Revista de História da Educação Matemática
HISTEMAT

ISSN: 2447-6447 **Submetido:** 24/07/2024 **Aprovado**: 06/10/2024

https://doi.org/10.62246/HISTEMAT.2447-6447.2024.10.649

O Fascículo de Limites e Derivadas produzido a partir do ENCONAM (1991): um olhar a partir dos três mundos da Matemática.

The booklet on Limits and Derivatives produced from ENCONAM (1991): A perspective from the Three Worlds of Mathematics.

Rafael Gontijo Ferreira[1]
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET MG)
rafael.gontijof2006@gmail.com
Lattes: http://lattes.cnpq.br/1672609655510476
Orcid: https://orcid.org/0009-0007-2401-6372

Rudá Dantas Ruoso Brandão[2]
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET MG)
rudabrandao@ruoso.com
Lattes: http://lattes.cnpq.br/5916960038149218
Orcid: https://orcid.org/0009-0001-3650-3094

Marcela Richele Ferreira[3]
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET MG)
marcela.richele@cefetmg.br
Lattes: http://lattes.cnpq.br/2354098257543861
Orcid: https://orcid.org/0009-0002-0920-6542

Davidson Paulo Azevedo Oliveira[4]
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET MG)
davidson@cefetmg.br
Lattes: http://lattes.cnpq.br/1048347237300518
Orcid: https://orcid.org/0000-0003-2794-8515

[1] Estudante do Ensino Médio Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET MG), Belo Horizonte, Minas Gerais, Brasil. ORCID: https://orcid.org/0009-0007-2401-6372. Lattes: http://lattes.cnpq.br/1672609655510476 . E-mail: rafael.gontijof2006@gmail.com

[2] Estudante do Ensino Médio Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET MG), Belo Horizonte, Minas Gerais, Brasil. ORCID: https://orcid.org/0009-0001-3650-3094 Lattes: http://lattes.cnpq.br/5916960038149218 . E-mail: rudabrandao@ruoso.com

[3] Doutora em Modelagem Matemática e Computacional pelo Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET MG). Professora no Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET MG), Belo Horizonte, Minas Gerais, Brasil. ORCID: https://orcid.org/0009-0002-0920-6542 Lattes: http://lattes.cnpq.br/2354098257543861 . E-mail: marcela.richele@gmail.com.

[4] Doutor em Educação Matemática pela Universidade Estadual de São Paulo (UNESP Rio Claro). Professor no Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET MG), Belo Horizonte, Minas Gerais, Brasil. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2794-8515 . Lattes: http://lattes.cnpq.br/1048347237300518. E-mail: davidson@cefetmg.br.

RESUMO

Durante o final do século XX, o currículo das Escolas Técnicas Federais (ETFs) já estava notadamente diferente daquele restrito às práticas profissionais, tendo assumido também uma função preparatória para o ingresso à Universidade. Em vista dessa mudança de currículo, que afastava a instituição de seu propósito profissionalizante, pode-se observar um incômodo entre diversos professores de matemática ativos durante o período. Nessa situação, surgem os movimentos "Encontros Nacionais de Professores de Matemática das Escolas Técnicas Federais" - ENCONAM, que possuíam o objetivo de discutir novos métodos para o ensino de matemática nas ETFs. Como fruto desses encontros, 11 textos voltados para o ensino de matemática nessas instituições são publicados, sendo um deles voltado para o conteúdo de limites e derivadas, tema atualmente restrito a alguns dos cursos técnicos. Usando como base as teorias dos Três Mundos da Matemática, Pensamento Matemático Elementar (PME) e Pensamento Matemático Avançado (PMA), de David Tall, essa pesquisa analisa a metodologia de ensino usada no fascículo do ENCONAM. É possível identificar uma apresentação intuitiva dos conceitos iniciais de Cálculo através de uma apresentação corpórea e simbólica, permitindo o estabelecimento de uma base de conhecimento e uma transição entre o PME e o PMA.

Palavras-chave: Cálculo Diferencial; ENCONAM; Educação Profissional.

ABSTRACT

During the late 20th century, the curriculum of Federal Technical Schools (ETFs) had already notably diverged from solely professional practices, also assuming a preparatory role for university entrance. Due to this shift in curriculum, which moved the institution away from its vocational purpose, there was noticeable unease among several active mathematics teachers during that period. In response to this situation, the "National Meetings of Mathematics Teachers from Federal Techincal Schools" - ENCONAM movement emerged, aiming to discuss new methods for teaching mathematics in ETFs. As a result of these meetings, 11 texts focused on mathematics education in these institutions were published, one of which addressed the topics of limits and derivatives, currently restricted to some technical courses. Drawing on David Tall's theories of the Three Worlds of Mathematics, Elementary Mathematical Thinking (EMT), and Advanced Mathematical Thinking (AMT), this research analyzes the teaching methodology used in the ENCONAM publication. It identifies an intuitive presentation of the foundational concepts of Calculus through both physical and symbolic approaches, thereby facilitating the establishment of a knowledge base and a transition between EMT and AMT.

Keywords/Palabras clave: Differencial Calculus. ENCONAM. Professional education.

INTRODUÇÃO

O Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG) tem suas origens na Escola de Aprendizes Artífices de Belo Horizonte, instituída em 23 de setembro de 1910, durante o governo de Nilo Peçanha, que, por sua vez, criou uma rede de escolas técnicas pelo país. Essas escolas tinham o objetivo de formar profissionais qualificados para atender às demandas da indústria e do comércio em expansão no início do século XX. Ao longo do tempo, a instituição passou por várias transformações e mudanças de nome, refletindo as diferentes fases do desenvolvimento da educação técnica no Brasil (Chamon e Nascimento, 2011).

