



A MATEMÁTICA DO ENSINO DE FRAÇÕES: análise histórica do saber profissional do professor (RJ/1970)

THE MATHEMATICS OF TEACHING FRACTIONS: historical analysis of the teacher's professional knowledge (RJ/1970)

Denise Medina França¹

Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ)

E-mail para contato



Lattes: <http://lattes.cnpq.br/4540272100520547>



Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-1649-5816>

Armando Freitas Tramontano²

Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ)

ftarmando@gmail.com



Lattes: <https://lattes.cnpq.br/9389892828574613>



Orcid: <https://orcid.org/0000-0003-0315-1173>

¹ Doutora em Educação pela Universidade de São Paulo (USP). Professora do Departamento de Estudos Aplicados ao Ensino da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, RJ, Brasil. Rua São Francisco Xavier, 524, Grupo 12.037-F, Maracanã, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, CEP 20550-013. denisemedinafranca@gmail.com.

² Doutor em Educação pela Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ). Professor na Secretaria de Estado de Educação do Rio de Janeiro (SEEDUC), Rio de Janeiro, RJ, Brasil. Rua São Francisco Xavier, 524, Grupo 12.006-A, Maracanã, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, CEP 20550-013. E-mail: ftarmando@gmail.com.

RESUMO

Este trabalho integra uma pesquisa de doutoramento em andamento que investiga a presença das propostas de Zoltan Paul Dienes sobre o ensino de frações em publicações oficiais do Estado do Rio de Janeiro nas décadas de 1970 e 1980, alinhando-se ao projeto do Grupo Associado de Estudos e Pesquisas sobre História da Educação Matemática (GHEMAT Rio). O estudo concentra-se nas publicações disponíveis do Laboratório de Currículos (LC), criado em 1975 pela Secretaria de Estado de Educação e Cultura, responsável por identificar as necessidades do sistema educacional e elaborar planos gerais de ensino, publicando materiais voltados à formação de professores. O objetivo é compreender os *saberes a ensinar frações* e os *saberes para ensinar frações* sistematizados nessas publicações e, mais especificamente, responder à questão: quais *saberes a ensinar frações* e *para ensinar frações*, *apropriados* das propostas de Zoltan Paul Dienes, são sistematizados nas publicações do Laboratório de Currículos, na década de 1970? A análise evidencia que as propostas teóricas de Dienes, sobretudo quanto ao uso de materiais estruturados, tiveram papel expressivo na formulação das propostas divulgadas pelo LC. A investigação permite compreender a sistematização histórica dos saberes de referência e sua circulação no contexto fluminense, oferecendo subsídios para repensar a formação do professor e orientar a construção de novos referenciais para o ensino de matemática.

Palavras-chave: Saberes. História da educação matemática. Fração. Laboratório de Currículos.

ABSTRACT/RESUMEN/RÉSUMÉ

This work is part of an ongoing doctoral research that investigates the presence of Zoltan Paul Dienes' proposals on the teaching of fractions in official publications of the State of Rio de Janeiro during the 1970s and 1980s, in alignment with the project of the Associated Research Group on the History of Mathematics Education (GHEMAT Rio). The study focuses on publications produced by the Curriculum Laboratory (LC), created in 1975 by the State Department of Education and Culture, which was responsible for identifying the needs of the educational system and developing general teaching plans, publishing materials aimed at teacher training. The objective is to understand the knowledge for teaching fractions and the knowledge to teach fractions systematized in these publications and, more specifically, to answer the following question: which knowledge for teaching fractions and to teach fractions, appropriated from Zoltan Paul Dienes' proposals, were systematized in the publications of the Curriculum Laboratory in the 1970s? The analysis shows that Dienes' theoretical proposals, especially regarding the use of structured materials, played a significant role in the formulation of the approaches disseminated by the LC. The investigation makes it possible to understand the historical systematization of reference knowledge and its circulation in the context of Rio de Janeiro, providing elements to rethink teacher education and to guide the construction of new frameworks for mathematics teaching.

Keywords/Palabras clave: Knowledge. History of mathematics education. Fraction. Curriculum Laboratory.

