e integrais”, posiciona criticamente alunos e professores, que percebem o caráter humano da matemática e que esta é resultado de inúmeras contribuições sociais. Cabe ressaltar ainda que os infinitesimais ganham forma historicamente a partir da discussão sobre a existência dos indivisíveis, tão cara às questões filosófico-religiosas dos séculos XVI e XVII, e que contradizia a tradição aristotélica das universidades europeias.

A História da Matemática ajuda a compreender que processos de formalização da própria Matemática, assim como a tentativa de generalização de resultados obtidos sob certas condições, não se originam exclusivamente da natureza lógica da disciplina, mas de uma possível inferência de outros discursos presentes na constituição e no desenvolvimento do discurso matemático, como apontam os estudos de Miguel e Brito (1996).

Buscar correlações entre diferentes temáticas e autores dentro da própria Matemática também é um dos ofícios dos historiadores da matemática. Ler, interpretar sem anacronismos, traduzir, divulgar, classificar, buscar relações de similitudes ou oposição de ideias, garimpar documentos compreendidos como fontes primárias e interpretar documentos historicamente referendados, são algumas das muitas tarefas desenvolvidas por historiadores da matemática. Desta forma, procuramos com este artigo, não somente caracterizar um período ou um resultado matemático relevante que possa ser levado às salas de aula (ou a uma roda de conversa entre professores que ensinam matemática), mas exemplificar que, conteúdos aparentemente díspares, podem caminhar lado a lado, complementando-se.

A partir das reflexões trazidas por Felix Klein (1849-1925) na obra intitulada *Vörtrage über Ausgewahte Fragen der Elementargeometrie Ausgearbeitet von F. Tägert*[3] de 1895 (Beman & Smith, 1897), foi possível evidenciar, a partir de elementos da História, como a álgebra moderna dialoga com um problema clássico da geometria grega da Antiguidade. Este é o caso de diversos estudos envolvendo os números transcendentes e os três clássicos problemas geométricos gregos, a saber, a quadratura do círculo, a trissecção do ângulo e a duplicação do cubo, dentre os quais nosso interesse aqui recai apenas no primeiro. É sobre esta integração de ideias que este artigo se propõe apresentar.

Acreditamos que trazer a história da matemática para a sala de aula, combinada com diferentes recursos didáticos e metodológicos, pode contribuir sobremaneira para um melhor ensino e uma aprendizagem mais fluida da disciplina. Além disso, estabelecer conexões entre diferentes temas permite ao professor de Matemática entender a Matemática como uma

[3] *Aulas sobre questões selecionadas em geometria elementar preparadas por F. Tägert* (Tradução nossa). É uma publicação comemorativa da terceira reunião da Associação de Matemáticos de Göttingen, Alemanha, para a promoção da Educação Matemática e das Ciências Naturais, ocorrida no pentecostes de 1895. Texto original disponível em https://quod.lib.umich.edu/u/umhistmath/ACV2370.0001.001?rgn=main;view=fulltext

disciplina integrada com outras áreas do conhecimento, de grande potencial criativo, colaborativa e mais humanizada.

1. OS TRÊS PROBLEMAS CLÁSSICOS NA GEOMETRIA ANTIGA GREGA

Após a Batalha de Salamina (480 AEC[4]), na guerra contra os Persas, a cidade de Atenas tornou-se um importante centro comercial e cultural do mundo antigo. Péricles (495-429 AEC) empregou vasta quantia para remodelar a cidade e levar a certa camada da população acesso à cultura grega. Cabe ressaltar que as mudanças sociais da época expandiram largamente a classe social constituída por homens livres, os quais passaram a demandar a tão desejada formação do Homem grego, o que compreendia a educação do corpo e da mente. Enquanto a primeira estava restrita às escolas de ginástica, a segunda ficava sob a responsabilidade de tutores de diferentes áreas, como gramática, retórica e dialética, arte, música, matemática e astronomia (Jaeger, 2013).

Estes tutores ficaram conhecidos por *Sophistis* (ou homens espertos), e na contramão dos pitagóricos, não formavam grupos de estudos, não se organizavam em classes fechadas e nem defendiam uma doutrina ou filosofia específicas. Os Sofistas ensinavam livremente as mais diferentes áreas e, embora a matemática não fosse um campo de grande interesse, muitos deles deixaram contribuições de valor em geometria, em especial na geometria do círculo, negligenciada pela escola pitagórica. Entre os problemas matemáticos de interesse figuram os supracitados clássicos problemas gregos de geometria, anteriores a Euclides, e que além dos Sofistas, acendiam o interesse grego pela geometria em distintos grupos sociais.

[4] Antes da Era Comum.

Figura 1 – A Grécia Antiga

Fonte: https://br.pinterest.com/pin/310748443041382619/ Acesso: 04/10/2023.

Alguns destes problemas de geometria fascinaram a mente humana por terem sido apresentados através da mitologia, como o caso do problema deliano (ou problema da duplicação do cubo). Tal problema envolveu o imaginário social grego, pois foi apresentado a partir da lenda da peste ateniense. Uma peste que assolava Atenas, por volta de 427 AEC, e que só teria fim, caso o problema da duplicação do cubo fosse resolvido. O problema, supostamente proposto pelo Oráculo de Delfos, consistia em descobrir o quanto se deve aumentar as arestas de um cubo, a fim de que o volume do novo cubo seja o dobro do volume do cubo inicial. Da mesma maneira que uma série de outros problemas, este também era insolúvel com o uso das ferramentas aceitas pelos geômetras da época, régua não graduada e compasso, porém, inspirou uma série de contribuições no campo da geometria e das construções geométricas, como pode ser visto em Roque (2012) ou em Vitrac (2005).

Outros problemas chamaram a atenção por conta de suas técnicas de resolução. Tais soluções, pura e exclusivamente por meio de régua não graduada e compasso, podem ser entendidas como de vanguarda, como o problema da trissecção do ângulo. Dos três problemas clássicos, Ferreira (2010) afirma que este é o problema que mais apresenta soluções falsas e que não tem uma história que possa ser considerada fidedigna. Além disso, afirmar que não é possível assegurar que todo e qualquer ângulo não pode ser trissectado por meio de régua e compasso, tomando o universo mais geral possível dos ângulos, não é uma verdade. De acordo com Roque (2012), Aristóteles (380-322 AEC) chegou afirmar que Hipócrates (460-377 AEC) apresentou uma prova falsa do problema em seu tratado sobre as lúnulas e que uma das tarefas mais difíceis para os matemáticos é encontrar possíveis erros em demonstrações logicamente bem construídas.