Finalmente, em 1978, em um período de significativas transformações na economia brasileira, marcadas pela industrialização e pela modernização do país, a instituição foi transformada no Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG), acompanhando uma política de valorização e de expansão do ensino técnico e tecnológico no Brasil. Essas iniciativas visavam a capacitar a mão de obra para atender às crescentes exigências do mercado, impulsionando a pesquisa e o desenvolvimento tecnológico e estimulando a necessidade de aprimorar e de modernizar a educação técnica e profissional.

Nesse contexto de mudanças no ensino, surgem os Encontros Nacionais de Professores de Matemática das Escolas Técnicas Federais (ENCONAM). Eles ocorreram entre 1980 e 1996, com o objetivo de discutir métodos de ensino, voltados para escolas profissionalizantes que integrassem a Matemática com as áreas técnicas das instituições. Uma das ações do grupo foi a produção e a publicação de onze fascículos, abordando conteúdos de Matemática do ensino médio, e contextualizando-os por meio de aplicações voltadas para as disciplinas técnicas oferecidas pelas instituições. Um deles é o fascículo Limites e Derivadas, foco deste artigo, que foi coordenado pelo professor do CEFET-MG, João Bosco Laudares, em colaboração com outros professores desta instituição em parceria com docentes de Goiás, CEFET-GO. Maciel e Sá (2020) analisaram esses fascículos e concluíram que, apesar dos esforços para conectar teoria e prática, ainda persistem fragilidades na abordagem interdisciplinar dosmateriais. O estudo indica que os fascículos não abrangem as áreas técnicas correlatas, revelando um desafio constante para os professores da Educação Profissional. Fonseca et al. (2024) se restringem em analisar as indeterminações deste fascículo e concluem que osautores se baseiam no mundo corpóreo simbólico para esse conteúdo.

A discussão sobre o desafio do ensino de Limites e Derivadas no ensino secundário não é nova e é extensamente discutida na literatura. Segundo Tobies (2019), o matemático alemão Felix Klein advoga por uma abordagem matemática centrada no estudo das funções, considerando o Cálculo como uma etapa final do desenvolvimento curricular do ensino secundário. Nesse mesmo sentido, Tall (1995) defende que, além de o conceito de função ser central na matemática contemporânea, ele leva o estudante a um conceito mais avançado, o de limite, sugerindo que tais ideias deveriam ser introduzidas de maneira não formal na Educação Básica.

Nesse sentido, Tall elabora uma teoria sobre a natureza do conhecimento matemático e como esse conhecimento evolui ao longo do tempo em indivíduos em três mundos: o Conceitual Corpóreo, o Operacional Simbólico e o Axiomático Formal. Ele, então, denomina sua teoria de Três Mundos da Matemática. Nossa pesquisa se desenvolve na perspectiva do autor e procura responder à seguinte questão de investigação: a partir dos Três Mundos da Matemática, quais são as abordagens metodológicas para o conceito de limites e derivadas, apresentadas no fascículo da ENCONAM publicado em 1991?

É importante salientar que a teoria dos Três Mundos da Matemática (Tall, 1995, 2013, 2020) emergiu em nosso trabalho a partir da leitura dos trabalhos de Silva (2023, 2023a). A autora analisa, a partir dessa teoria, o ensino de limites (Silva, 2023) e de derivadas (Silva, 2023a) em livros didáticos do Ensino Médio entre as décadas de 1940 e 1970.

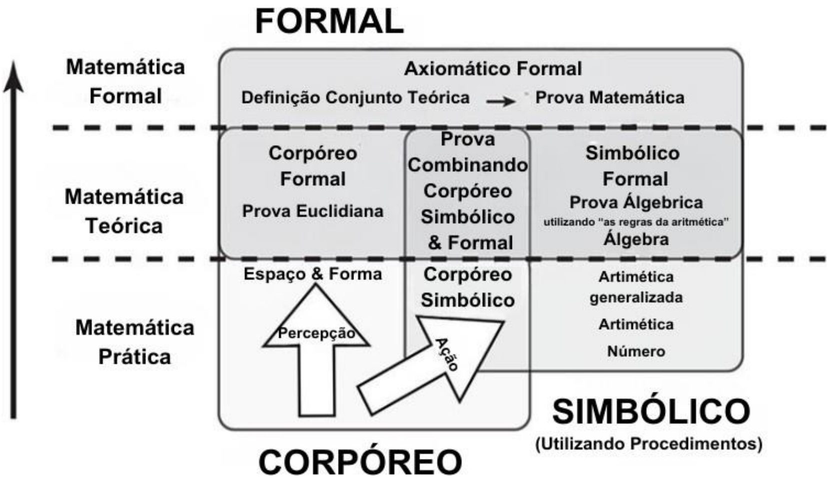
O objetivo central desta pesquisa é analisar a forma como o conteúdo do livro é apresentado, buscando compreender como os conceitos de limites e derivadas são abordados equal sua aplicabilidade para a comunidade técnica para a qual foi elaborado. Para alcançar esse propósito, serão utilizadas ferramentas teóricas propostas por David Tall (2013), como a Teoria dos Três Mundos da Matemática e as teorias do Pensamento Matemático Elementar e Avançado. O fascículo analisado pertence ao acervo pessoal de um dos autores deste artigo e foi adquirido por doação de uma professora aposentada da instituição.