INTRODUÇÃO

Esse artigo integra uma pesquisa de doutorado intitulada *Zoltan Paul Dienes e a matemática do ensino de frações: uma análise histórica do saber profissional do professor que ensina matemática, em publicações oficiais do Estado do Rio de Janeiro (1970-1980)*. O estudo alinha-se às pesquisas desenvolvidas pelo Grupo Associado de Estudos e Pesquisas sobre História da Educação Matemática – GHEMAT Rio, no âmbito do projeto *Uma caracterização da Matemática a ensinar e para ensinar em publicações do Laboratório de Currículo do Estado do Rio de Janeiro (1975-1983)*³. O GHEMAT Rio tem realizado pesquisas de iniciação científica, mestrado e doutorado no acervo do Laboratório de Currículos⁴ (LC), nas quais se observam as teorias de Zoltan Paul Dienes figurando nas orientações de diversas destas publicações. A relevância do trabalho do LC para o Estado do Rio de Janeiro conduz à necessidade de compreender como se deu a *apropriação* (Chartier, 2002) das ideias de Zoltan Paul Dienes sobre o ensino de frações nas publicações produzidas pelo órgão nas décadas de 1970 e 1980. A pesquisa busca compreender os saberes *a ensinar frações e para ensinar frações* sistematizados em publicações oficiais dirigidas a professores das séries iniciais do Estado do Rio de Janeiro nas décadas de 1970 e 1980.

Nesse sentido, este artigo propõe um recorte de pesquisa e busca-se responder à questão: quais saberes *a ensinar frações e para ensinar frações, apropriados* das propostas de Zoltan Paul Dienes, foram sistematizados nas publicações do Laboratório de Currículos na década de 1970?

A pesquisa justifica-se pela relevância da análise das produções do LC, a qual permite compreender a sistematização histórica de saberes de referência e identificar aqueles que circularam no Rio de Janeiro nas décadas de 1970, além de contribuir para a elaboração de novos saberes profissionais à formação do professor que ensina matemática.

O Laboratório de Currículos foi instituído em 1975 no âmbito da Secretaria de Estado de Educação e Cultura, em um cenário marcado pela unificação administrativa dos Estados da Guanabara e do Rio de Janeiro. Sua criação esteve associada à necessidade de mapear as demandas do recém-constituído sistema estadual de educação e cultura, bem como de formular diretrizes gerais para o planejamento educacional do Estado.

³ O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

⁴ Todo o material que temos acesso referente ao acervo do Laboratório de Currículos encontra-se no Repositório Institucional da UFSC: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/1769>.

As análises de Motta (2001) e Crespo (2016) permitem compreender os embates políticos e institucionais que antecederam a fusão. Conforme destaca Motta (2001), foi sobretudo a partir da década de 1950 que o tema ganhou maior centralidade no debate público, em razão do caráter definitivo assumido pela transferência da capital federal. A definição do destino político-administrativo da cidade do Rio de Janeiro tornou-se, então, um dos pontos mais controversos das discussões parlamentares dos primeiros meses de 1960. Embora tenha sido cogitada a realização de um plebiscito, conforme previsto na Emenda Menezes Côrtes, a ausência de consenso político inviabilizou essa alternativa, levando à adoção da solução constitucional que resultou na criação do Estado da Guanabara (Motta, 2001).

Ainda segundo Motta (2001), a transformação do antigo Distrito Federal em Estado da Guanabara deu origem a uma configuração administrativa singular, frequentemente descrita como uma “cidade-estado”, desprovida de subdivisões municipais. Desse modo, o território correspondente ao atual município do Rio de Janeiro passou a constituir uma unidade federativa autônoma a partir de 1960, após a instalação da capital em Brasília. Com a fusão efetivada, o almirante Floriano Peixoto Faria Lima, nomeado pelo presidente da República, assumiu o governo do novo Estado do Rio de Janeiro em março de 1975.

Crespo (2016) caracteriza a Guanabara como um ente federativo atípico, que preservou funções políticas de grande relevância no cenário nacional. A autora ressalta que o processo de unificação evidenciou tensões e ambiguidades decorrentes da convergência de interesses distintos, refletindo divergências profundas entre os dois estados, especialmente nos âmbitos político, cultural, educacional e socioeconômico.

No campo educacional, Crespo (2016) aponta que o governo de Floriano Peixoto Faria Lima enfrentou o desafio simultâneo de redefinir a organização do sistema de ensino do município do Rio de Janeiro e de atender às metas de expansão do ensino de 1º grau nos 64 municípios que passaram a integrar o novo estado, em conformidade com as diretrizes do Ministério da Educação e com a Lei nº 5.692/71. Nesse contexto, optou-se pela transformação da antiga Secretaria de Educação da Guanabara em Secretaria Municipal de Educação do Rio de Janeiro, mantendo-se sua estrutura técnico-administrativa. Paralelamente, foi extinta a Secretaria de Educação do antigo Estado do Rio de Janeiro, sediada em Niterói, sendo criada a Secretaria de Estado de Educação e Cultura do Rio de Janeiro (SEEC/RJ).