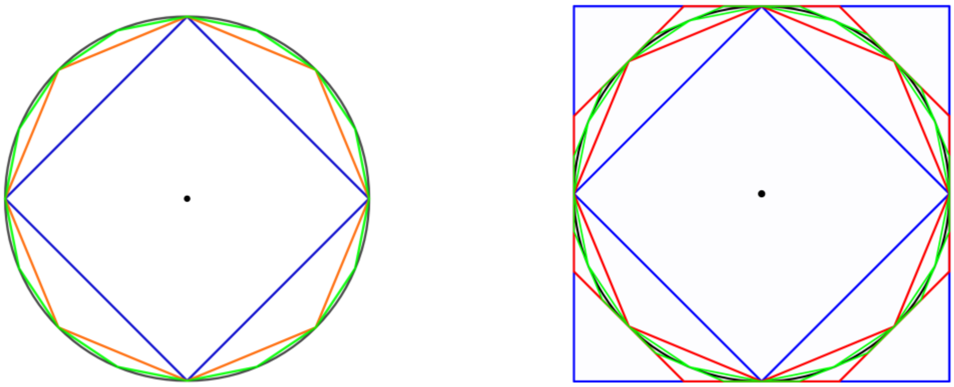
Ferreira (2010) nos mostra que o problema da quadratura do círculo já estava presente em cinco problemas (41, 42, 43, 48 e 50) contidos no Papiro de Ahmes (1660-1620 AEC) no ano de 1650 AEC. O problema consiste em construir um quadrado que tenha a mesma área de um círculo dado, usando régua não graduada e compasso. Outros matemáticos como Anaxágoras (500-428 AEC), Meton (460 AEC – sem registro de sua morte), Hipócrates (460-377 AEC), Arquimedes (287-212 AEC) e Plutarco (46-120) debruçaram-se sobre o problema.

Roque (2012) comenta que os objetivos desses trabalhos podem não ter tido uma natureza formal, mas podem ser resultantes da busca pela técnica mais acurada em resolver problemas geométricos com argumentos puramente geométricos.

> A riqueza da investigação de problemas geométricos de construção levou a uma concepção mais clara sobre a natureza geral da arte de resolvê-los. Tal clareza, por sua vez, pode ter levado às primeiras demandas de sistematização e ordenação da geometria, expressa nos Elementos (Roque, 2012, p.160).

Os sofistas Antífona (480-411 AEC) e Bryson da Acaia (viveu no séc. IV AEC) também estudaram o problema da quadratura do círculo, começando com um quadrado inscrito num círculo e obtendo uma série de polígonos inscritos através da repetição do método da bissecção de arcos (Figura 2, à esquerda). Ambos procuravam mostrar que a sequência de áreas de polígonos encontradas de modo aproximado, tendia (em linguagem moderna) à área do círculo.

Figura 2 – Técnica de Antífona (à esquerda) e Bryson (à direita) com polígonos inscritos de 4, 8 e 16 lados



Fonte: Os autores

Scott (1960) nos conta que Antífona acreditava que aumentando continuamente o número de lados dos polígonos, poderia exaurir a área entre o polígono e o círculo, e que este caminho poderia auxiliá-lo a resolver o problema da quadratura. Bryson aperfeiçoou a técnica de Antífona “sanduichando” o círculo entre polígonos inscritos e circunscritos (Figura 2, à direita), na tentativa de provar que a área do polígono de n lados seria a média entre as áreas aproximadas dos polígonos inscrito e circunscrito. Porém, não há evidências históricas que comprovem estes estudos. Além disso, a possibilidade de ambos serem combatidos seria grande, uma vez que os gregos não admitiam que magnitudes fossem infinitamente divisíveis, e esta é a base do raciocínio de ambos.

Arquimedes vem resolver a questão que envolve a área do círculo duzentos anos mais tarde, através do método da exaustão. Este método foi muito utilizado até o aparecimento do cálculo diferencial, especialmente por Christiaan Huygens (1629-1695), em sua obra *De circuli magnitudine inventa*[5].

As ideias contidas no método de exaustão de Arquimedes colocam em evidência Zenon de Eleia (490-430 AEC) e uma série de paradoxos apresentados por ele, envolvendo a divisão infinita da reta, aliada à impossibilidade de movimentação sobre esta reta.

Na tentativa de resolução do problema da quadratura do círculo na antiguidade clássica, os gregos abrem caminho para resultados importantes tanto para a geometria quanto para o que hoje conhecemos por análise matemática.

2. O PROBLEMA DA QUADRATURA DO CÍRCULO

Ferreira (2010) comenta o problema da quadratura do círculo de maneira detalhada. Ele mostra que a solução encontrada no Papiro de Rhind (na verdade de Ahmes) consiste em considerar como medida do lado do quadrado, oito nonos da medida do diâmetro do círculo de raio 1, cuja área mede π. Além disso, o autor chama atenção para o fato de a medida do lado do quadrado ser aproximadamente $\left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{,}1605$, o que é uma aproximação muito boa para π. O problema 48 do Papiro de Rhind (Figura 3) compara a área do círculo com a área de um quadrado circunscrito.

[5] *Sobre a descoberta do comprimento do círculo*. (Tradução nossa)

Figura 3 – O problema 48 do Papiro de Rhind

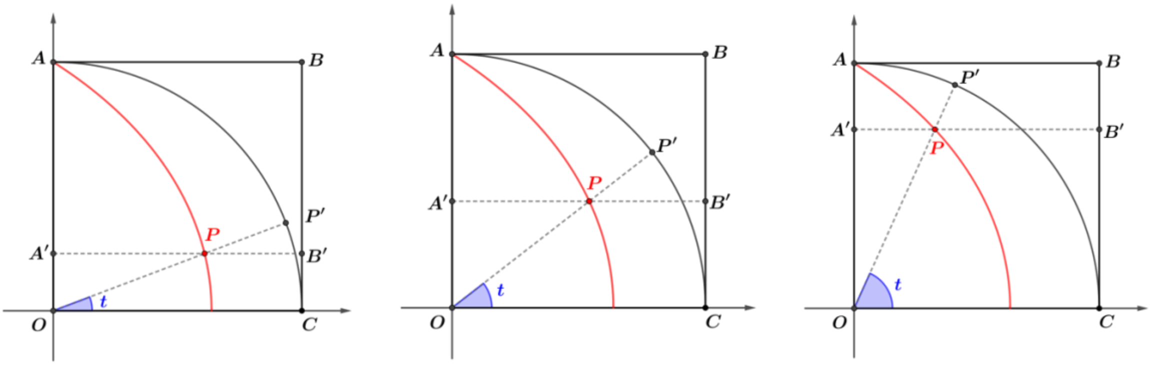
Fonte: https://webpages.ciencias.ulisboa.pt/~ommartins/seminario/rhind/P48_55.htm Acesso:04/10/2023