1. REFERENCIAL TEÓRICO

Esse trabalho realiza uma análise historiográfica qualitativa de cunho documental na perspectiva de Gil (2002, p. 45) segundo o qual esse tipo de pesquisa "vale-se de materiais que não recebem ainda um tratamento analítico, ou que ainda podem ser reelaborados de acordo com os objetos da pesquisa". O documento principal deste trabalho é o fascículo de 1991 que ainda não foi analisado pela literatura e a lente de análise utilizada é a teoria dosTrês Mundos da Matemática (Tall, 2013, 2020).

A Teoria dos Três Mundos da Matemática, proposta por Tall (2013), visa a explorar uma classificação das distintas formas pelas quais podemos exercer e conceber o pensamento matemático, delineando, assim, três mundos distintos, que se articulam entre si, denominando-os de mundo Conceitual Corpóreo, de mundo Operacional Simbólico e demundo Axiomático Formal (Fig. 1).

Figura 01 - Representação visual das transformações entre os três mundos matemáticos.



Fonte: Tall (2013, p. 19, tradução própria)

De modo a esclarecer sua teoria, Tall (2013, p. 133, tradução nossa) define cada um dos três mundos como sendo:

> Um mundo (conceitual) corpóreo, baseado nas percepções e nas ações humanas, desenvolvendo imagens mentais que são verbalizadas de maneiras cada vez mais sofisticadas para se tornarem entidades mentais perfeitas em nossa imaginação;
> Um mundo (operacional) simbólico que se desenvolve a partir de ações humanas, incorporadas em procedimentos simbólicos de cálculo e de manipulação, que podem ser comprimidos em proceitos para permitir um pensamento operacional flexível;
> Um mundo de (axiomático) formal, construindo conhecimento formal em sistemas axiomáticos especificados por definições em teoria dos conjuntos, cujas propriedades são deduzidas por provas matemáticas.

Nesse sentido, para Tall (2013), no mundo conceitual corpóreo, encontram-se representações mentais, visuais e físicas relacionadas aos conceitos matemáticos, além do mais, é abrangida a ideia de espaço e forma. O mundo operacional simbólico, em contrapartida, consiste na utilização de símbolos e notações, sejam estas referentes à aritmética, ao cálculo ou à álgebra, sendo nesse mundo introduzida a noção de números. Por sua vez, o mundo axiomático formal consiste em teorias, fórmulas e demonstrações matemáticas a partir de definições com base em objetos conhecidos para alcançar conceitos formais fundamentados por definições e axiomas. É relevante observar que esses mundos não existem de maneira isolada e, pelo contrário, compartilham interseções entre si, indicando uma interconexão complexa no panorama do pensamento matemático.

Aprofundando sua teoria dos três mundos, Tall (2020) também classifica os limites de funções reais em três categorias principais, o limite prático, o limite teórico e o limite formal. De acordo com o pesquisador:

> O limite prático é o resultado de uma aproximação calculada numericamente, simbolicamente ou visualmente. É um objeto que surge como uma aproximação próxima. Visualmente, o objeto limite incorporado pode geralmente ser visto. […] É uma incorporação visual prática em que a sequência de aproximações práticas se estabiliza no objeto limite. Dá um significado humano que pode se desenvolver em interpretações mais sofisticadas. O limite teórico é o objeto que surge do processo (infinito) de estabilização. É o objeto que o processo de aproximação busca atingir 'tanto quanto necessário'. O limite formal, em todos os casos, é definido em termos das definições e provas quantificadas como epsilon-delta ou epsilon-N (Tall, 2020, p. 15, tradução própria).

De modo a aprofundar nossa compreensão na teoria dos Três Mundos na Matemática e as classificações dos limites, também iremos considerar os conceitos de Pensamento Matemático Elementar (PME) e o Pensamento Matemático Avançado (PMA), definidos por Tall (1995). Embora Torrente e Reis (2023) salientam não existir uma concepção unívoca desses conceitos, ateremos aos trabalhos de Tall (1995, 2013), que caracteriza as duas categorias essenciais.

De acordo com Tall (1995), o PME se mostra uma categoria fundamental no decorrer do estudo da abordagem da matemática. Nesse modo de pensar, a generalização se apresenta como ferramenta essencial para conceber novas ideias. Isso se dá devido ao desenvolvimento de conceitos iniciais de forma a se construir uma base robusta para se permitir uma eventual assimilação e aplicação de conhecimentos matemáticos mais avançados.

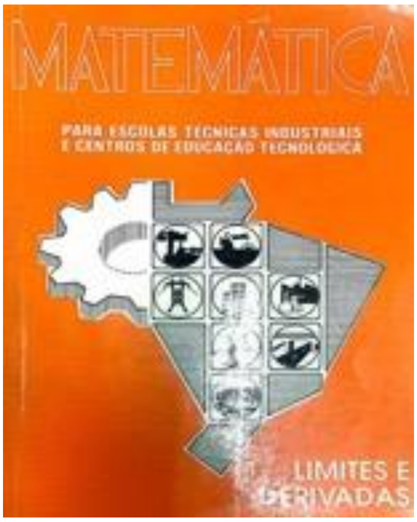
Por outro lado, o pesquisador propõe que o PMA não precisa seguir a mesma lógica para a criação de ideias matemáticas. Isso é explicado pela forma como o aluno passa a relacionar ideias inicialmente desconexas. Desse modo, Tall defende que é nessa etapa que se desenvolve um pensamento abstrato e analítico acerca de novas concepções. Devido à importância dessas teorias para se discutir o desenvolvimento do conhecimento matemático dos estudantes, elas serão nossa lente teórica para analisar as mobilizações entre os diferentes mundos anteriormente apresentados.

