



A matemática do ensino de frações equivalentes no *projeto HAPRONT* (1976)

The mathematics of teaching equivalent fractions in the HAPRONT project (1976)

Adriana Menegotto Nierri¹

Colégio Estadual do Campo Heitor Cavalcanti de Alencar Furtado – Secretaria Estadual de Educação do Estado do Paraná
adriana.menegotto@yahoo.com.br



Lattes: <http://lattes.cnpq.br/9615517412907432>



Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-1888-9755>

Barbara Winiarski Diesel Novaes²

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
barbaradiesel@gmail.com



Lattes: <http://lattes.cnpq.br/0374183564751938>



Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-7763-7777>

¹ Mestre em Ensino de Matemática pela Universidade Federal do Paraná campus Palotina (UFPR). Professora da rede pública de ensino (SEED, Tupãssi, Paraná, Brasil. Endereço para correspondência: Avenida Memória, 357, centro, Tupãssi, Paraná Brasil, CEP: 85945000. E-mail: adriana.menegotto@yahoo.com.br

² Doutora em Educação pela Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUCPR). Docente do Curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, Paraná, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Cristo Rei, 19, sala C302, Vila Becker, Toledo, Paraná, Brasil, CEP: 85902-490. E-mail: barbaradiesel@gmail.com.

RESUMO

O presente artigo teve por objetivo analisar a proposta para o ensino das frações equivalentes no módulo 9.4 “Operando com números fracionários” do Projeto HAPRONT (Habitação de Professores não Titulados) realizado no Estado do Paraná na década de 1970. Utilizando como categoria teórica a *matemática do ensino*, presente no ensino de frações equivalentes no manual e no relatório do Projeto HAPRONT, foi possível identificar a proposta que circulou no Paraná para o ensino e a formação do professor leigo que atuava nas escolas de 1ª a 4ª séries do Ensino de 1º grau em tempos da Matemática Moderna. O referencial teórico-metodológico ancorou-se na História Cultural e em estudos recentes de Moraes, Bertini e Valente (2021) no que tange ao conceito de *matemática do ensino* e seus elementos de categorização: *sequência, significado, graduação, exercícios e problemas*. O estudo nos possibilitou inferir que o manual pedagógico estabelece entre os números fracionários as relações de desigualdade, ordem e equivalência. Novos saberes de referência foram incorporados. Por meio das equivalências se formam as classes de equivalência e através dessas são realizadas as simplificações, as operações de adição e subtração com frações heterogêneas. A reta numérica foi considerada um processo visual importante para compreensão das classes de equivalência em que cada conjunto de frações equivalentes representa um mesmo número racional. Clélia Tavares Martins, autora dos módulos de matemática, possuía conhecimentos tanto da matemática escolar, quanto das metodologias de ensino, ou seja, um vasto conhecimento sobre a *matemática do ensino*, incorporando saberes de referência para ensinar as frações equivalentes articulados a elementos do “Movimento da Matemática Moderna”.

Palavras-chave: Matemática do ensino. Frações equivalentes. Projeto HAPRONT.

ABSTRACT/RESUMEN/RÉSUMÉ

The aim of this article was to analyze the proposal for teaching equivalent fractions in module 9.4 “Operating with fractional numbers” of the HAPRONT Project (Habilitation of Non-Tenured Teachers) carried out in the state of Paraná in the 1970s. Using the mathematics of teaching as a theoretical category, present in the teaching of equivalent fractions in the HAPRONT Project manual and report, it was possible to identify the proposal that circulated in Paraná for the teaching and training of lay teachers who worked in 1st to 4th grade schools in times of Modern Mathematics. The theoretical-methodological framework was anchored in Cultural History and in recent studies by Moraes, Bertini and Valente (2021) regarding the concept of teaching mathematics and its elements of categorization: sequence, meaning, graduation, exercises and problems. The study allowed us to infer that the teaching manual establishes relationships of inequality, order and equivalence between fractional numbers. New reference knowledge has been incorporated. Equivalence classes are formed through equivalences, and simplifications and addition and subtraction operations with heterogeneous fractions are carried out through these. The number line was considered an important visual process for understanding equivalence classes in which each set of equivalent fractions represents the same rational number. Clélia Tavares Martins, the author of the math modules, had knowledge of both school mathematics and teaching methodologies, i.e. a vast knowledge of the mathematics of teaching, incorporating reference knowledge to teach equivalent fractions articulated with elements of the “Modern Mathematics Movement”.

Keywords/Palabras clave: Word 1 Mathematics of teaching. Equivalent fractions. HAPRONT.

INTRODUÇÃO

Este artigo é parte do estudo realizado na dissertação intitulada “Uma Matemática Moderna do ensino de frações equivalentes, Paraná (1970-1980)” (Nierri, 2024), apresentada no Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências, Educação Matemática e Tecnologias Educativas (PPGCEMTE), da Universidade Federal do Paraná (UFPR) que objetivou caracterizar uma matemática moderna do ensino das frações equivalentes proposta em manuais escolares para a formação de professores dos primeiros anos de escolarização em circulação no estado do Paraná (1970 - 1980). O presente estudo se refere a Matemática Moderna do ensino de frações equivalentes que estava sendo veiculada no manual pedagógico do Projeto HAPRONT (Habilitação de Professores não Titulados) nos anos de 1970 no estado do Paraná, para a formação em serviço de professores não titulados. Durante o Movimento da Matemática Moderna o ensino das classes de equivalência e conseqüentemente as frações equivalentes, com foco na construção do número racional, foi feito “por meio de um exaustivo trabalho da equivalência de frações” (Moraes, Bertini & Valente, p. 54).