Inúmeras outras tentativas de resolver o problema figuram na História da Geometria Grega e alguns autores chegam a atribuir uma solução a Meton (c.460 AEC). Porém, a resolução do problema, de modo mecânico[6] e não por régua e compasso, é apresentada por Nicomedes (c.280- c.210 AEC) a partir da construção da curva denominada Quadratriz de Hípias (443-400 AEC). O nome desta curva foi dado em função do seu uso na resolução do problema da quadratura do círculo. A quadratriz é uma curva descrita a partir do movimento de uma partícula no plano, compondo um movimento retilíneo uniforme com um movimento circular uniforme, como descrevemos a seguir.

Considere um quadrado $ABCO$, cujo lado mede a, em que O é a origem do plano cartesiano e os pontos A e C têm coordenadas $(0, a)$ e $(a, 0)$, respectivamente. A quadratriz é o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ gerados pela intersecção entre os segmentos OP' e $A'B'$, em que A' se desloca sobre o segmento OA e P' se desloca sobre o arco CA de centro O e raio a (ver Figura 4). A partir dessa construção, a equação paramétrica da quadratriz $\gamma\colon \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$ é dada por $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big) = \left(\frac{2a}{\pi} t \cdot cotg(t), \frac{2a}{\pi} t\right),\ t > 0$ e $\gamma(0) = \left(\frac{2a}{\pi}, 0\right)$.

[6] Uma curva é chamada de mecânica quando seus pontos são gerados por interseção de figuras geométricas em movimento.

Figura 4 – A Quadratriz de Hípias com P marcado em três tempos distintos

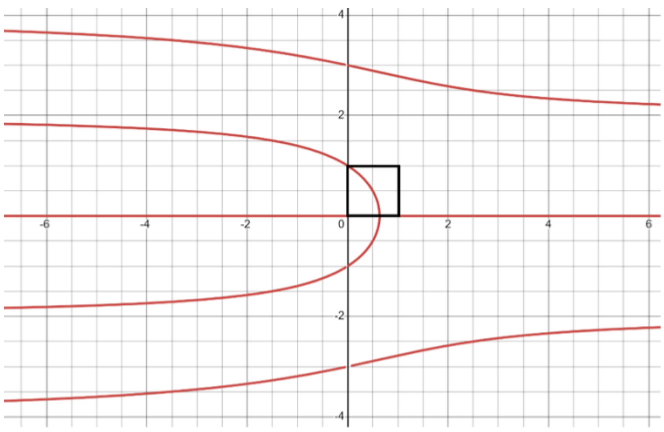


Fonte: Os autores

Uma das características principais da quadratriz é a proporcionalidade direta do segmento OA' com o ângulo t ou a proporcionalidade direta do segmento AA' com o ângulo complementar ao ângulo t. Além disso, é importante observar que o limite de $\gamma(t)$, quando t tende a zero, é $\left(\frac{2a}{\pi}, 0\right)$, ou seja, a quadratriz mostra como construir um segmento de medida $\frac{2a}{\pi}$. A partir daí, a construção de um segmento de medida π é imediata a partir da construção da quarta proporcional.

A equação da quadratriz pode ser escrita como $\frac{y}{x} = tg\left(\frac{\pi}{2a}\,y\right)$, em que $x = \lim_{y \to 0} \frac{y}{tg\left(\frac{\pi}{2a}y\right)}$, para $y = 0$. A Figura 5 mostra o gráfico desta curva para o caso $a = 1$, evidenciando o quadrado da Figura 4. Neste caso, a interseção com o eixo horizontal se dá no ponto $\left(\frac{2}{\pi}, 0\right)$.

Figura 5 – Gráfico da Quadratriz

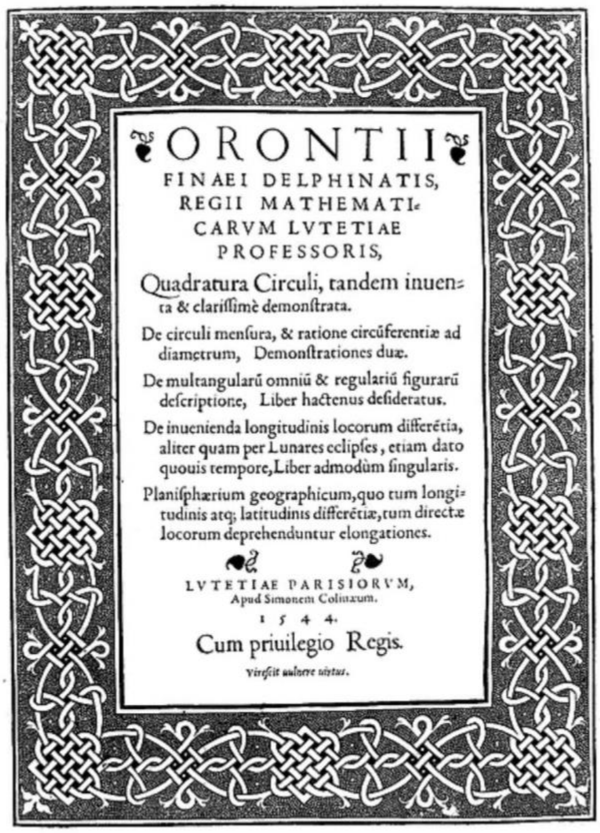


Fonte: Os autores

Arquimedes também dá sua contribuição à resolução do problema usando aspectos mecânicos e uma curva conhecida por espiral de Arquimedes. Esta curva é o lugar geométrico dos pontos do plano que se movem a uma velocidade constante sobre uma reta que gira sobre um ponto de origem fixo a uma velocidade angular constante. A equação mais simplificada da curva é dada em coordenadas polares (r, θ), a saber, $r = a + b.\theta^{\frac{1}{x}}$, em que $x = 1$ e, a e b são números reais.