No âmbito das mudanças implementadas no período pós-fusão, a reorganização curricular e metodológica destacou-se como um dos eixos centrais da reforma educacional. Nesse processo, o Laboratório de Currículos assumiu papel estratégico, ao ser responsável pela reformulação dos currículos e pela implementação das orientações metodológicas, buscando

adequá-las às especificidades regionais. As propostas pedagógicas desenvolvidas pelo órgão estiveram ancoradas na Lei nº 5.692/71 e no Parecer nº 853/71/CFE/MEC, que estabeleceu o núcleo comum para os currículos do ensino de 1º e 2º graus.

Considerando a centralidade do Laboratório de Currículos na estrutura educacional do novo Estado do Rio de Janeiro e, especificamente, os saberes relacionados ao ensino de frações, realizou-se, em 2025, um levantamento no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES, a partir dos descritores “fração”, “frações”, “saber” e “saberes”. O procedimento resultou na identificação de 101 trabalhos, entre teses e dissertações defendidas no período de 1988 a 2023. Com o refinamento da busca para a área de *Ensino de Ciências e Matemática*, esse quantitativo foi reduzido para seis pesquisas.

O exame desses seis trabalhos mostra que parte deles discute a organização dos saberes matemáticos vinculados ao estudo das frações, enquanto outros investigam o ensino desse tema em diálogo com os saberes matemáticos voltados à formação de professores. Há também investigações que se concentram nos saberes formativos do docente de matemática e que, em alguma medida, consideram elementos relacionados ao ensino de frações.

Todavia, como se evidencia no Quadro 1, nenhum dos estudos analisa os saberes referentes ao ensino e à aprendizagem de frações tomando como referência a atuação e a produção do Laboratório de Currículos do Estado do Rio de Janeiro.

Quadro 1 – Pesquisas que abordam saberes profissionais e o ensino de frações

Referência	Título
Santos (2022)	Uma caracterização do saber profissional do professor que ensinava aritmética a partir de exemplares da revista de ensino (1902-1930)
Domingues (2022)	Os saberes matemáticos sistematizados por Manoel Jairo Bezerra no acessório de ensino Blocofração, 1950-1970
Nascimento (2022)	Uma caracterização das finalidades dos materiais didáticos como um elemento do saber profissional do professor que ensinava matemática a partir de revistas pedagógicas (primeira metade do século XX)
Morais (2021)	Abordagem sobre frações: uma análise do contrato didático e das concepções de ensino da matemática como fatores de influência na aprendizagem de estudantes do 5º ano do ensino fundamental
Trindade (2021)	A constituição de um grupo de estudos sobre frações com professores que ensinam matemática

Fonte: Elaborado pelos autores (2025).

Dessa forma, evidencia-se a importância do estudo desenvolvido neste artigo, uma vez que a reforma do ensino de 1975, conduzida pelo Laboratório de Currículos do Estado do Rio de Janeiro, representou um marco no processo de reorganização curricular e na redefinição dos

saberes escolares. Ao analisar essa experiência, torna-se possível compreender como determinadas concepções sobre o ensino da matemática foram sistematizadas e, possivelmente, colocadas em prática, bem como refletir sobre seus desdobramentos na formação de professores e na circulação de novos referenciais.

1. REFERENCIAL TEÓRICO-METODOLÓGICO

Este estudo insere-se no campo da História da educação matemática (Hem) e alinha-se a pesquisas dedicadas à análise dos processos de profissionalização docente (Hofstetter; Schneuwly, 2017, 2020; Borer, 2017; Valente, 2020).

Por tratar-se de uma investigação de natureza sócio-histórica, a discussão fundamenta-se em De Certeau (2020), cujas contribuições orientam o fazer historiográfico e a construção dos objetos de pesquisa.

Partindo do pressuposto de que a escola é produtora de saberes, mobiliza-se o conceito de *cultura escolar*, conforme proposto por Julia (2001), o qual permite compreender os processos históricos de constituição do saber profissional no contexto escolar, bem como as transformações dos saberes profissionais ocorridas no âmbito do Movimento da Matemática Moderna.

Recorre-se, ainda, aos estudos de Hofstetter e Schneuwly (2017), que estabelecem a distinção entre os *saberes a ensinar*, compreendidos como os objetos do trabalho docente, e os *saberes para ensinar*, entendidos como as ferramentas que sustentam a prática do professor.