Compreender o conceito de equivalência é fundamental para que o estudante avance na compreensão dos números racionais. De acordo com Lamon (2012, p. 136), “[...] as crianças precisam de muitas experiências informais com frações antes de prosseguir para as operações formais de frações, porque precisam desenvolver algum senso de fração”. Isso quer dizer que o aluno precisa ter experiências que o ajudem a estabelecer conexões entre as frações, comparar, ordenar, estabelecer relações de equivalência, e saber julgar se as respostas encontradas são, ou não, razoáveis ao que se está sendo pedido, por exemplo: “Que parte de uma pizza” [...] requer uma resposta fracionária. Ao longo dos tempos, as frações equivalentes sempre foram ensinadas da mesma forma?

Considera-se que o estudo sobre as propostas para o ensino de frações equivalentes “merece uma análise histórica de modo a favorecer uma melhor compreensão da sua presença nas escolas ao longo do tempo” (Moraes, Bertini & Valente, 2021, p. 11).

Na década de 1970, o Governo do Estado do Paraná, com o intuito de diminuir a falta de professores com formação para ministrar aulas nas séries iniciais, cria o Projeto HAPRONT que foi executado pela Secretaria de Estado da Educação e Cultura do Paraná, através da Centro de Educação Técnico Profissional do Paraná (CETEPAR).

No que tange ao ensino de matemática foi um projeto pensado e desenvolvido para a formação do professor no estado do Paraná, dentro de um ideário do Movimento da Matemática

Moderna (MMM)³, com ênfase na Teoria dos Conjuntos, em seus conceitos, nas noções referentes as relações, as operações e as propriedades no uso da linguagem simbólica (Costa, 2013). Ao analisar o manual, identificamos uma proposta para ensinar as frações equivalentes, presentes na capacitação⁴ do professor leigo⁵ que atuava nas escolas de 1ª a 4ª séries do primário do Paraná em tempos da Matemática Moderna.

A relevância desse estudo se dá em identificar as ações realizadas na formação do professor leigo, através das normas e orientações para o desenvolvimento do sistema educacional de ensino, encontradas no Relatório I do Projeto HAPRONT (Paraná, 1979) de forma ampla e mais especificamente analisar as frações equivalentes propostas pelo projeto de formação dos professores (Martins, 1976).

O trabalho tem por objetivo analisar a proposta para o ensino das frações equivalentes no módulo 9.4 “Operando com números fracionários” do Projeto HAPRONT realizado no Estado do Paraná para a formação de professores dos primeiros anos de escolarização na década de 1970.

1. O MOVIMENTO PARANAENSE DA MATEMÁTICA MODERNA

O MMM alastrou-se nas décadas de 1960 e 1970 por países da Europa e das Américas, ganhando protagonismo internacional desde os debates⁶ da década de 1950, ocorridos nos Estados Unidos e nos encontros promovidos pela Organização Europeia de Cooperação Econômica (OECE) (Almeida, Novaes & Pinto, 2024).

Nos debates protagonizados por matemáticos, psicólogos, educadores, discutiu-se uma proposta programática para a matemática moderna, expressa por uma nova linguagem, a teoria de conjuntos, tendo como eixo central o conceito de estrutura matemática (Almeida, Novaes & Pinto, 2024, p. 130)

A modernização do ensino da matemática no Brasil repercutiu a partir de 1960, fruto de um movimento internacional, propagado por grupos de pesquisas de diferentes estados

³ A Professora Clélia Tavares Martins atuou no Instituto de Educação do Paraná em cursos de capacitação de professores pela Secretaria Estadual de Ensino do Paraná e fez parte do Núcleo de Estudo e Difusão do Ensino de Matemática (NEDEM) que foi o principal difusor do MMM no Paraná (Portela, 2009).

⁴ O termo capacitação equivale à formação continuada, em uma linguagem atual.

⁵ Essa era uma forma utilizada para se referir ao professor que atuava nos primeiros anos escolares sem habilitação para o magistério.

⁶Para mais informações sobre os debates consultar: Guimarães, H.M. (2007). Por uma matemática nova nas escolas secundárias: perspectivas e orientações curriculares da Matemática Moderna. In: W. R. Valente & J. M. Matos (Org.). A Matemática Moderna nas escolas do Brasil e de Portugal: primeiros estudos (pp.1-33). Da Vinci.

brasileiros. Nessa época chegam ao Brasil propostas para o ensino da Matemática Moderna, que propunham uma reforma curricular e dos métodos de ensino nos diferentes níveis de escolarização. O ideário da Matemática Moderna adentrou o espaço escolar de diversas formas, seja na tradução ou escrita de manuais pedagógicos, atualização de conteúdos em livros didáticos, congressos e cursos de aperfeiçoamento e capacitação para professores.

No Paraná, o NEDEM - Núcleo de Estudos e Difusão do Ensino da Matemática, foi o principal meio de divulgação do Movimento da Matemática Moderna. O grupo criado em 1962 era coordenado por Osny Antônio Dacol⁷ e suas atividades eram sediadas no Colégio Estadual do Paraná, do qual era diretor (Pinto & Ferreira, 2006). Nesse primeiro momento os estudos eram direcionados ao ensino ginásial⁸, somente em 1965 as ideias modernizadoras se voltaram para o ensino primário quando o professor Osny convidou um grupo de professoras para desenvolver e disseminar estudos sobre a matemática moderna nesse nível de ensino. O grupo que desenvolveu estudos e disseminou a Matemática Moderna nas séries iniciais era composto inicialmente por: “Clélia Tavares Martins, Esther Holzmann, Gliquéria Yarentchuk e Henrieta Diminski Arruda e Nelly Humphreys, sendo que a última participou do grupo por cerca de dois anos” (Portela, 2009, p. 74).

A participação do professor Osny Antonio Dacol em Congressos Brasileiros de Ensino de Matemática e sua relação com demais professores que buscavam as mesmas ideias de modernização do ensino “[...] trouxe ao Paraná a possibilidade de mudanças nas práticas de ensino da matemática” (Portela, 2009, p. 122).