Em Ferreira (2010) encontramos os cálculos e aplicações do uso da espiral de Arquimedes nos problemas envolvendo áreas de figuras planas e alusões aos trabalhos de Papus, Carpus, Liu Hsiao, Al-Haytham, Franco de Liège, Nicholas de Cusa (1401-1464), Pedro Nunes Salaciense (1502-1578) todos encontrando aproximações muito boas para π. Porém, Oronce Finé (1495-1555), cartógrafo, astrônomo e matemático francês que conseguiu encontrar a melhor aproximação para π. Ele usou aproximação por números racionais, obtendo $\pi \cong \frac{22}{7}$. Os cálculos encontram-se no texto *Quadratura Circuli, tandem inuenta et clarissime demonstrata*[7], de 1544. O volume que contém tais cálculos forma uma coleção de tratados muito interessantes sobre a quadratura do círculo a partir do uso de régua e compasso e reconhecido como uma obra de destaque da tipografia francesa do século XVI.

Figura 6 – Orontii


ORONTII
FINAEI DELPHINATIS,
REGII MATHEMATI-
CARVM LVTETIAE
PROFESSORIS,
Quadratura Circuli, tandem inuen-
ta & clarissimè demonstrata.
De circuli mensura, & ratione circũferentiæ ad
diametrum, Demonstrationes duæ.
De multangularũ omniũ & regulariũ figurarũ
descriptione, Liber hactenus desideratus.
De inuenienda longitudinis locorum differẽtia,
aliter quam per Lunares eclipses, etiam dato
quouis tempore, Liber admodùm singularis.
Planisphærium geographicum, quo tum longi-
tudinis atq; latitudinis differẽtiæ, tum directæ
locorum deprehenduntur elongationes.
LVTETIAE PARISIORVM,
Apud Simonem Colinæum.
1 5 4 4.
Cum priuilegio Regis.
Virescit uulnere uirtus.

Fonte: www.fromoldbooks.org Acesso: 08/02/2024

[7] *A quadratura do círculo, finalmente descoberta e detalhadamente demonstrada.* (Tradução nossa)

O problema da quadratura do círculo no sentido geométrico grego ocupou as mentes matemáticas por cerca de quatro mil anos até ser inteiramente resolvido, ou melhor dizendo, até ter sido declarado impossível dentro das exigências do uso restrito de uma régua não graduada e de um compasso.

3. O QUE A QUADRATURA DO CÍRCULO TEM A VER COM OS NÚMEROS TRANSCENDENTES?

No campo dos números reais, podemos classificar seus elementos como números racionais (podem ser escritos na forma de uma razão entre dois números inteiros com divisor não nulo) ou números irracionais (os números reais que não são racionais). Além disso, os números irracionais podem ser classificados em algébricos ou transcendentes.

Se um número real (ou complexo) satisfaz (é raiz de) alguma equação polinomial do tipo $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ com coeficientes inteiros, dizemos que este número é um número algébrico. De forma mais geral, dizemos que um número x é algébrico sobre um corpo $K[x]$ quando ele é raiz de um polinômio com coeficientes neste corpo.

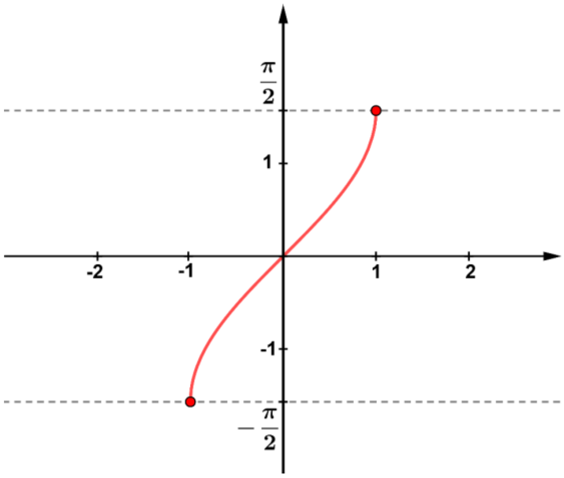
Todos os números racionais da forma $\frac{a}{b}$, em que a e b são números inteiros, com $b \neq 0$, são algébricos porque eles são raízes de equações polinomiais do tipo $bx - a = 0$.

Há alguns números irracionais que são algébricos, como $\sqrt[5]{11}$, que é raiz real da equação polinomial $x^5 - 11 = 0$, $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$ que é solução de $8x^3 - 2 = 0$, ou $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ que é uma solução da equação $x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1 = 0$. Notemos que as três equações polinomiais têm coeficientes inteiros. Porém, há irracionais que não são algébricos, como é o caso de π, o número de Euler, e, e infinitos números reais y expressos pelas imagens de números reais x através de funções conhecidas por funções transcendentes, como $y = f(x) = ln(x)$ ou $y = g(x) = sen\,(x)$.

Vasconcelos (2013) demonstra a existência dos transcendentes a partir da definição de altura (soma dos módulos de cada coeficiente acrescido do número de raízes complexas que o polinômio possui) de um polinômio. Em seguida, mostra que há um conjunto finito de polinômios com uma dada altura e como consequência, o conjunto de todas as raízes de todos os polinômios de todas as alturas formam um conjunto enumerável de conjuntos finitos, o que permite concluir que o conjunto dos números algébricos é enumerável. Além disso, apresenta o conjunto dos números reais como sendo a união dos números reais algébricos com os transcendentes. Como o conjunto dos números reais não é enumerável, conclui que o conjunto dos números transcendentes é infinito não enumerável, evocando o fato de que a união de um número finito de conjuntos enumeráveis é enumerável. Isto é, caso os transcendentes fossem enumeráveis, teríamos uma contradição.

Usando uma linguagem moderna da Matemática, a linguagem do cálculo, Klein (1895) define as curvas descritas por uma integral de uma função algébrica como *curvas integrais*. Assim, afirma que a curva $y = arc\ sen\ (x)$, é uma curva integral, uma vez que pode ser expressa por $y = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ e que o traço desta curva no plano cartesiano permite representar geometricamente π como sendo a distância entre duas ordenadas de dois pontos particulares (Figura 7). As ordenadas desses pontos são determinadas segundo condições dadas pela teoria das funções transcendentes, *die transzendentaler Apparat.* A saber, se tomarmos a curva definida no intervalo $[-1,1]$, π será a medida da imagem da função $f(x) = arc\ sen(x)$ neste intervalo.