Valente (2020) discute a *matemática a ensinar*, entendida como aquilo que o professor deve ensinar aos alunos, e a *matemática para ensinar*, compreendida como o conjunto de conhecimentos e ferramentas que o professor mobiliza para ensinar matemática. Costa *et al.* (2023, p. 10) afirmam que “assim caracteriza-se a matemática do ensino: como uma relação entre a matemática a ensinar e a matemática para ensinar”.

Desse modo, define-se como hipótese teórica da pesquisa a existência de uma *matemática a ensinar frações* e de uma *matemática para ensinar frações*, articuladas com os saberes *a* e *para ensinar frações*, que se busca evidenciar nas publicações do LC aqui analisadas, pois, como defendem Moraes, Bertini, e Valente, (2021, p. 9-10), a *matemática do ensino* caracteriza uma matemática que é própria da cultura escolar, podendo ser definida como “[...] uma matemática elaborada historicamente pelo meio escolar que serve às diferentes

finalidades postas para o ensino nas diversas épocas em que se exercem as práticas pedagógicas”.

Diante do exposto, objetiva-se compreender a especificidade do trabalho de Moraes, Bertini e Valente (2021), que estudam *A Matemática do Ensino de Frações: do século XIX à BNCC*. Nesse estudo, os autores definem uma metodologia de análise a partir das categorias de *sequência, significado, graduação e exercícios e problemas*, as quais orientam o exame das fontes documentais adotado nesta pesquisa, pois tais categorias “se mostram como integrantes de uma anatomia do saber escolar, em nosso caso, da matemática do ensino” (Moraes, Bertini & Valente, 2021, p. 18).

Na investigação das produções do LC, além da leitura orientada pelas categorias propostas por Moraes, Bertini e Valente (2021), busca-se compreender as *apropriações* realizadas pela equipe responsável pela reforma. O termo *apropriação*, segundo Chartier (2002), está vinculado a uma perspectiva da história cultural que procura entender de que maneira, em diferentes contextos e épocas, uma determinada realidade social é construída, interpretada e apresentada ao público. Nessa linha, o autor destaca que as percepções do social não são neutras, pois geram práticas e estratégias diversas — escolares, políticas e culturais. As representações, portanto, funcionam como matrizes a partir das quais se produzem discursos e práticas que constroem o mundo social e, simultaneamente, definem identidades, frequentemente de modo contraditório, tanto em relação ao outro quanto a si (Chartier, 2002).

Assim, as categorias *sequência, significado, graduação e exercícios e problemas* (Moraes, Bertini & Valente, 2021) constituem a metodologia de análise mobilizada neste estudo. Ao aplicá-las às publicações do Laboratório de Currículos, busca-se evidenciar como os impressos sistematizam *uma matemática a ensinar fração e uma matemática para ensinar fração*, revelando as *apropriações* das propostas de Zoltan Dienes no contexto da reforma curricular fluminense da década de 1970.

2. ENTRE REFORMAS E SABERES: um estudo sobre frações nas publicações do Laboratório de Currículos

A análise tem início pelo material intitulado Reformulação de Currículos 1.º volume – Pré-Escolar e 1.º Grau (Rio de Janeiro, 1976), pois se trata da publicação do Laboratório de Currículos que apresenta a organização curricular de forma geral. A partir dessa publicação, foi

elaborado o Quadro 2, que reúne os objetivos específicos referentes ao ensino de matemática, organizados por séries⁵ – com foco nos aspectos relacionados ao ensino e à aprendizagem das frações. Esses objetivos foram organizados em “primeiras séries” e “últimas séries” do Primeiro Grau, conforme a estrutura adotada no documento do Laboratório de Currículos.

Quadro 2 – Objetivos específicos do ensino de frações definidos na publicação do LC

Série	Temas abordados
Primeiras séries	
3. ^a série	Realizar partições.
3. ^a e 4. ^a série	Estabelecer relações de equivalência.
4. ^a série	Efetuar adições, subtrações, multiplicações e divisões de frações ordinárias. Reconhecer números proporcionais.
Últimas séries	
6. ^a série	Reconhecer a adição, a subtração, a multiplicação e a divisão como operação definidas no conjunto dos números racionais.
?	Identificar a propriedade de fechamento da adição, da subtração, da multiplicação e da divisão de números racionais.
? ⁶	Identificar os racionais como números decimais limitados ou dízimas periódicas.

Fonte: Elaborado pelos autores a partir de Reformulação de Currículos 1.º volume – Pré-Escolar e 1.º Grau (Rio de Janeiro, 1976, p. 159-163).