Dentre os documentos encontrados nos arquivos do Colégio Estadual do Paraná, consta a convocação para professores assistirem a palestra “Novos Métodos do Ensino da Matemática”, proferida pela professora Stannard Alen, vinda de Surrey Inglaterra em 1964. Ainda há registros de aquisição de vários livros que pudessem aprofundar os estudos sobre a Matemática Moderna, além da presença de 25 professores paranaense no V Congresso Brasileiro de Ensino de Matemática, em 1966, conforme registro nos Anais (Pinto & Ferreira, 2006).

O NEDEM produziu uma coleção de quatro volumes, destinadas ao ensino ginásial, intitulada “Ensino Moderno da Matemática” em que “O título intencional da coleção era para

⁷ Nascido em 1930, formado em matemática pela Universidade Federal do Paraná. Foi diretor do Colégio Estadual do Paraná, coordenou, foi um dos fundadores do NEDEM e um dos principais representantes do Movimento da Matemática Moderna no Paraná (Pinto & Ferreira, 2006).

⁸ Na década de 1960, a organização dos níveis de ensino no Brasil era regida pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) de 1961 (Lei nº 4.024/61), a primeira LDB do país que estabeleceu os seguintes níveis: Educação Primária: Obrigatória e com duração de 4 anos, voltada para crianças entre 7 e 10 anos; Educação Secundária: Dividida em dois ciclos: Ginásio (4 anos) — equivalente ao atual ensino fundamental II e Colegial (3 anos) — equivalente ao ensino médio, com opções de formação geral ou técnica.

ressaltar que era o ensino, e não a matemática, que era moderna” (Pinto & Novaes, 2019, p. 325). Na década de 1970, as integrantes do NEDEM dos primeiros anos de escolarização apresentaram uma série composta por quatro livros, também intitulada “Ensino Moderno de Matemática”, destinada ao ensino primário que se configurou como uma importante iniciativa que marcou a disseminação do ensino da Matemática Moderna no Paraná.

De acordo com Pinto e Ferreira (2006), as duas⁹ coleções de livros didáticos produzidos pelo NEDEM, foram adotadas pelas escolas paranaenses por mais de duas décadas. Segundo Pinto e Ferreira (2006, p. 118) afirmam que “[...] a Coleção do NEDEM em circulação, os cursos e palestras sobre a nova forma de abordar os conteúdos, a proposta paranaense foi intensamente divulgada e assumida nas escolas”.

Percebe-se que as coleções de livros didáticos do NEDEM, foram um importante veículo de propagação do Movimento da Matemática Moderna no Paraná, mas, para além do material impresso, conforme Pinto e Ferreira (2006), o NEDEM proporcionou palestras e cursos para professores paranaenses que ocorreram na capital e no interior do estado e eram direcionados a professores que ministravam a disciplina de matemática em diferentes níveis de ensino.

Se a intenção do movimento era desestruturar a matemática tradicional, o NEDEM cumpriu sua missão, propiciando grandes discussões e oferecendo propostas concretas de reformulação curricular para a disciplina de Matemática. Com o trabalho desenvolvido pelo NEDEM intensificou-se a democratização da participação de professores em congressos, cursos e palestras, com isso imprimindo novos rumos à história da educação matemática paranaense. Professores de outros estados vinham à capital paranaense não apenas para proferirem palestras, também vinham participar dos cursos de férias, buscando atualizar-se e conhecer a proposta paranaense de Matemática Moderna (Pinto & Ferreira, 2006, p. 121).

O movimento paranaense proporcionou mudanças de currículos, com novos conteúdos a serem trabalhados. O grupo tinha como principal intenção modificar normas e práticas pedagógicas e formas de apropriação do conteúdo do ensino da matemática (Pinto & Ferreira, 2006).

Para Burigo (1989), o objetivo principal do Movimento da Matemática Moderna não era a mudança curricular, mas criar um momento de estudos, discussões, confronto de ideias entre educação e sociedade, ciência e tecnologia.

Esse período trouxe para a educação matemática mudanças, avanços em relação ao ensino, “[...] foram dados os primeiros passos para articularem o ensino da Matemática com o desenvolvimento científico e tecnológico” (Pinto & Ferreira, 2006, p. 121).

⁹ Uma destinada para o curso ginásial e outra para os primeiros anos de escolarização.

Com isso, pode-se dizer que o NEDEM teve um papel fundamental na difusão e implementação do Movimento da Matemática Moderna no Paraná. De acordo com Pinto e Ferreira (2006), Portela (2009), os integrantes do NEDEM foram persistentes, almejavam mudanças na forma tradicional de ensinar, para isso não mediram esforços para entregar um material de qualidade. No que tange a coleção de livros do ensino primário, “[...] o livro que era consumível, vinha acompanhado do livro do mestre com o direcionamento do trabalho” (Portela, 2009, p. 103). De acordo com Pinto e Ferreira (2006), o grupo juntamente com seu fundador, manteve, durante duas décadas, os professores paranaenses envolvidos com propostas modernas para o ensino de matemática.

O Movimento da Matemática Moderna paranaense pode ser caracterizado por suas mudanças no ensino de matemática. Destaca-se o grupo paranaense NEDEM dos anos iniciais, que elaborou uma coleção de livros didáticos de matemática com atividades experimentadas em sala de aula. As autoras da coleção ocupavam lugares no Instituto de Educação do Estado do Paraná, na Secretaria Municipal de Educação de Curitiba e na Secretaria de Educação do Estado do Paraná, entre outros. Logo, eram agentes tanto no ensino quanto na formação de professores da época. que, com base em experiências de sala de aula, elaborou propostas para o ensino da Matemática.

2. A MATEMÁTICA DO ENSINO DAS FRAÇÕES EQUIVALENTES

A formação de professores sempre foi motivo de discussões, em torno dos saberes específicos para a profissão de ensinar (Valente, 2017).