Figura 7 – A curva $y = arc\ sen\ (x)$



Fonte: Os autores

Já números do tipo $log\, r$ são, grosso modo, transcendentes desde que r seja um número racional positivo e $log\, r$ um número irracional. Este resultado é conhecido por Teorema de Gelfond-Schneider.

> O sétimo problema de Hilbert consistia em decidir se α^β é algébrico ou transcendente, dado que α e β são números algébricos. (...) Em 1934, A. Gelfond e, independentemente, Th. Schneider, provaram que α^β é transcendente. A transcendência de $2^{\sqrt{2}}$ é, claramente, um caso específico desse resultado geral (Niven, 1984, p. 114).

Quando um número real não é algébrico ele é chamado número *transcendente* e o que o caracteriza é a propriedade de não ser raiz de uma equação algébrica com coeficientes inteiros.

A nomenclatura destes números é atribuída a Euler que assim os nomeia por entender que eles transcendem o poder das operações algébricas usuais, como salientam Latefá, Silva e Lelis (2016).

Notemos que a partir da definição de números transcendentes, os números reais podem ser vistos como uma união disjunta de números reais algébricos e transcendentes.

Entre 1670 e 1770, com o desenvolvimento do cálculo, em particular com os estudos das séries numéricas, muitos métodos numéricos surgiram a fim de determinar uma boa aproximação para π, como a série atribuída a Leibniz

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots.$$

Neste mesmo período é descoberta a dependência mútua entre os números π e e, este último encontrado pelo matemático e físico escocês John Napier (1550-1617) ao estudar as propriedades das operações envolvendo logaritmos.

Euler mostra que estes números estão interligados ao estudar as similaridades entre propriedades das exponenciais reais e as exponenciais complexas do tipo $E(x) = \cos(x) + i.sen(x) = e^{i\,x}$, sendo i a unidade imaginária no corpo dos complexos. Por exemplo: $E(x+y) = E(x).E(y)$ e $E(0) = 1$, propriedades que caracterizam as exponenciais reais.

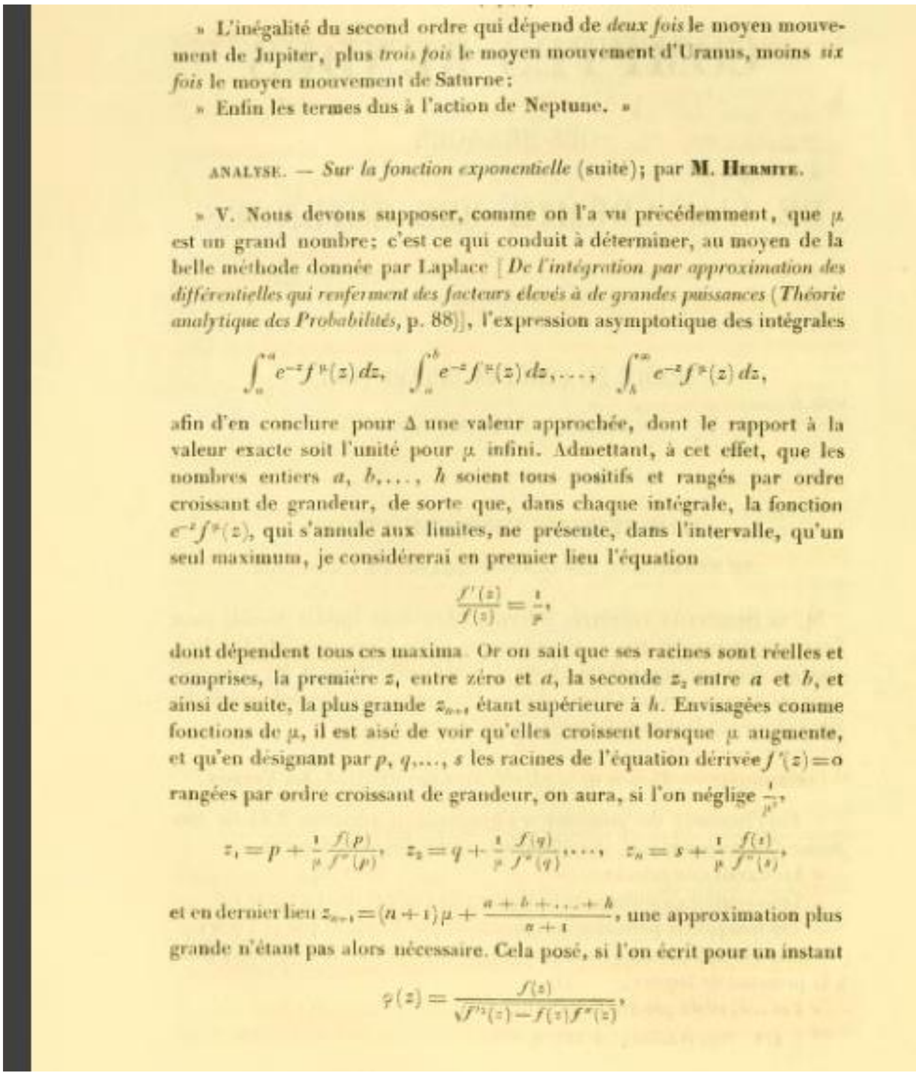
Tomando $x = \pi$, obtém-se $e^{i\pi} = -1$. Esta relação é célebre na Matemática por reunir na mesma expressão, $e^{i\pi} + 1 = 0$, os dois números reais transcendentes que mais aparecem em cálculos das mais diversas áreas do conhecimento matemático, assim como os elementos neutros da multiplicação e da adição. Além disso, a partir dela é possível justificar a transcendência de e^{π}: como $e^{i\pi} = -1$, então $(e^{i\pi})^{-i} = (-1)^{-i}$, que é transcendente pelo Teorema de Gelfond-Schneider.

Klein (1895) afirma que as demonstrações mais modernas sobre a transcendência de π são baseadas nesta relação de Euler sobre números complexos, levando obviamente em consideração a demonstração da transcendência de e.