O Quadro 2 tem o intuito de situar e facilitar a compreensão do leitor quanto aos objetivos referentes ao saber fração presentes nos impressos do LC.

A análise do Quadro 2 evidencia o tratamento das frações a partir da ampliação de estruturas previamente estabelecidas, partindo de atividades manipulativas nas séries iniciais até a formalização em termos de números racionais nas séries finais. Nas primeiras séries, o foco está em realizar partições e estabelecer relações de equivalência, ou seja, em construir noções básicas de fração e de igualdade entre representações distintas. A partir da 4.^a série, ampliam-se as estruturas para o desenvolvimento das operações entre frações (adição,

⁵ A publicação não deixa clara a correspondência série-tema. Portanto, nossas análises permitem estas afirmações na produção do Quadro 2.

⁶ O símbolo ? no Quadro 2 significa que ainda não encontramos os livros referentes a 7.^a e 8.^a séries. Dessa forma, não é possível afirmar sobre o momento do trabalho destes temas.

subtração, multiplicação e divisão) e para o reconhecimento de proporções, sinalizando um avanço na complexidade das tarefas propostas.

Já nas últimas séries, observa-se uma transição do trabalho com frações ordinárias para uma abordagem abstrata, centrada no conjunto dos números racionais. Nesse nível, os objetivos incluem reconhecer as operações fundamentais como definidas no campo dos racionais, identificar a propriedade de fechamento e compreender a representação decimal desses números, seja como decimais limitados ou dízimas periódicas.

Essa organização revela uma tentativa do LC de articular um percurso de ensino que vai da manipulação prática ao rigor conceitual, acompanhando a passagem do concreto ao abstrato, princípio caro à psicologia da educação da época.

O tema das frações é analisado, neste estudo, nas publicações Proposta Metodológica — 1.º grau — 3.ª série (Rio de Janeiro, 1978a) e Proposta Metodológica — 1.º grau — 4.ª série (Rio de Janeiro, 1978b), publicadas pelo Laboratório de Currículos da Secretaria de Estado de Educação e Cultura do Estado do Rio de Janeiro.

Figura 1 – Capa das publicações do LC



Fonte: Rio de Janeiro (1978a) e Rio de Janeiro (1978b).

Observando o Quadro 2, nota-se que a publicação Proposta Metodológica — 1.º grau — 5ª série (Rio de Janeiro, 1978c) não trata do tema fração. As análises mostram que, após a 4.ª série, o tema somente é retomado na 6ª série do Primeiro Grau.

Sendo assim, o estudo tem início pela publicação Proposta Metodológica — 1.º grau — 3.ª série (Rio de Janeiro, 1978a), que apresenta a introdução do conceito de fração, após o tratamento das quatro operações básicas com números naturais — trabalho realizado mediante relações entre conjuntos — e faz a construção do conceito de fração a partir das estruturas de

comparação e equivalência. Na *sequência*, após o tratamento das frações, abordam-se as probabilidades e chega-se a discutir eventos que ocorrem com maior frequência.

Compreende-se que esse tratamento dado aos assuntos após o trabalho com as frações na publicação Proposta Metodológica — 1.º grau — 3.ª série (Rio de Janeiro, 1978a) está ligado às influências do MMM, pois o Movimento Modernizador visava levar uma matemática mais rigorosa às salas de aula da escola básica, desenvolvendo as estruturas lógicas da matemática (França, 2019).

Na publicação Proposta Metodológica — 1.º grau — 3.ª série (Rio de Janeiro, 1978a) nota-se que o *significado* pretendido com o trabalho inicial das frações é a construção do conceito de que, ao trabalhar com frações, é necessário realizar partições do inteiro em partes iguais. É feita a introdução da notação de fração e inicia-se o raciocínio da equivalência, ambos através da comparação das partes nas quais o inteiro está dividido.

Observando as obras de Dienes (1971a, 1971b)⁷, é possível identificar indícios das intenções iniciais do autor em abordar as partes do inteiro/unidade — ainda que não explicita a finalidade de trabalhar o conceito de fração na perspectiva parte-todo —, bem como em desenvolver noções relacionadas à equivalência. Utilizamos o termo “noções” porque o tema das frações equivalentes é discutido de maneira sistemática somente no capítulo dois das referidas obras. Contudo, já no capítulo inicial, diferentes atividades sugerem a construção preliminar de estruturas mentais voltadas à compreensão da equivalência.