Em 2021, Moraes, Bertini e Valente escreveram o livro “A matemática no ensino de frações” trazendo uma nova hipótese teórica de pesquisa que articula a matemática *a* ensinar e a matemática *para* ensinar¹⁰, à *matemática do ensino*. Nesse contexto, a matemática *para* ensinar, refere-se “[...] à objetivação de um saber matemático” (Bertini, Moraes & Valente, 2017, p. 68), presente na formação profissional do professor que ensinará matemática, já a matemática *a* ensinar refere-se aos “saberes disciplinares” (Bertini, Moraes & Valente, 2017, p. 69), aquela ligada aos saberes objetivados, normatizados, disposta para o ensino.

¹⁰ Categorias de análise discutidas por Bertini, Moraes e Valente (2017), no livro “A matemática *a* ensinar e a matemática *para* ensinar: novos estudos sobre a formação de professores”.

Morais, Bertini e Valente (2021), ao pesquisador da cultura escolar¹¹ buscam uma nova perspectiva metodológica. A *matemática do ensino* interessa-se por questões epistemológica, levando em consideração os aspectos envolvidos na formação de professores e na dimensão do ensino em uma dada época.

Em oposição a esta ideia, a expressão *ensino da matemática*, está voltada para os desafios do campo disciplinar, “[...] para problemáticas postas pela transmissão de saberes dos campos disciplinares científicos para o interior do meio escolar” (Morais, Bertini & Valente, 2021, p.16).

Mais especificamente falando, “caberá estudar a matemática do ensino de frações, em lugar de tratar do ensino matemático das frações” (Morais, Bertini & Valente, 2021, p.13) em que é preciso uma análise sobre outra perspectiva: a escola não deve ser vista de fora. Os autores defendem que a escola é uma instituição produtora de saberes, que, ao longo do tempo, produziu uma *matemática do ensino*, mais especificamente, uma matemática do ensino de frações (Morais, Bertini & Valente, 2021).

Nesse caso queremos discutir a *matemática do ensino* de frações equivalentes, o significado dado pela escola na produção desse saber. Mas como se caracteriza a matemática do ensino de frações?

Uma forma de caracterizar essa matemática do ensino de frações é através da análise de manuais pedagógicos e de livros didáticos. Moraes, Bertini & Valente (2021) afirmam que tais documentos de diferentes épocas, possibilitam caracterizar as mudanças que ocorreram na matemática do ensino de frações, e são fundamentais para uma análise histórica e epistemológica. Para auxiliar na caracterização da *matemática do ensino* os autores propõem quatro categorias de análise: *sequência*, *significado*, *graduação*, e *exercícios e problemas*.

A *sequência* tem caráter histórico, muda de acordo com cada vaga pedagógica. É entendida como “o lugar ocupado pelas frações no conjunto dos temas da aritmética” (Morais, Bertini & Valente, 2021, p. 18), consideram que *sequência* é a estruturação de um dado conteúdo escolar indicada nos livros didáticos e manuais pedagógicos, busca compreender como o autor organizou o ensino de frações.

O *significado* é compreendido pelo “[...] modo como o professor deverá se referir a um dado tema da matemática do ensino, de maneira a introduzi-la em suas aulas, tendo em vista contato do aluno com um novo assunto” (Morais, Bertini & Valente, 2021, p. 18-19).

¹¹ Por cultura escolar entende-se “[...] um conjunto de normas que definem conhecimentos a ensinar e condutas a inculcar e um conjunto de práticas que permitem a transmissão desses conhecimentos e a incorporação desses comportamentos (Julia, 2001, p. 9).

Consideremos o significado dado às frações nos textos escolares, como esse tema é iniciado, ou seja, como se introduz um dado assunto da matemática para o aluno.

Para o termo *graduação* faz referência a “estruturação de uma dada rubrica escolar nos seus diferentes temas para o ensino [...] e está diretamente ligada a uma dada concepção de ensino e de aprendizagem de um dado assunto pelo aluno” (Morais, Bertini & Valente, 2021, p. 19). Essa categoria de análise indica um cuidado ao iniciar o ensino de um dado tema, no caso do ensino de frações. É a progressão no ensino das frações, o passo-a-passo que deverá ser seguido ao se trabalhar com o aluno.

Por fim os *exercícios e problemas*, esses “[...]remetem às respostas esperadas pelos professores relativamente ao que ensinaram sobre frações para seus alunos (Morais; Bertini & Valente, 2021, p. 19). Esses são propostos aos alunos após ou durante a realização do ensino, articulam-se com as escolhas do professor, os caminhos que foram trilhados para a realização do ensino, esses caminhos foram formados através da *sequência, significado e graduação*.

Essas categorias serão mobilizadas para caracterizar a matemática do ensino das frações equivalentes presente no referido manual.

3. A FORMAÇÃO DE PROFESSORES LEIGOS NO ESTADO DO PARANÁ E O PROJETO HAPRONT

No Paraná, estudos, relatórios e estatísticas realizados durante a década de 1970, apontam para uma grande quantidade de professores não habilitados que estavam em exercício do magistério no ensino primário, principalmente na Zona Rural (Paraná, 1979).

Na década de 1970, o MEC estabeleceu através do Plano Setorial de Educação e Cultura, o Projeto de Capacitação de Recursos Humanos para o ensino de 1º Grau no qual o Estado do Paraná foi selecionado como Unidade Federativa responsável por testar e desenvolver esse Projeto, que foi financiado pelo Salário Educação Quota Federal 1975/1979 e titulado como Projeto HAPRONT (Paraná, 1979).

O Projeto teve início em agosto de 1976, atendeu 1.100 professores não titulados e foi aplicado em 11 municípios do estado do Paraná, entre eles: Araucária, Cascavel, Colombo, Corbélia, Contenda, Laranjeiras do Sul, Lapa, Rio Branco do Sul, São Mateus do Sul, Nova Aurora e Telêmaco Borba.