Em 1770, Johann Heinrich Lambert (1728-1777) publicou um pequeno tratado intitulado *Vorlaüfige Kenntnisse für die so die Quadratur des Cirkuls suchen*[8] onde a irracionalidade de π é apresentada, embora não seja discutida. Vinte quatro anos mais tarde, Legendre apresenta a prova de que os números π e π^2 são números irracionais em seu livro *Élements de Géométrie*[9] (1794). As duas demonstrações precisaram ser revisadas, pois continham pequenos erros.

[8] *Conhecimento necessário para quem quer quadrar o círculo.* (Tradução nossa)
[9] *Elementos de Geometria.* (Tradução nossa)

Figura 8: Artigo de Hermite no Comptes Rendus de 1873



» L'inégalité du second ordre qui dépend de *deux fois* le moyen mouvement de Jupiter, plus *trois fois* le moyen mouvement d'Uranus, moins *six fois* le moyen mouvement de Saturne;

» Enfin les termes dus à l'action de Neptune. »

ANALYSE. — *Sur la fonction exponentielle* (suite); par **M. Hermite.**

» V. Nous devons supposer, comme on l'a vu précédemment, que μ est un grand nombre; c'est ce qui conduit à déterminer, au moyen de la belle méthode donnée par Laplace [*De l'intégration par approximation des différentielles qui renferment des facteurs élevés à de grandes puissances* (*Théorie analytique des Probabilités*, p. 88)], l'expression asymptotique des intégrales

$$\int_0^a e^{-z} f^{\mu}(z)\,dz, \quad \int_a^b e^{-z} f^{\mu}(z)\,dz, \ldots, \quad \int_h^{\infty} e^{-z} f^{\mu}(z)\,dz,$$

afin d'en conclure pour Δ une valeur approchée, dont le rapport à la valeur exacte soit l'unité pour μ infini. Admettant, à cet effet, que les nombres entiers $a, b, \ldots, h$ soient tous positifs et rangés par ordre croissant de grandeur, de sorte que, dans chaque intégrale, la fonction $e^{-z} f^{\mu}(z)$, qui s'annule aux limites, ne présente, dans l'intervalle, qu'un seul maximum, je considérerai en premier lieu l'équation

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{\mu},$$

dont dépendent tous ces maxima. Or on sait que ses racines sont réelles et comprises, la première z_1 entre zéro et a, la seconde z_2 entre a et b, et ainsi de suite, la plus grande z_{n+1} étant supérieure à h. Envisagées comme fonctions de μ, il est aisé de voir qu'elles croissent lorsque μ augmente, et qu'en désignant par $p, q, \ldots, s$ les racines de l'équation dérivée $f'(z) = 0$ rangées par ordre croissant de grandeur, on aura, si l'on néglige $\frac{1}{\mu^2}$,

$$z_1 = p + \frac{1}{\mu}\frac{f(p)}{f''(p)}, \quad z_2 = q + \frac{1}{\mu}\frac{f(q)}{f''(q)}, \ldots, \quad z_n = s + \frac{1}{\mu}\frac{f(s)}{f''(s)},$$

et en dernier lieu $z_{n+1} = (n+1)\mu + \frac{a+b+\ldots+h}{n+1}$, une approximation plus grande n'étant pas alors nécessaire. Cela posé, si l'on écrit pour un instant

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{\sqrt{f'^2(z) - f(z)f''(z)}},$$

Fonte: https://www.biodiversitylibrary.org/item/23679#page/80/mode/1up Acesso: 30/10/2023

A demonstração de Legendre, por exemplo, continha algumas inconsistências já cometidas por outros matemáticos, como comenta Raymond Claire Archibald nas notas que completam a segunda parte do capítulo dois do texto de Klein, uma versão americana publicada em 1955. Após as revisões das demonstrações, realizadas pelo matemático polonês, Alfred Pringsheim (1850-1941), a demonstração de Lambert foi vista como mais elegante. Klein afirma que "após o estudo cuidadoso de Pringsheim em 1898, a prova de Lambert surgiu extraordinariamente perspicaz e essencialmente precisa, enquanto a demonstração de Legendre pareceu estar muito aquém da demonstração de Pringsheim" (1956, p. 89, tradução nossa).

Com o passar dos anos, foram surgindo muitos estudos relevantes e muitas demonstrações elegantes do ponto de vista matemático, sobre números irracionais, porém o enunciado de um teorema que justificasse a impossibilidade de resolver o problema da quadratura do círculo como conhecemos hoje, ainda não havia sido apresentada.

Charles Hermite (1822-1901) abre as primeiras portas para a solução do problema provando a transcendência do número de Euler *e* no artigo *Sur la fonction exponentielle*[10], no Compte Rendus de L'Académie de Sciences de Paris de 1873 (Figura 8). Esta prova utiliza a caracterização de π como a menor solução positiva da equação trigonométrica $cos\frac{x}{2} = 0$ e mostra, na verdade, que π^2 é um número irracional. Assim como numerosas provas da irracionalidade de π anteriores a esta, Hermite apresenta mais uma demonstração por absurdo, definindo por recorrência duas sequências de funções reais, A_n tal que $A_0(x) = sen\, x$ e $A_{n+1}(x) = \int_0^x y \cdot A_n(y)dy$ e U_n tal que $U_o(x) = sen\, x$ e $U_{n+1}(x) = -\frac{1}{x}U_n{}'(x)$. Hermite também oferece uma expressão fechada para a função A_n, a saber, $A_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{2^n \cdot n!} \cdot \int_0^1 (1 - z^2)^n \cdot cos(xz)dz$, embora não tenha justificado em seu texto de forma explícita, provavelmente pelo fato de ser facilmente comprovado. Ele discute as relações de recorrência para motivar e obter uma integral que lhe permita calcular de maneira mais conveniente a transcendência de π. A prova de Hermite é muito semelhante à prova de Lambert uma vez que $A_n(x)$ é o resíduo da fração contínua de Lambert do cálculo da função tangente.

Klein (1956) diz que a propriedade que caracteriza os números transcendentes foi demonstrada por Joseph Liouville (1809-1882) em 1844 (Figura 9), e que esta demonstração pode ser encontrada no Comptes Rendus de L'Académie de Sciences de Paris, volume XVIII. Klein alerta também para o fato de ser uma demonstração não muito evidente, por ser baseada na teoria das funções contínuas e que o primeiro número transcendente exibido por Liouville foi $\frac{1}{10} + \frac{1}{10^{2!}} + \frac{1}{10^{3!}} + \cdots + \frac{1}{10^{n!}} + \cdots = 0{,}110001000000000000000001000$..., conhecido como Constante de Liouville.