Refletindo sobre o fato de o LC estar sob influência das ideias de Jean Piaget e do MMM no Brasil, pode-se afirmar que a *graduação* do ensino sugerida pela publicação se organiza da seguinte forma: a primeira atividade é apresentada como introdutória ao conceito de fração; a segunda, como recurso para o desenvolvimento desse conceito; a terceira, voltada à comparação de partes de objetos ou desenhos, articulando-se à quarta atividade, que introduz o conceito de fração equivalente. Em todas as propostas, observa-se a orientação ao professor de retomar as atividades, recomendando-se “repetir a atividade várias vezes, utilizando objetos diversos”. Quando o conceito de fração é desenvolvido a partir da fração $\frac{1}{3}$, com desdobramentos em $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{3}$, apresenta-se ainda a seguinte sugestão ao professor: “propor atividades semelhantes para introduzir: $\frac{1}{4}$; $\frac{2}{4}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{5}$; etc.”⁸ (Rio de Janeiro, 1978a, p. 310).

O impresso Proposta Metodológica — 1.º grau — 3.ª série (Rio de Janeiro, 1978a), ao propor *exercícios e problemas*, espera do aluno a compreensão da notação de fração com os termos numerador e denominador; a aprendizagem acerca das frações equivalentes e a

⁷ Ver Tramontano e França (2022a, 2022b, 2024).

⁸ Mantivemos a escrita original da publicação.

comparação de frações com diferentes denominadores. Todo o trabalho é amparado por materiais manipuláveis, como a divisão de retângulos e círculos em partes iguais.

Em síntese, na publicação Proposta Metodológica — 1.º grau — 3.ª série (Rio de Janeiro, 1978a), o ensino das frações é organizado em uma *sequência* que busca desenvolver as estruturas lógicas do pensamento matemático, iniciando-se após o trabalho com operações básicas de números naturais — tratadas por meio de relações entre conjuntos —, seguido da exploração das estruturas de comparação e equivalência e, posteriormente, dos conceitos de probabilidade. O *significado* atribuído às frações enfatiza sua compreensão como partição do inteiro em partes iguais, introduzindo a notação fracionária e o raciocínio sobre equivalência. A *graduação* segue a marcha do simples para o complexo (Valente, 2015), iniciando em atividades que apresentam o conceito introdutório, passando por atividades que reforçam o desenvolvimento dos conceitos e chegando a atividades que promovem a construção de estruturas a partir dos conceitos anteriormente tratados, como acontece com a comparação e com a equivalência de frações. Por fim, os *exercícios e problemas* propostos visam a retomada das categorias anteriormente observadas, a partir da compreensão da notação (numerador e denominador), da identificação de frações equivalentes e da comparação de frações com denominadores distintos, apoiando-se em materiais manipuláveis, como retângulos e círculos divididos em partes iguais, para viabilizar a visualização e experimentação concreta dos conceitos.

Dando continuidade ao tratamento das frações, a publicação Proposta Metodológica — 1.º grau — 4.ª série (Rio de Janeiro, 1978b) sugere que o ensino de frações seja realizado após as operações com números naturais e antes do tratamento dos números decimais. Observa-se que as operações básicas, tratadas a partir das relações entre conjuntos, bem como os diagramas desenvolvidos nesta seção, constituem pré-requisitos para o trabalho com frações, assim como conceitos como dobro, metade e triplo.

A partir da *sequência* exposta anteriormente, evidencia-se que a Proposta Metodológica — 1.º grau — 4.ª série (Rio de Janeiro, 1978b) objetiva a aprendizagem do conceito de número decimal. Logo, pode-se afirmar que a *graduação* do ensino de fração na 4.ª série do Primeiro Grau é pensada para favorecer a construção das estruturas matemáticas de frações decimais. A investigação evidencia que, juntamente com os números decimais, é tratado o conceito inicial de porcentagem, utilizando-se papel quadriculado e a repartição de figuras em partes iguais.

A produção apresenta, como *significado* ao trabalho das frações na 4.ª série do Primeiro Grau, o desenvolvimento da noção das frações $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ como *operadores*

multiplicativos fracionários, proposta similar a desenvolvida por Dienes (1971a, 1971b). Acerca destes operadores, Dienes (1971a, p. 26) observa que “um operador fracionário é simplesmente um multiplicador seguido de um divisor ou um divisor seguido de um multiplicador”.

O desenvolvimento dos operadores multiplicativos fracionários, no impresso do LC, é feito com auxílio do material manipulável Régua de Cuisenaire e visa levar o estudante a perceber, por exemplo, que duas metades equivalem a um inteiro e que três metades equivalem a um inteiro e meio. No percurso à construção do conceito, o estudante é encaminhado à elaboração da ideia de fração de uma quantidade, usando o material manipulável e percebendo a fração como um operador que age sobre o inteiro, como se observa na Figura 2.