O Objetivo Geral que moveu o Projeto HAPRONT foi “Elaborar e experimentar modelo de curso de habilitação à distância, em nível de 2º Grau¹², para professores não titulados, em exercício de 1ª a 4ª série” (Paraná, 1979, p. 01). Dentre os objetivos específicos “Habilita a nível de 2º grau 1020 professores não titulados, em exercício de 1ª a 4ª série” (Paraná, 1979, p. 02). Após dois anos, em 1978, o número de professores cursistas era 797, em 1979 concluíram o curso 721 professores.

O Projeto HAPRONT, destinou-se a professores leigos com formação até a quarta série, o material didático foi produzido no Paraná, por um grupo de 22 professores especialistas em diferentes disciplinas que compunham o currículo, que foram treinados em Tecnologia Instrumental, através de um curso realizado no CETEPAR, sob orientação do Professor Fernando Pizza, mestre nessa área, enviado pelo Ministério da Educação e Cultura, Departamento Ensino Fundamental, e Coordenação de Ensino (MEC/DEF – CODEN).

O projeto foi desenvolvido pelo ensino a distância, utilizando material de instrução, 250 módulos, permitindo que cada aluno progredisse de acordo com seu ritmo e tempo de estudo. Mensalmente realizava-se Encontros Pedagógicos entre cursistas e orientadores, para acompanhamento do desempenho e distribuição de módulos. As avaliações consistiam em pré-teste, pós testes, avaliações trimestrais, fichas de observações e estágio supervisionado.

O Projeto era dividido por módulos, a carga horária destinada a disciplina de Matemática, correspondia a 400 horas, distribuídas em 23 módulos, dentro de um total de 5.360 horas e 254 módulos. Os módulos referentes a disciplina de Matemática, ficaram sobre a responsabilidade de elaboração da professora Clelia Tavares Martins¹³, docente que fez parte do NEDEM. Apenas nos quatro últimos módulos referentes aos conteúdos de equação do 1º grau, sistemas de equação do 1º grau, equação do 2º grau e raciocínio dedutivo, teve a participação de Rosa Kazuco Miyasaki¹⁴ (Costa, 2013).

Os Módulos referentes a disciplina de matemática tem como temas: 9.0 Noções de Conjuntos, 9.1 Linguagem simbólica, 9.2 e 9.3 Operando com números naturais, 9.4 Operando

¹² Titulação que na atualidade corresponde ao Ensino Médio

¹³ Na década de 1960 atuou também como técnica no CEPE – Conselho de Ensino Pesquisa e Extensão. Nessa mesma década integrou o NEDEM, sendo uma das integrantes responsável pela produção de materiais didáticos para o ensino de matemática na escola primária. Na década de 1970 foi técnica da CELEPAR – Centro de Treinamento e Aperfeiçoamento de Professores do Estado do Paraná, e responsável pela elaboração do material utilizado no Projeto HAPRONT, ainda final dessa década e início dos anos de 1980 contribuiu com a produção de materiais para as escolas rurais do Paraná. De acordo com Costa (2020), foi considerada uma *expert*, devido sua atuação como produtora de livros didáticos nas décadas de 1970/1980. “Clélia se fez presente no cenário educacional paranaense e, especificamente, em relação ao ensino da matemática foi uma referência no contexto estadual, seja nos materiais destinados aos alunos, nas orientações oficiais para a organização do ensino ou na formação de professores que atuaram nos anos iniciais de escolarização” (Costa, 2020, p. 209). Para mais informações sobre *expert* pesquisar em: <https://www.ghemat.com.br/experts>.

¹⁴ “A autora também do “tratado Metodológico de Matemática”, destinado à capacitação de professores de matemática de 5ª a 8ª séries durante o período de Implementação da Reforma do Ensino de 1º grau no Estado do Paraná” (Costa, 2013, p. 184).

com números fracionários, 9.5 Operando com números decimais, 9.6 Linguagem simbólica, 10.0 Operando com conjuntos, 26 Produto cartesiano, 27 Operando com números naturais, 39 e 40 Noções de Geometria I e II, 58 e 59 Grandezas Mensuráveis I e II, 60 e 61 Operando com números, 80 Operando com números inteiros, 82 Operando com Proposições, 104 Linguagem Simbólica, 105 Equação de 1º grau com uma variável, 106 e 130 Linguagem simbólica, 131 Técnicas dedutivas.

Na apresentação dos módulos consta a informação que o material produzido se constitui em um instrumento de busca, que visa melhorar os padrões da formação profissional dos professores leigos do estado do Paraná. Sua metodologia é a educação a distância, preparado para habilitar professores de 1ª a 4ª séries, em exercício e sem titulação. O Projeto habilitava a nível de 2º grau, e os módulos eram encaminhados aos professores cursistas, para serem estudados em seus locais de trabalho.

O manual pedagógico “Operando com números fracionários” (Martins, 1976), têm como assunto a ser tratado no curso, conhecimento do conjunto de números fracionários, as quatro operações, e tem por objetivo, utilizar procedimento variados para demonstração de fatos e propriedades, operar com números fracionários, resolvendo situações-problema e utilizando suas propriedades e técnicas operatórias com precisão.

4. FRAÇÕES EQUIVALENTES NO MANUAL OPERANDO COM NÚMEROS FRACIONÁRIOS, PROJETO HAPRONT (MARTINS, 1976)

No manual “Operando com Números fracionário”, o conteúdo “números fracionários”, é apresentado como aquele que foi “[...] criado para representar a divisão de números naturais cujo resultado não é um número natural” (Martins, 1976, p.5). A *matemática do ensino* das frações equivalentes é tratada a partir da *sequência*, relação de equivalência entre números fracionários, entre números fracionários e número natural, entre número fracionário e número misto, seguindo para a equivalência a partir da simplificação de números fracionários, e das classes de equivalência, até chegar à equivalência entre conjuntos equipotentes e o número de elementos do conjunto. O conceito de frações equivalentes antecede o ensino das operações com números fracionários.