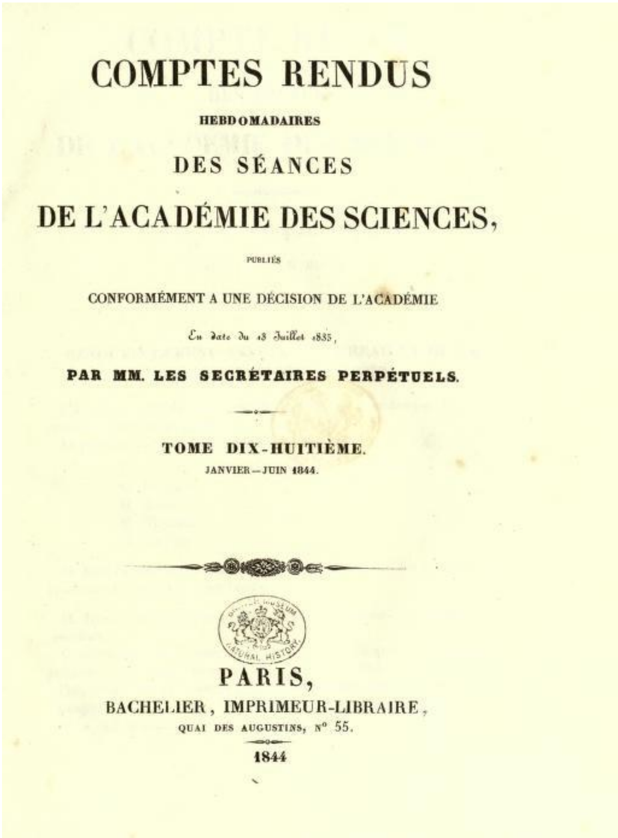
Os cálculos de Liouville puderam ser simplificados a partir dos resultados de Georg Cantor publicados em 1873, no Journal de Crèlle, volume LXXVII, sob o título *Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes reeller algebreicher Zahlen*[11]. O argumento de Cantor para solucionar o problema baseia-se na prova da existência dos números transcendentes, em cálculos com frações decimais e no fato de o conjunto dos números algébricos ser enumerável, isto é, existir uma bijeção entre ele e o conjunto dos números naturais, o que não ocorre com os transcendentes.

---

[10] *Sobre a função exponencial.* (Tradução nossa)
[11] *Sobre uma propriedade dos números algébricos reais.* (Tradução nossa)

Uma demonstração da transcendência de π foi enfim apresentada por Ferdinand von Lindemann (1852-1939), nove anos após a demonstração de Charles Hermite sobre a transcendência do número de Euler.

Figura 9: Comptes Rendue, 1844



COMPTES RENDUS
HEBDOMADAIRES
DES SÉANCES
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,
PUBLIÉS
CONFORMÉMENT A UNE DÉCISION DE L'ACADÉMIE
En date du 13 Juillet 1835,
PAR MM. LES SECRÉTAIRES PERPÉTUELS.

TOME DIX-HUITIÈME.
JANVIER—JUIN 1844.

PARIS,
BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE,
QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.
1844

Fonte: https://www.biodiversitylibrary.org/item/21168#page/9/mode/1up Acesso: 10/03/2024

A prova de Lindemann (Figura 10) é muito semelhante a esta prova e foi publicada em 1882 no Mathematische Annalen, XX, sob o título *Ueber die Zahl π* [12]. Pouco tempo depois, no mesmo ano, a prova foi publicada nos anais da Academia de Ciências de Paris (Lindemann, 1882).

A questão foi resolvida. O número real π é classificado como um irracional transcendente, sendo assim, impossível de construí-lo por meio de compasso e régua não graduada. Porém, de acordo com as notas de Klein (1895, p. 60), a compreensão plena das demonstrações de Hermite e Lindemann era acessível a poucos, pois eram muito complicadas.

Alguns matemáticos interessados na temática debruçaram-se sobre as demonstrações a fim de simplificá-las. Uma dessas novas versões é de Karl Weierstrass (1815-1897) publicada

[12] *Sobre o número* π. (Tradução nossa)

nos anais da revista Berliner Berichte, de 1885. Paul Bachmann também apresenta uma versão mais simplificada para a transcendência de π em 1892, em seu livro *Vorlesugen über die Natur der Irrationalzahlen*[13].

Figura 10: Carl Von Lindermann

Fonte: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lindemann/ Acesso: 10/03/2024

Com o avanço da prática de apresentações de demonstrações elegantes por matemáticos mergulhados no rigor da Análise Matemática, David Hilbert publica em 1892, no Göttingen Nachrichtem e no Comptes Rendus, volume XLIII, sua versão para a transcendência de π. De acordo com (Klein, 1895), a prova de Hilbert tinha muitos traços do trabalho de Hermite e envolve a integral $\int_0^{\infty}(z^{\rho} \,.\, e^{-z})\, dz = \rho!$. Adolf Hurwitz (1859-1919) e Paul Gordan (1837-1912) melhoraram as conclusões de Hilbert, tornando-as muito mais simplificadas.

Desde 1882 conhece-se a prova da transcendência de π, mas a transcendência de números como $log\, 2$ ou $2^{\sqrt{2}}$ (este conhecido como constante de Gelfond-Schneider) só foi provada na primeira metade do século XX.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Embora a teoria moderna que define e estuda alguns números reais, como irracionais transcendentes, seja complexa e as demonstrações não muito evidentes de serem compreendidas, é interessante que professores da educação básica a apresentem a seus alunos, sobretudo os que cursam o Ensino Médio, adequando a linguagem e proporcionando atividades

[13] *Palestras sobre a natureza dos números irracionais.* (Tradução nossa)

que gerem discussões em sala de aula, a fim de promover o desenvolvimento da cultura matemática entre os estudantes. Esta teoria permite a realização de rodas de conversa com alunos acerca da evolução do pensamento matemático através dos tempos, do trabalho colaborativo em matemática e do surgimento das conexões entre diferentes áreas da matemática que um problema permite conter ao se estudar suas soluções.

A ideia de que os números reais são resultados da união da coleção de números algébricos e de números transcendentes é pouco ou nada explorada por professores da educação básica, apesar de muito interessante e rica, sobretudo quando analisamos os conteúdos matemáticos presentes nesta afirmação.