Figura 2 – A fração como operador multiplicativo fracionário

ATIVIDADE 2

- **Objetivo:** Introduzir a noção de metade.
- **Material:** — Para cada aluno:
— um conjunto de régua “Cuisenaire”
— uma folha mimeografada com a tabela abaixo

$\frac{1}{2} \times 4 =$
$\frac{1}{2} \times 6 =$
$\frac{1}{2} \times 8 =$
$\frac{1}{2} \times 10 =$

- **Modo operacional:**
 - a) Pedir a um aluno que escreva no quadro-de-giz um meio (o aluno deve escrever $\frac{1}{2}$)
 - b) Ensinar, que um meio de quatro se escreve: $\frac{1}{2} \times 4$
 - c) Distribuir o material e pedir que completem a tabela, utilizando as régua.

Fonte: Proposta Metodológica – 1.º grau – 4.ª série (Rio de Janeiro, 1978b, p. 429).

A Figura 2 ilustra o trabalho para a fração $\frac{1}{2}$. No entanto, é feita abordagem semelhante para as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$, sempre apoiado pelo uso das Régua de Cuisenaire.

Após introduzir a noção de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$, o impresso sugere sua aplicação em atividades que utilizem conjuntos numéricos e o Diagrama de Venn, a fim de trabalhar o conceito de fração como operador multiplicativo fracionário operando sobre uma quantidade, como se observa representado na Figura 3.

Figura 3 – Aplicando o operador multiplicativo a conjuntos

ATIVIDADE 5

- *Objetivo:* Utilizar a noção de metade

- *Material:* • Para cada aluno:
— folha de papel e lápis

- *Modo operacional:*

a) contar que um pai ganhou 10 balas e vai reparti-las igualmente entre seus dois filhos.

b) Pedir que representem através de pontos as 10 balas no diagrama de Venn.

c) Envolver com uma linha os pontos que representem, no diagrama, quantas balas ganhará cada filho.

d) Escrever essa operação, utilizando a notação matemática

Nota: os alunos deverão escrever $\frac{1}{2} \times 10 = 5$

e) Repetir a atividade com outros conjuntos, utilizando $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etc....

Fonte: Proposta Metodológica – 1.º grau – 4.ª série (Rio de Janeiro, 1978b, p. 431).

No último item da atividade apresentada na Figura 3 encontramos a seguinte orientação aos docentes: “Repetir a atividade com outros conjuntos, utilizando $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etc. ...” (Rio de Janeiro, 1978b, p. 431). Não fica claro se, no referido nível de ensino, o docente avançará o ensino do operador multiplicativo fracionário para casos mais complexos, como, por exemplo, o cálculo de $\frac{2}{3}$ de 36 — um dos exemplos apresentados em Dienes (1971a).

A Proposta Metodológica — 1.º grau — 4.ª série (Rio de Janeiro, 1978b) sugere diversos *exercícios e problemas* para o aprofundamento das noções anteriormente desenvolvidas. Tais atividades relacionam, por exemplo, os conceitos de dobro e de metade com as operações inversas de multiplicação e divisão. As frações equivalentes são, novamente, tratadas com auxílio das Régua de Cuisenaire, com o auxílio das noções de conjuntos, do diagrama de Venn e com a divisão de retângulos de papel que representam o mesmo inteiro. Apesar do trabalho com a equivalência de frações, somente são apresentadas atividades de adição de frações com o mesmo denominador, a partir de representações gráficas.

Em síntese, é possível dizer que as análises das publicações do Laboratório de Currículos evidenciam uma *matemática a ensinar fração* e uma *matemática para ensinar fração* que se articulam e elaboram uma *matemática do ensino de fração* cujo foco está na construção e compreensão de conceitos iniciais de fração. O trabalho é feito por meio da construção de estruturas lógicas do pensamento matemático, com o auxílio de materiais manipuláveis, buscando a introdução de conceitos básicos e o desenvolvimento subsequente de

números decimais e porcentagens, seguindo uma linha de influência das ideias pedagógicas de Jean Piaget e do Movimento da Matemática Moderna.

Portanto, semelhante ao trabalho realizado por Dienes (1971a, 1971b), as publicações do LC objetivam o tratamento das estruturas de equivalência de frações e o trabalho, na 4.^a série do Primeiro Grau, se conclui com a construção do conceito de *fração como operador multiplicativo fracionário*.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este texto tem como objetivo analisar a sistematização do ensino do conceito de fração realizada pelos reformuladores do Laboratório de Currículos (LC) do Rio de Janeiro, na década de 1970, com ênfase nos saberes *a ensinar frações e para ensinar frações, apropriados* das propostas de Zoltan Paul Dienes e reelaborados em suas publicações.