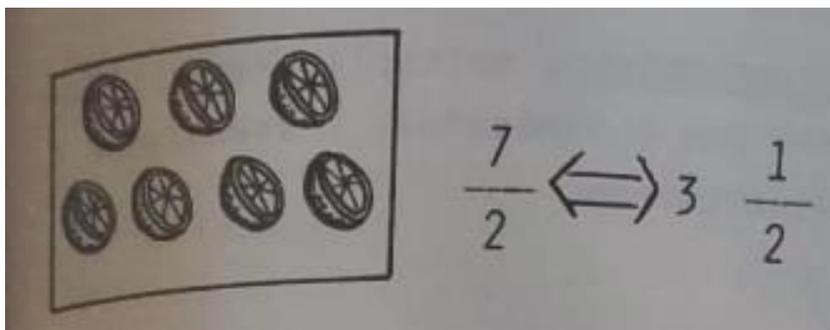
Dentro do conjunto dos temas da aritmética, a *sequência* estabelecida é: números naturais, operações com números fracionários e números racionais.

O ensino de frações equivalentes inicia-se com a definição “Os números fracionários que representam a mesma porção ou fração do todo são chamados equivalentes” (Martins, 1976, p.10), sendo este o *significado* dado as frações equivalentes. Essa definição vem acompanhada da imagem de um quadro de equivalência representando as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, e $\frac{1}{8}$, e as relações de equivalência: $\frac{1}{2}$ equivale $\frac{2}{4}$, $\frac{2}{4}$ equivale $\frac{4}{8}$, e que $\frac{1}{2}$ equivale a $\frac{4}{8}$, as relações de equivalência também são feitas para as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{6}{8}$.

A equivalência entre um número fracionário e número natural, tem início a partir de um conjunto de círculos, dois círculos divididos ao meio $\frac{4}{2}$ correspondem a 2 círculos inteiros, acompanhado do uso da linguagem simbólica pertence e não pertence. Apresenta a definição “entre o número fracionário e um número natural, dizemos que há uma relação de equivalência quando o numerador é múltiplo do denominador, ou melhor, é um produto do denominador” (Martins, 1976, p.11).

A relação de equivalência entre número fracionário e número misto se dá através da imagem de sete metades de uma laranja, sendo $\frac{7}{2}$, equivale a $3\frac{1}{2}$, indica que “Cada duas metades laranjas corresponde a uma laranja” (Martins, 1976, p.11).

FIGURA 1 – Relação de Equivalência entre Número Fracionário e Número Misto



FONTE: Martins (1976, p. 10)

Para determinar um número misto equivalente ao número fracionário, utiliza-se da regra “[...] divide-se o numerador pelo denominador. O quociente é o número natural; o resto da divisão é a quantidade de unidades fracionárias” (Martins, 1976, p.11), e para achar o número fracionário equivalente ao número misto utiliza do exemplo: “ $3\frac{1}{2}$, como a unidade fracionária é $\frac{1}{2}$, 3 unidades simples transformam-se em $\frac{6}{2}$, com mais $\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ ” (Martins, 1976, p.11). Em

seguida do exemplo apresenta a regra, multiplicar o denominador pelo número inteiro e somar com o numerador.

Percebe-se que a escrita das frações equivalentes em números misto e vice-versa, é apresentada pelo manual pedagógico 9.4, com ênfase no uso da regra. O conteúdo teve a utilização de desenhos ‘semiabstrato’¹⁵ seguidos da regra. Parece que, por ser um manual para formar professores, direcionado a um público adulto, a autora foi mais direta, não dando importância ao uso de ‘materiais concretos’, (uso de objetos) e ‘semiconcretos’ (recortes de figuras para manipulação).

Para a simplificação de números fracionários, o manual HAPRONT separa as frações em redutíveis e irredutíveis e apresenta que as frações são redutíveis quando podemos simplificar seus termos.

As classes de equivalência são tratadas a partir do quadro de equivalência, com as frações $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}$. Essas são formadas através da multiplicação de uma fração irredutível por números naturais, chegando à propriedade do número fracionário, “multiplicando ou dividindo ambos os termos de um número fracionário por um mesmo número natural, diferente de zero (0), obtém-se um número fracionário equivalente” (Martins, 1976, p.14).

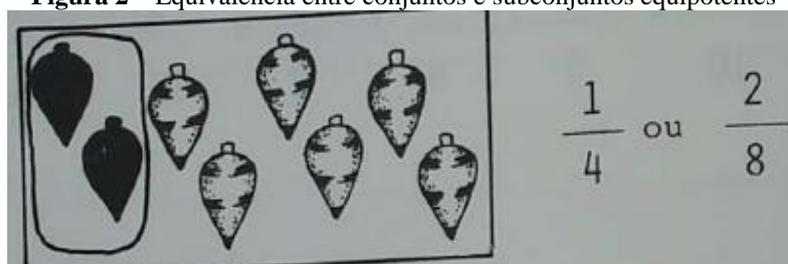
Para construção das classes de equivalência, indica utilizar o quadro de equivalência, figuras geométricas circulares, acompanhadas de *exercícios* de simplificação de frações, construção das classes de equivalência a partir de uma fração dada e frações equivalentes a partir das figuras geométricas circulares.

Na construção do conceito de frações equivalentes há uma *graduação* que segue uma progressão, quadros de equivalência, círculos divididos em partes congruentes, diagramas, subconjuntos equipotentes, reta numérica, apenas quando se trata de operações com frações aparecem outros polígonos além do círculo. A compreensão das frações equivalentes ocorre sem o auxílio do concreto e do semiconcreto, a graduação do ensino ocorre por meio de uma proposta semiabstrata (diagramas, imagens, dispositivo) progredindo para o abstrato, uso da regra do mínimo múltiplo comum.