Dicionários de verbetes matemáticos podem ser criados pelos alunos, assim como o estudo de biografias, a construção de mapas mentais ou a determinação de redes que mostrem as ligações entre matemáticos que trabalharam sobre o assunto. Além disso, a História da Matemática pode ser um caminho para que temas ligados à filosofia do pensamento matemático, mitologia grega, geometria grega, construtibilidade de números reais, teoria dos números, teoria dos polinômios, teoria da extensão de corpos ou lógica matemática, possam ser apresentados aos alunos pelo professor, de forma a contribuir para a ampliação de ferramentas que permitirão maior autonomia dos alunos, sobretudo em relação ao uso da oralidade e argumentação lógica. Um exemplo é explorar o fato de que os números transcendentes são definidos por aquilo que eles não são, o que pode gerar muitas analogias na própria língua materna no que se refere à definição de conceitos abstratos, como é o caso do “nada”. Além disso, esta forma de definição pode encontrar muita discussão no campo da filosofia.

Acreditamos que trabalhar com linguagem, com discussões de caráter social, iconografia, com geolocalização e o acesso a mapas históricos (que são pouquíssimos utilizados em escolas brasileiras), ajuda muito os alunos a entenderem que a matemática é um produto da mente humana, também uma linguagem e não somente uma ferramenta de comunicação entre diferentes ramos das ciências, como a física ou a astronomia. Estas práticas em salas de aula, baseadas no uso da História da Matemática, humaniza a matemática e traz os alunos para mais perto da disciplina, que ainda desafia seus professores na busca de torná-la mais atrativa para seus alunos.

Permitir que os alunos descubram que um determinado problema de matemática pode ter soluções em diferentes áreas do conhecimento, e não uma área especifica da Matemática, é um desafio para os professores. Uma vez atingido este objetivo, compreendemos melhor que existem as matemáticas na Matemática.

O posicionamento crítico frente à Matemática e ao ‘fazer matemática’, mesmo que em nível elementar, talvez seja um dos maiores ganhos para os estudantes que participam de encontros onde a Matemática está no meio de outras áreas do conhecimento. Em relação ao tema que apresentamos nesse artigo, compreender as hipóteses do problema proposto pelos gregos e o seu contexto, saber interpretar a impossibilidade de resolução da questão e compreender que a solução do problema só aparece quando o terreno oferece condições para que ela seja apresentada logicamente e sem contradições, ajuda alunos e professores a entenderem que, embora exista a solução para a equação $L^2 = \pi . R^2$, que é $L = R\sqrt{\pi}$, a solução não existe segundo as hipóteses propostas pelos gregos. E por que não? Porque números transcendentes não são construtíveis por régua não graduada e compasso.

REFERÊNCIAS

Beman, W. W. & Smith, D. E. (1897). *Famous problems of elementary geometry: the duplication of the cube, the trisection of an angle, the quadrature of the circle*. Translation of Felix Klein’s *Vörtrage über ausgewahte Fragen der Elementargeometrie ausgearbeitet von F. Tägert (1895)*. Ginn & Company. https://quod.lib.umich.edu/u/umhistmath/ACV2370.0001.001?rgn=main;view=fulltext

Chaquiam, M. (2023). *História e Matemática em sala de aula: contextos, textos e atividades*. Série História da Matemática no Ensino de Matemática, v. 2, Livraria da Física.

Ferreira, E. S. (2010). Nicomedes e os três problemas clássicos gregos. *Revista Brasileira de História da Matemática*, v. 10, n. 20, 193-211. https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/144/129

Fossa, J. A. (2012). *Ensaios sobre a Educação Matemática*. 2 ed. Editora Livraria da Física.

Hilbert. D. (1893). Ueber die Trancendenz der Zahlen e und π. *Mathematische Annalen*, v. 43, 216-219. https://www.mathematik.uni-muenchen.de/~lfmoser/ss13/transzendenz.pdf

https://www.digizeitschriften.de/id/235181684_0020%7Clog31?tify=%7B%22view%22:%22info%22,%22pages%22:%5B1%5D%7D

Jaeger, W. (2013). *Paideia: a formação do homem grego.* 6 ed. WMF Martins Fontes.

Klein, F. (1895). *Vorträge Über Ausgewahlte Fragen Der Elementargeometrie Ausgearbeitet Von F. Target. Eine Festschrift zu den Pfinsten 1895 in Göttingen stattfindenden dritten Versammlung des Vereins zur Förderung des Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Unterrichts.* In the Digital Collection of University of Michigan Historical Math Collection. https://quod.lib.umich.edu/u/umhistmath/ACV2370.0001.001?rgn=main;view=fulltext

Klein, F. (1956). *Famous Problems of Elementary Geometry.* 1 ed. Dover Publications INC.

Latefá, C.A., Silva, E., & Lelis, J. (2016). *Teoria dos números transcendentes: do Teorema de Liouville à conjuntura de Schanuel*. 1 ed. 8ª Bienal da SBM.

Lindemann. F. (1882). Ueber die Zahl π. *Mathematische Annalen*, v. 20, 213-225.

Liouville, J. (1844). Sur des classes très-étendues de quatités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationelles algébriques. *Comptes Rendus de L'Académie de Paris*, v. 18, 883-885. http://www.numdam.org/item/JMPA_1851_1_16__133_0.pdf

Miguel, A., & Brito, A. J. (1996). *A História da Matemática na Formação do Professor de Matemática*. Cadernos CEDES – História e Educação Matemática. Papirus, v. 40, 47-61.

Niven, I. (1984). *Números: racionais e irracionais*. Sociedade Brasileira de Matemática.

Roque, T. (2012). *História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Editora Zahar.

Rudio, F. (1892). *Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismenssung*. Teuber.

Scott, J.F. (1960) *A History of Mathematics: from Antiquity to the Beginning of the Nineteenth Century.* Barnes & Noble Imports.

Vasconcelos, G. A. (2013) *A irracionalidade e a transcendência do número e*. Dissertação de Mestrado, PROFMAT, Rio Claro, SP. https://repositorio.unesp.br/items/debfacf5-0cb9-4c3d-a856-d87554a55d1b

Vitrac, B. (2005) Peut-on parler d'algèbre dans les mathématiques grecques anciennes? *Mirror of Heritage (Ayene-ne Miras),* v. 3, 1-44. https://hal.science/hal-00174933/document