2. DESENVOLVIMENTO

O fascículo de Limites e Derivadas, analisado neste trabalho, foi publicado em 1991 e produzido por cinco autores de dois CEFETs, os professores Silvimar Fábio Ferreira e João

Bosco Laudares, de Minas Gerais; Luiz de Gonzaga Vieira, Pedro César Rocha Coimbra e Valdemar Pereira Lopes, de Goiás. Além deles, nove colaboradores auxiliaram na revisão do texto, os professores Adilson Lopes de Oliveira, Aquiles Leite Nascimento, Adélio Cândido Pimenta, Antônio Luiz Pereira Lauriano, Arnaldo Stochiero, Edina Santiago Garcês, Francisco Charles T. de Vasconcelos, Paulo Agostinho Alessio e Shigueki Hara.

Figura 02 - Capa do fascículo Limites e Derivadas



Fonte: Ferreira et al. (1991)

Iniciando-se uma leitura do texto, pode-se ver que o fascículo está dividido em 17 capítulos, dos quais sete são dedicados ao estudo completo de limites e continuidade de funções reais, enquanto os dez restantes apresentam derivadas e suas aplicações. Os autores organizam o conteúdo de limites nos seguintes capítulos: Limites de uma Função, Cálculo de Limites Laterais, Limites no Infinito, Limites Infinitos, Assíntotas Horizontais e Verticais, Limites Notáveis e Funções Contínuas. Já o conteúdo de derivadas é estruturado nos capítulos: Derivadas, Propriedades de Derivadas, Derivada de uma Função Composta - Regra da Cadeia, Taxas de Variação Relacionadas, Derivação Implícita, Derivadas das Funções Logarítmicas e Exponenciais, Derivadas das Funções Trigonométricas Inversas, Derivadas Sucessivas, Máximos e Mínimos, e Aplicações Práticas dos Máximos e Mínimos. Essa organização busca proporcionar uma abordagem completa e integrada desses conhecimentos.

Os autores também buscam apresentar esses conteúdos de acordo com a metodologia estabelecida no prefácio, a qual é direcionada ao ensino profissionalizante. Essa proposta visa a reduzir a memorização superficial e aumentar o raciocínio alinhado a interpretações gráficas de funções, visando, assim, a promover novas soluções geométricas para problemas. O fascículo também enfatiza o estudo de áreas da geometria e a aplicação dos conceitos matemáticos abordados em conteúdos da física e em disciplinas específicas dos cursos técnicos.

É importante notar que, no decorrer desta investigação, embora um capítulo específico seja usado como base para nossa análise, as reflexões apresentadas ao longo deste trabalho procuram abranger toda a amplitude dos conteúdos do fascículo, não se limitando a uma única parte. Assim, buscamos garantir que esta abordagem adotada proporcione uma compreensão abrangente dos temas, assegurando que os resultados e as conclusões abarquem de maneira concisa e completa todo o material estudado.

A respeito do método de ensino dos conteúdos apresentados pelos autores, é notável a preferência por um primeiro contato intuitivo, aderindo à proposta metodológica principal apresentada anteriormente. Alinhando-se a tal abordagem, observamos que os primeiros contatos com os conceitos são frequentemente explorados por meio de tabelas e de representações gráficas. Como no exemplo seguinte (Fig. 3) que, por meio de uma tabela organizada a partir da função afim f(x)=2x+1 e sua variável real x, é esboçada uma primeira aproximação ao limite da função.

Figura 03 - Exemplo de tabela escolhido pelos autores

Exemplo:

Seja a função f definida por $f(x) = 2x + 1$ e calculemos $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

Consideremos valores de **x** próximos de 2, porém menores que 2, e calculemos os correspondentes valores da função:

x	1,5	1,7	1,9	1,95	1,99	1,999	→ 2
f(x)	4	4,4	4,8	4,9	4,98	4,998	→ 5

O valor de **x** está se aproximando de 2 através de valores menores que 2, enquanto o valor de f(x) se aproxima de 5.

Simbolicamente exprimimos este fato escrevendo

Fonte: Ferreira et al. (1991, p. 9)

Conforme pode ser observado na Figura 3, os autores optaram por iniciar a abordagem das noções de limites apoiada por uma tabela, progredindo visualmente na construção do conceito de limite e, assim, apoiando a representação simbólica já apresentada. Em seguida, para concluir a análise, uma representação gráfica é introduzida, seguida pela generalização e pela apresentação do conceito que os autores visavam a abordar, desta vez, porém, mais formalizado(Fig. 4).

Figura 04 - Representação gráfica do limite exposto

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 5 \qquad (1)$$

Consideremos, agora, valores de x próximos de 2, porém maiores que 2

x	2,5	2,1	2,01	2,001	2,0001	→ 2
f(x)	6	5,2	5,02	5,002	5,0002	→ 5

. x está se aproximando de 2 pela direita
. f(x) está se aproximando de 5.