Para a compreensão da equivalência entre subconjuntos equipotentes e o número de elementos do conjunto, o manual utiliza conjuntos com imagens de piões, bandeirinhas, ferraduras, flores. Através das imagens é possível, visualmente, estabelecer as equivalências, por exemplo, $\frac{1}{4}$ de oito piões, é equivalente a de oito piões.

¹⁵ O termo semiabstrato refere-se aos desenhos e semiconcreto aos recortes de figuras de flanelógrafo (Paraná, 1977)

Figura 2 – Equivalência entre conjuntos e subconjuntos equipotentes



Fonte: (Martins, 1976, p.16)

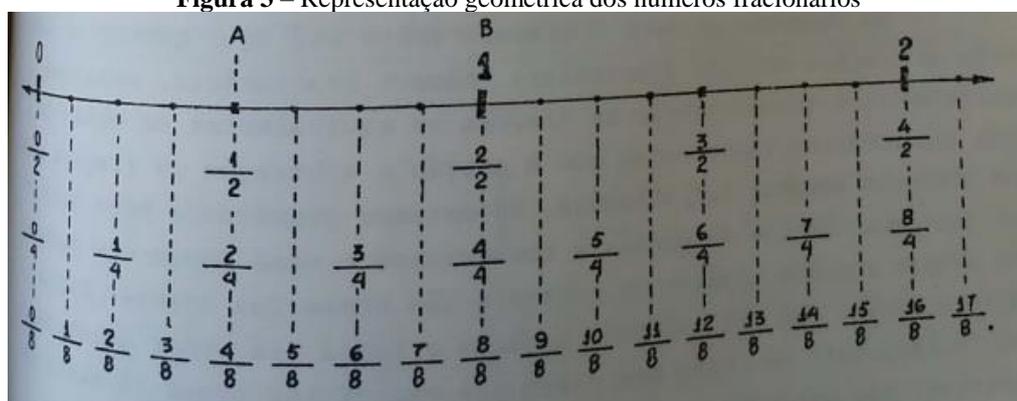
Assim percebemos que o ensino das frações equivalentes segue a *gradação*, por meio das relações de equivalência se formam as classes de equivalência. As relações de equivalência são construídas através de imagens de quadros de frações, círculos divididos em partes congruentes. As classes de equivalência podem ser percebidas através do quadro de equivalências, pela multiplicação de ambos os termos de uma fração por um mesmo número natural, através de círculos divididos em partes congruentes e em subconjuntos equipotentes.

Após a explanação de cada tópico dentro da *sequência* apresentada para tratar do conteúdo números fracionários, são apresentados *exercícios e problemas*, esses articulam-se com a proposta que foi apresentada para o ensino das frações, o mesmo acontece com relação as frações equivalentes.

Dentre os *exercícios e problemas* relacionados às frações equivalentes, destacamos o uso da reta numerada, para representar os números fracionários e as relações de ordem e equivalência. Também são apresentados *exercícios* com o uso do quadro de equivalência, onde dada uma fração, deve-se representar outra equivalente, mantendo o denominador indicado no exercício.

A representação geométrica do número fracionário aparece também na reta numerada Figura 3.

Figura 3 – Representação geométrica dos números fracionários



Fonte: (Martins, 1976, p. 27)

Observando a imagem da reta acima percebemos elementos como a representação do zero na fração $(0) - \frac{0}{2}, \frac{0}{4}, \frac{0}{8}, \dots$, a classe de equivalência do $1 - \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \dots$, entre outras equivalências.

A autora conclui que “Cada conjunto de frações equivalentes representa um número, o NÚMERO RACIONAL” (Martins, 1976, p. 28), e que, assim como no conjunto dos números naturais, cada número é um ponto na reta, no conjunto dos números racionais “[...] cada conjunto de frações equivalentes é um ponto na reta” (Martins, 1976, p. 28).

O uso da reta numerada para trabalhar o conceito de frações equivalentes, está presente em cinco das seis referências consultadas, que fazem parte da bibliografia do módulo 9.4: manual pedagógico “Métodos Modernos para Ensino da Matemática” (D’Augustine, 1981); “Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1º grau”, volume IV (Sanchez; Liberman, 1975); “Ensino Moderno da Matemática”, Volume II e III (Holzmann et al., 1974, 1975); “Ensino Moderno da Matemática”, Volume IV (Martins et al., 1975); e, “Frações na escola elementar” (Porto, 1967). Também está presente no manual pedagógico de Osório e Porto (1968). O uso da reta numérica para ensinar as frações equivalentes foi apropriada¹⁶ pela autora do módulo em análise e passa a fazer parte da matemática do ensino deste conteúdo.

Além disso, durante a apresentação dos conteúdos, por meio das classes de equivalência são estabelecidas relação de ordem, igualdades e desigualdades, simplificação e redução ao denominador comum, adição e subtração de frações não homogêneas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os resultados nos possibilitam afirmar que a autora do manual pedagógico se apropriou das ideias presentes na Matemática Moderna. Pode-se identificar o uso da linguagem simbólica como: diferenças e igualdade; se, e somente se; pertence e não pertence, o uso da palavra “congruentes”; o uso de conjuntos e subconjuntos equipotentes para reconhecer frações equivalentes.