Simbolicamente exprimimos este fato escrevendo

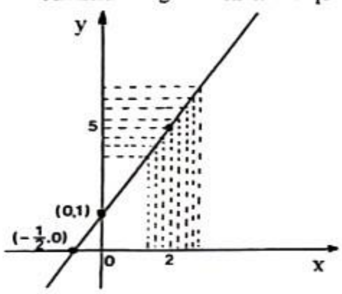
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 5 \qquad (2)$$

De (1) e (2), temos que $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = 5$

e, escrevemos então

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 5 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to 2} (2x + 1) = 5$$

Analisando graficamente o que foi exposto, temos:



Vemos que a medida que o valor de x se aproxima de 2, seja pela direita, seja pela esquerda de 2, f(x) se aproxima de 5.

Generalizamos tal fato, escrevendo que

$$\lim_{x \to a} f(x) = N \iff \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = N$$

Fonte: Ferreira et al. (1991, p. 10)

A ordem pela qual o conteúdo é apresentado ao leitor expressa que a exemplificação do tema parte de uma noção intuitiva, evoluindo progressivamente em direção a uma definição de viés operacional simbólico. A escolha de não realizar uma formalização, duranteo primeiro contato com o conceito, repercute com o processo de mobilização do pensamento matemático do nível elementar (PME) ao avançado (PMA), conforme proposto por Tall(1995, 2013). Assim, essa abordagem permite que os estudantes assimilem os conteúdos de modo analítico e aprofundado, buscando progredir de uma simples memorização para o iníciodo domínio abstrato dos conceitos e a compreensão dos processos subjacentes a axiomas gerais.

Conforme o pensamento matemático se torna mais sofisticado, há uma transição de operações em tempo real para a concepção de objetos mentais que podem ser manipulados simbolicamente (Tall, 2013). Isso é fundamental para lidar com a complexidade crescente do simbolismo ao longo do desenvolvimento matemático, o que é proporcionado aos estudantes no decorrer da leitura e também reforçado nos exercícios propostos pelos autores.

Alinhando-se, também, à teoria de Tall (2020) sobre o pensamento matemático a longo prazo relacionado ao cálculo, os autores do fascículo apresentam, no início, uma noção de limites que Tall define como prático. Isto é, com aproximações calculadas numericamente, simbolicamente ou visualmente. No decorrer do texto, busca-se aproximar o estudante do limite teórico, um objeto cujo processo de aproximação tende infinitamente. Finalmente, busca-se aproximar e introduzir ao leitor o limite formal, mesmo que, no texto, os autores não abordem a formalização do limite por epsilon-delta.

Em relação às imagens e às representações gráficas, apresentadas no processo de exemplificação e nos primeiros contatos com o conteúdo, Tall (2013) as situa no cruzamento dos mundos conceitual corpóreo e operacional simbólico. Por meio dessa interseção, osautores do fascículo combinam características de ambos os domínios e enriquecem tanto o escopo quanto a forma do conteúdo apresentado. Desse modo, ao trafegar por essas interseções, os autores propõem, ao estudante, novos meios de olhar para o mesmo cenário matemático, mesclando diferentes abordagens e solidificando, implicitamente, um modo de pensar avançado que reconhece a pluralidade das concepções matemáticas.

Outro exemplo que ilustra como os autores apresentam novos conteúdos está na introdução dos limites infinitos. Novamente, propondo funções e utilizando-as como exemplos, ele capacita os leitores a conceituar, por meio de representações corpóreas e simbólicas, preparando-os para, futuramente, apresentar uma definição que se aproxima da axiomática formal, ainda nessa mesma seção (Fig. 5).

Figura 05 - Introdução aos limites infinitos

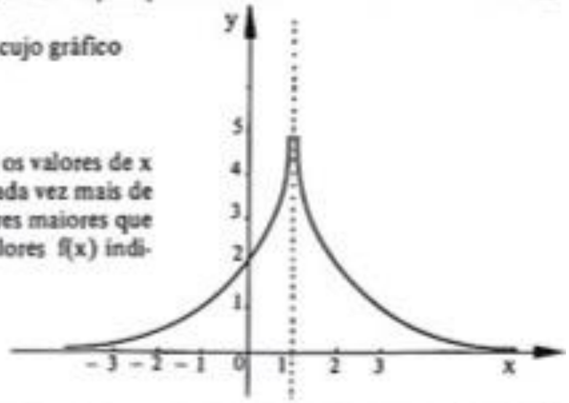
4. LIMITES INFINITOS

4.1 INTRODUÇÃO

Consideremos as seguintes funções para conceituarmos os limites infinitos:

a) $f(x) = \dfrac{2}{(1-x)^2}$, cujo gráfico é mostrado.

Se considerarmos os valores de x se aproximando cada vez mais de 1, através de valores maiores que 1, obtemos os valores f(x) indicados na tabela.



x	4	3	2	$\frac{7}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{11}{10}$	$\frac{101}{100}$ $\to 1^+$
f(x)	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{32}{9}$	8	32	50	200	20000 $\to +\infty$

Observamos que quando o valor de x se aproxima cada vez mais de 1, pela direita, o valor f(x) cresce ilimitadamente. Simbolicamente, escrevemos:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \text{ ou } \lim_{x \to 1^+} \frac{2}{(1-x)^2} = +\infty$$

o que significa, que podemos tornar f(x) tão grande quanto desejarmos, bastando para isto, tomarmos valores de x suficientemente próximos de 1, maiores que 1.