Identificamos uma *sequência* para o ensino das frações equivalentes, destacamos que o manual utiliza da comparação de frações para chegar ao conceito de frações equivalentes. Assim como, as frações equivalentes antecedem o ensino de operações com frações. O

¹⁶ “A apropriação, tal como a entendemos, tem por objetivo uma história social das interpretações, remetidas para as suas determinações fundamentais (que são sociais, institucionais, culturais) e inscritas nas práticas específicas que as produzem” (Chartier, 1990, p. 26).

significado dado às frações equivalentes é apresentado como os números fracionários que apresentam a mesma porção do todo. A graduação tem início com o quadro de equivalência, desenhos de figuras geométricas (círculos), conjuntos e subconjuntos equipotentes, reta numérica, classes de equivalência, em construção de um conceito abstrato ao uso da regra. As propostas apresentadas para os *exercícios e problemas*, articulam-se com os caminhos que foram trilhados para o ensino, seguindo a mesma *graduação*.

A reta numérica foi considerada um processo visual importante para compreensão das classes de equivalência em que cada conjunto de frações equivalentes representa um mesmo número racional.

Acreditamos que o Projeto HAPRONT foi um importante meio para qualificar profissionais que estavam sem titulação. Clélia Tavares Martins, autora dos módulos de matemática, construiu uma “matemática do ensino”, incorporando saberes de referência para ensinar as frações equivalentes, articulando elementos do “Movimento da Matemática Moderna”.

REFERÊNCIAS

- Almeida, A. F., Novaes, B. W. D. & Pinto, N. B. (2024). Arquivo pessoal Osvaldo Sangiorgi e o Movimento da Matemática Moderna: possibilidades de pesquisas. In: Valente, W. R. (Org.). *Arquivos pessoais: memória científica e pedagógica do ensino de matemática no Brasil (1920-2020)*. 127-161, 1ed, v.1. Ghemat-Brasil.
- Bertini, L. F., Morais, R. S., & Valente, W. R. (2017). *A matemática a ensinar e a matemática para ensinar: novos estudos para a formação de professores*. 1 ed. Livraria da Física.
- Burigo, E. Z. (1989). *Movimento da Matemática Moderna no Brasil: Da ação e do pensamento de educadores matemáticos nos anos 60*. (Dissertação Educação área de ensino) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- Chartier, R. (1990). *A História Cultural entre práticas e representações*. Col. Memória e sociedade. Trad. GALHARDO, M. M. Bertrand Brasil.
- Costa, R. R. (2013). *A capacitação e aperfeiçoamento dos professores que ensinavam matemática no Estado do paraná ao tempo do Movimento da Matemática Moderna – 1961 a 1982*. (Tese em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica do Paraná. <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/1792>
- Costa, R. R. (2020). Clélia Tavares Martins e sua influência na forma o de professores e no ensino de matemática no Paraná: 1960 – 1980. **REMATEC** - Revista de Matemática, Ensino e Cultura. v. 15, n. 34, 195-211.
- D’Augustine, C. H. (1981). *Métodos Modernos para o Ensino de Matemática*. Trad. PERES, M. L. F.E. 4 ed. Ao livro Técnico S.A.

- Holzmann, E., Martins, C. T., Yaremtchuk, G., & Arruda, H. D. (1974). *Ensino Moderno da Matemática*. v. II. Editora do Brasil S/A.
- Holzmann, E., Martins, C. T., Yaremtchuk, G., & Arruda, H. D. (1975). *Ensino Moderno da Matemática*, vol. III. Editora do Brasil S/A.
- Julia, D. (2001). A Cultura escolar como objeto histórico. *Revista Brasileira de História da Educação*. 9-43, n.1. <https://repositorio.unifesp.br/handle/11600/39195>.
- Lamon, S. J. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. 3 ed. New York: Routledge.
- Martins, C. T., Yaremtchuk, G., & Arruda, H. D. (1975). *Ensino moderno da matemática*. v. IV. Editora do Brasil S/A.
- Martins, C. T. (1976). *Operando com números fracionários*. Projeto HAPRONT, módulo 9.4. Paraná: Coordenação Central Curitiba: MEC/DEF/SEEC/CETEPAR.
- Morais, R. S. Bertini, L. F. & Valente, W. R. (2021). *A Matemática do ensino de frações: do século XIX à BNCC*. Livraria da Física.
- Nierri, A. M. (2024). Uma Matemática Moderna do ensino de frações equivalentes, Paraná (1970-1980). (Dissertação em Educação Matemática). Universidade Federal do Paraná.
- Osório, N. C., & PORTO, R. A. (1968). *Matemática na escola primária moderna: Vamos aprender matemática*. 2 ed. Ao livro técnico S.A.
- Paraná. (1979). *Relatório HAPRONT I – Paraná Coordenação Central Curitiba: 1976-1979 MEC/DEF/SEEC/CETEPAR*.
- Petit, M. M., Laird, R. E., & Marsden, E. L. (2010). *A focus on fractions: bringing research to the classroom*. 5 ed. Routledge.
- Pinto, N. B., & Ferreira, A. C. C. (2006). O Movimento da Matemática Moderna: o papel do NEDEM. *Revista Diálogo Educacional*. v.6, n.18. 113-122.
- Pinto, N. B., & Novaes, B. W. D. (2019). “Não é Difícil Ensinar Matemática”: o protagonismo do NEDEM na difusão da Matemática Moderna no Paraná. *Acta Scientiae*, v. 21, n. especial, 109-122.
- Portela, M. S. (2009) *Práticas de matemática moderna na formação de normalistas no instituto de educação do Paraná na década de 1970*. (Tese em Educação matemática). Pontifícia Universidade Católica do Paraná. <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/116741>
- Porto, R. A. (1967). *Frações na Escola Elementar*. 4 ed. Editora do Professor Ltda.
- Sanchez, L. B., & Liberman, M. P. (1975). *Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1º grau*. v. IV. Editora Nacional.
- Valente, W. R. (2017). A matemática a ensinar e a matemática para ensinar: os saberes para o educador matemático. In: Hofstetter, R., & Valente, W. R. (Org.) *Saberes em (trans) formação: tema central da formação de professores*. 201-226, 1 ed. Livraria da Física.