Fonte: Ferreira et al. (1991, p. 32)

Tall (2020) também discute o meio pelo qual estudamos com o objetivo de compreender a matemática a longo prazo, trazendo análises sobre o cérebro humano e alinhando-se a uma área biológica do processo de aprendizagem. As estratégias traçadas nessa teoria tangenciam algumas das abordagens metodológicas utilizadas pelos autores, tais como a construção do conceito de limites em seus diferentes níveis (teórico, formal, prático), o uso de representações dinâmicas visuais no processo de fixação do cálculo e a mobilização do PME para o PMA por meio de exercícios.

Retomando uma visão global sobre o conteúdo, podemos observar que a metodologia empregada ao longo do conteúdo de limites estabelece bases e fundamentos sólidos para os capítulos de derivadas subsequentes. Conforme ilustrado na imagem abaixo (Fig. 6), há uma continuidade da predominância do uso de representações visuais, gráficas e simbólicas. No entanto, diferente da abordagem inicial sobre limites, há uma complexidade matemática maior nos capítulos sobre derivadas, assumindo que o leitor já tenha conhecimento sobre ferramentas previamente apresentadas. Tal grau de complexidade reflete também em novas mobilizações entre os mundos, predominantemente, naquelas em direção ao mundo axiomático, uma vez que, em pouco tempo, os autores já introduzem definições formais do conteúdo de derivadas.

Figura 06 - Introdução a derivadas

8.2 CONCEITUAÇÃO

Situação problema: seja dado um móvel cuja equação horária é $s = 3t^2 - 4$, e desejamos determinar sua velocidade no instante $t = 2s$.

Vejamos a conceituação de derivada e a possibilidade de, através da mesma, apresentarmos uma solução para a situação-problema.

Dada a função $y = f(x)$, os valores da variável y dependem dos valores da variável x. Desta forma, atribuindo um valor para x, estaremos determinando um valor para y. Nestas circunstâncias, dando a x um acréscimo Δx, o mesmo acarretará num acréscimo Δy, em y, que depende da expressão da função, ou seja,

$$y = f(x) \Rightarrow y + \Delta y = f(x + \Delta x) \Rightarrow \Delta y = f(x + \Delta x) - y$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Podemos então, calcular a razão $\Delta y/\Delta x$, denominada razão incremental e obtemos a taxa média de variação de y em relação a x no intervalo $[x; x + \Delta x]$.

Calculando o limite desta razão incremental quando Δx tende a zero, obtemos a taxa instantânea de variação de y em relação à x, no ponto $(x, f(x))$. Este limite, quando existe é, chamado derivada de y em relação a x, que denotamos por y' ou $f'(x)$. Em símbolos,

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

que é a formula geral de derivação.

8.2.1 Notação

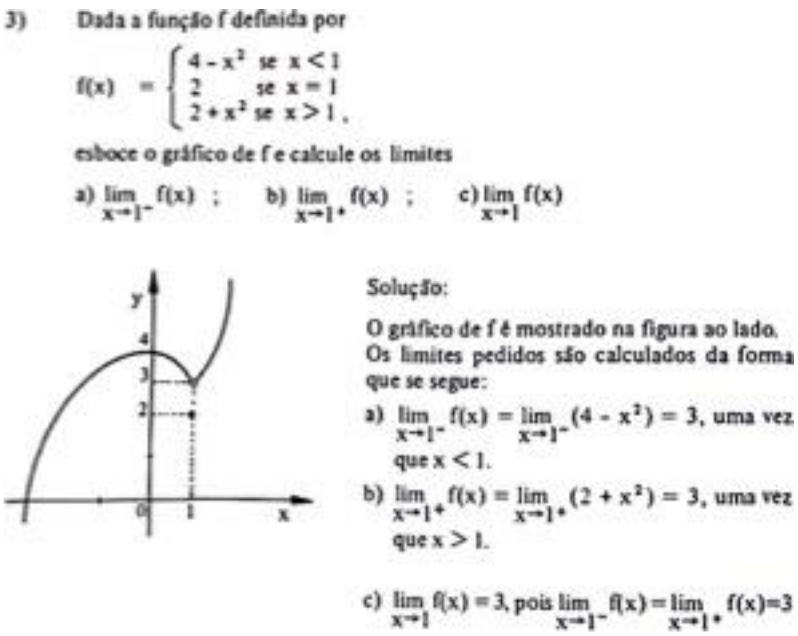
Para designar a função derivada da função $y = f(x)$ em relação à sua variável independente x, utilizamos os símbolos y', $f'(x)$, $\frac{df}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$, $D_x f$, $D_x y$.

Fonte: Ferreira et al. (1991, p. 57)

Na introdução de derivadas, pode-se notar uma preocupação dos autores com uma breve apresentação da historiografia da área, discutindo rapidamente o contexto de surgimento do Cálculo Diferencial e Integral (CDI). Também é notável que, neste primeiro contato, os autores trazem exemplos de aplicações, buscando situar o leitor sobre como o conteúdo abordado tangencia as matérias técnicas. Em função disso, são apresentados exemplos como o do gradiente de uma estrada (Ferreira et al., 1991, p. 56), que relaciona a razão composta pela variação da medida da cota, no exemplo representado pelo eixo das ordenadas, em relação à variação da distância, representado pelo eixo das abscissas. Nesse exemplo, por meio de representações corpóreas, como apresentado por Tall (2013), os autoresrelacionam o gradiente de uma estrada diretamente à derivada da cota em relação ao eixo das abscissas.

Prosseguindo com a ideia de um processo contínuo de compreensão dos conceitos, vale considerar a forma com que é feito o desenvolvimento dos exercícios e dos problemas propostos no decorrer do livro. Para praticar o uso de limites e derivadas, os autores desenvolvem uma série de desafios para o leitor, nos quais as abordagens apresentadas podemser colocadas à prova. Complementando essa prática, muitas vezes, após a proposta deexercício, a solução é apresentada pelos autores (Fig. 07). Com isso, o estudante pode praticaro método de resolução e resolver suas dúvidas com os exemplos dos autores.

Figura 07 - Exercício com resolução



3) Dada a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{se } x < 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \\ 2 + x^2 & \text{se } x > 1, \end{cases}$$

esboce o gráfico de f e calcule os limites

a) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$; b) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$; c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

Solução:

O gráfico de f é mostrado na figura ao lado. Os limites pedidos são calculados da forma que se segue:

a) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (4 - x^2) = 3$, uma vez que $x < 1$.

b) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2 + x^2) = 3$, uma vez que $x > 1$.

c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$, pois $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 3$

Fonte: Ferreira et al. (1991, pp. 12)

Analisando os exercícios propostos no decorrer da obra, também vale notar que eles se apresentam de diversas maneiras. Muitos exercícios assumem um caráter de fixação, por meio de uma repetição de exercícios, muitas vezes em formato de lista de problemas (Fig.08). A partir disso, pode-se notar uma adequação quanto à ideia de Tall (2013) de que a mobilização de conhecimentos matemáticos nos Três Mundos da Matemática deve ser reforçada por meio da memorização e da repetição.

Figura 08 - Exercício escolhido pelos autores

E.1 Com auxílio do gráfico, mostre que:

a) $\lim_{x \to 2} (x - 1) = 1$ b) $\lim_{x \to 1} (x^2 - 4) = -3$ c) $\lim_{x \to 0} (x + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

d) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x = 1$ e) $\lim_{x \to 1} x^3 = 1$ f) $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$

g) $\lim_{x \to 2} [\log_2 x] = 1$ h) $\lim_{x \to 1} 2^x = 2$ i) $\lim_{x \to 1} [\log_{\frac{1}{2}} x] = 0$

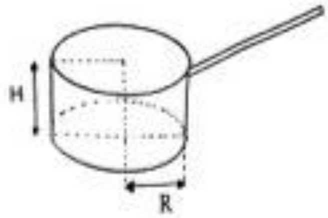
Fonte: Ferreira et al. (1991, p. 13)

No entanto, os exercícios propostos pelos autores não se limitam apenas a listas de repetição, nas quais a aplicação do mesmo princípio para encontrar a solução em todos os casos é incentivada. Em vez disso, também são inclusas atividades que desenvolvem o ferramental da parte prática, tangenciando áreas como física, eletrônica e outras disciplinas dos cursos técnicos das instituições para as quais o fascículo foi planejado (Fig. 9).

Figura 09 - Exercício prático

Problema da Panela

Deseja-se fabricar uma panela de alumínio, cilíndrica, por meio de uma folha metálica de superfície S. Calcular a relação que deve existir entre a altura H e o raio R para que o volume seja máximo. Supõe-se não haver perda alguma de metal, que sua espessura permanece constante e que não há tampa.



É preciso anular a derivada do volume; este é $V = \pi R^2 H$, mas R e H sendo duas variáveis, é necessário expressar o volume em função de uma só variável. Ora, a superfície total é $S = \pi R^2 + 2\pi RH$, donde

$$H = \frac{S - \pi R^2}{2R}$$

Levando-se em V:

$$V = \pi R^2 \left(\frac{S - \pi R^2}{2\pi R}\right) = \frac{R}{2}(S - \pi R^2)$$

$$V = \frac{RS}{2} - \frac{\pi R^3}{2} = f(R)$$

donde

$$V' = \frac{S}{2} - \frac{3\pi R^2}{2} = 0$$

Do que resulta $S = 3\pi R^2$ e $R = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$

Mas, $S = \pi R^2 + 2\pi RH$

Logo, $\pi R^2 + 2\pi RH = 3\pi R^2$

$2\pi R^2 = 2\pi RH \quad \therefore \quad \boxed{R = H}$

$V'' = -\frac{6\pi R}{2} = -3\pi R < 0$, trata-se de um MÁXIMO de volume.

Fonte: Ferreira et al. (1991, pp. 120-121)

Por meio dessa abordagem, pode-se notar uma preocupação dos autores em relacionar os conceitos que estão sendo estudados a aplicações práticas desses mesmos conceitos. Tal preocupação reflete uma intersecção entre os mundos corpóreo e simbólico. Essa interação se alinha com Tall (2013) que enfatiza a importância da conexão entre diferentes representações matemáticas. Ao integrar problemas práticos e contextos reais nos exercícios propostos, os autores promovem uma compreensão mais aplicada dos conceitos matemáticos, contribuindo positivamente para a mobilização do PME para o PMA. Esses exercícios estão presentes em ambos os conteúdos de limites e derivadas do fascículo, sendo mais frequentes na seção de derivadas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Tomando como base as perspectivas de Tall (1995, 2013) a respeito dos Três Mundos da Matemática e do Pensamento Matemático Elementar e Avançado, é possível traçar uma análise a respeito da metodologia de ensino abordada no fascículo produzido pelo ENCONAM. Uma exploração dos capítulos introdutórios dos conceitos de Limite e Derivada permite que se encontre um método comum para a apresentação e para o desenvolvimento desses conteúdos. Em ambos os casos, os autores trazem uma apresentação intuitiva, demonstrando os conceitos por meio de elementos como gráficos e tabelas. Após uma introdução corpórea, éusada uma abordagem simbólica para desenvolver o tema e se alcançar um formalismo. No entanto, vale notar que o formalismo assume um papel secundário para a construção do entendimento de limite e derivada, com a abordagem assumindo, em primeiro plano, um caráter corpóreo simbólico.

Também vale notar que os exercícios propostos pelos autores colaboram para essa metodologia de ensino. Isso se dá devido à forma com que eles são estruturados, exigindo uma conceitualização gráfica do problema para, então, buscar-se um resultado. Em conjunto a isso, as listas de problemas assumem um papel de repetição, exigindo que o estudante-leitor trabalhe os conceitos por meio dessa estratégia intuitiva.

Podemos observar que, após a análise do fascículo a partir das teorias de Tall (1995, 2013, 2020), há uma notável presença de representações visuais dinâmicas pertencentes a uma interligação entre os mundos corpóreo e simbólico, principalmente nos primeiros contatos com os conteúdos. Essas representações, além de se alinharem à proposta inicialmente estabelecida no prefácio, buscam atingir um maior potencial axiomático, visando a diminuir a memorização e aumentar o potencial indutivo e analítico. Também podemos ver que, pela estrutura do texto analisado, há potencial para a mobilização do PME para o PMA no estudante-leitor, o que é embasado, não apenas pelos textos que apresentam os conteúdos, mas também pelos exercícios no final das seções e dos capítulos.

Os autores cumprem, de maneira geral, o que foi estabelecido na proposta metodológica no que toca ao meio pelo qual o conteúdo foi passado, isto é, uma apresentação de conceitos voltada ao ensino profissionalizante. Entretanto, ainda há espaço para discussões acerca da efetividade dos exercícios que buscavam alinhar aplicações práticas e técnicas.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao CEFET-MG e à FAPEMIG pelas bolsas de pesquisa concedidas, que foram essenciais durante todo o processo de produção deste artigo. Esse suporte permitiu a dedicação necessária para realizar uma análise aprofundada e detalhada do fascículo estudado, cumprindo os objetivos propostos no início do trabalho e estimulando a manutenção da qualidade da pesquisa.

REFERÊNCIAS

Chamon, C. S., & Nascimento, A. O. (2011). *Inventário do acervo da Escola de Aprendizes e Artífices de Minas Gerais: 1910-1943*. Belo Horizonte (MG): CEFET MG.

Ferreira, S. F., Laudares, J. B., Vieira, L. G., Coimbra, P. C. R., & Lopes, V. P. (1991). *Matemática para Escolas Técnicas Industriais e Centro de Educação Tecnológica - Limites e Derivadas*. Belo Horizonte (MG): CEFET MG.

Fonseca, N. L., Lara, O. G. A., Pagani, E. M. L., & Oliveira, D. P. (2024). A Indeterminações nos materiais didáticos do CEFET-MG: um estudo histórico de 1970 aos tempos atuais. *Intermaths*, *5*(1), 131-144. https://doi.org/10.22481/intermaths.v5i1.14965

Gil, A. C. (2002). *Como elaborar projetos de pesquisa* (4ª ed.). São Paulo: Atlas.

Maciel, A. R. B., & Sá, L. C. (2020). Uma análise de materiais didáticos produzidos por professores de Matemática da Educação Profissional entre 1980 e 1996. *TANGRAM - Revista De Educação Matemática*, *3*(4), 114–133. Disponível em: https://ojs.ufgd.edu.br/index.php/tangram/article/view/12635. Acesso em: 22 de agosto de 2023.

Oliveira, D. P. A., Pagani, E. M. L., & Teixeira, A. C. (2023). O ensino de Cálculo Diferencial e Integral nas Prescrições Curriculares para o Ensino Médio Técnico no CEFET MG. In *XVI Congresso Iberoamericano de Educación Matemática*, Lima, Peru (pp. 86-93).

Silva, C. M. S. da. (2023). Limites: uma breve passagem nos livros brasileiros do Ensino Secundário. *ACERVO - Boletim do Centro de Documentação do GHEMAT-SP*, *5*, 1–25. https://doi.org/10.55928/ACERVO.2675-2646.2023.5.87. Disponível em: https://ojs.ghemat-brasil.com.br/index.php/ACERVO/article/view/87. Acesso em: 10 de novembro de 2023.

Silva, C. M. S. da. (2023a). A função derivada em livros didáticos para o Ensino Secundário. *ACERVO - Boletim do Centro de Documentação do GHEMAT-SP, 5,* 1–19. https://doi.org/10.55928/ACERVO.2675-2646.2023.5.126. Disponível em: https://ojs.ghemat-brasil.com.br/index.php/ACERVO/article/view/126. Acesso em: 10 de novembro de 2023.

Tall, D. O. (1995). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. In D. O. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 3-20). New York: Cambridge University Press.

Tall, D. O. (2013). *How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics*. New York: Cambridge University Press.

Tall, D. O. (2020a). *Making sense of mathematical thinking over the long term: The framework of three worlds of mathematics and new developments*. Warwick: The University of Warwick.

Tobies, R. (2019). *Felix Klein: Visionen für Mathematik, Anwendungen und Unterricht*. Berlim: Springer Spektrum-Verlag.

Torrente, C. R., & Reis, F. da S. (2023). A mobilização de processos do Pensamento Matemático Avançado na resolução de questões da OBMEP. *Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 13*(2), 1-22.