O exame do material indica que o tratamento dos conceitos relacionados à fração, bem como à probabilidade, na 3.^a série, e ao número decimal, na 4.^a série, ilustra a constituição de uma *matemática do ensino de frações* como prática histórica, articulada às finalidades educacionais específicas do período estudado. Nesse sentido, pode-se destacar que a *matemática a ensinar fração*, presente nos documentos analisados, compreende não apenas o conceito de fração em sua dimensão parte-todo, mas também as noções de inteiro/unidade, de probabilidades, de fração decimal, de números decimais e de porcentagens. Já a *matemática para ensinar fração* revela-se nas metodologias pedagógicas prescritas ao professor, como o uso de materiais manipuláveis, o emprego de diagramas e a repetição de atividades como forma de consolidação dos conceitos.

A *apropriação* das propostas de Dienes (1971a, 1971b) pelos reformuladores do LC pode ser compreendida como um processo de reelaboração, no qual os saberes produzidos foram ressignificados pelas necessidades do cenário educacional brasileiro. Os impressos do LC apresentam interpretações dos elaboradores das orientações de Dienes (1971a, 1971b) que enfatizavam o papel da manipulação de materiais estruturados e da construção de noções lógicas, como fundamentos para o desenvolvimento do pensamento matemático, integrando-as às demandas do Movimento da Matemática Moderna (MMM) e às teorias cognitivistas de Jean Piaget, de modo a atender às exigências formativas da época.

Para sistematizar essa análise, toma-se como referência quatro categorias centrais: sequência, significado, graduação e exercícios e problemas (Morais, Bertini & Valente, 2021).

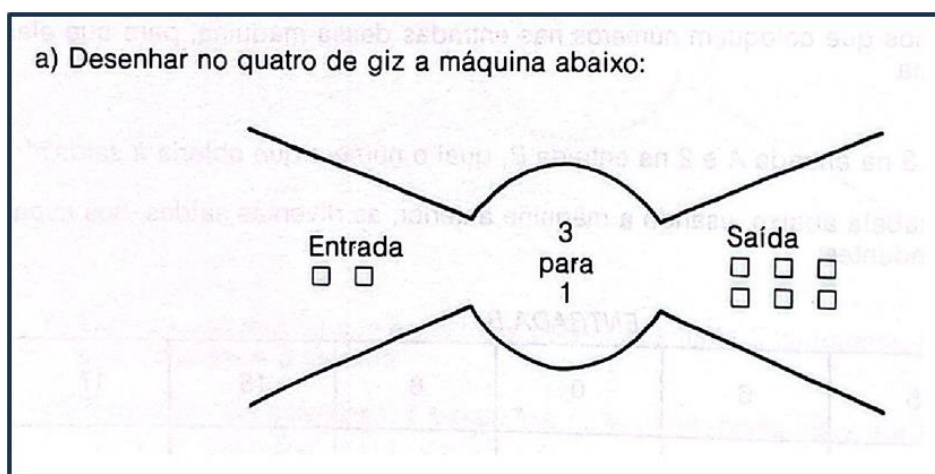
Categoria *sequência*:

Na 3.^a série, o conceito é introduzido após o trabalho com as operações fundamentais de números naturais, sendo desenvolvido a partir das ideias de comparação e equivalência. Na 4.^a série, essa *sequência* conduz à introdução das frações decimais, dos números decimais e da porcentagem, articulando o tema fração ao conceito de *operador multiplicativo fracionário*.

As análises dos impressos indicam que a *sequência* proposta pelos reformuladores para o tratamento do tema fração está em consonância com os princípios do Movimento da Matemática Moderna (MMM). Isso se evidencia pelo fato de que os conceitos relacionados às frações são introduzidos após o trabalho com Sistemas de Numeração e Números Naturais – assuntos amplamente abordados por meio da teoria dos conjuntos e da análise de relações, ambos elementos importantes à proposta do MMM.

Na publicação Proposta Metodológica – 1.^o grau – 3.^a série (Rio de Janeiro, 1978a), nas seções introdutórias das operações (Sistemas de Numeração e Números Naturais), pode-se notar a influência das intenções de Zoltan Paul Dienes, como ilustrado pela Figura 4, que apresenta as máquinas bastante difundidas nas obras do autor (Dienes, 1969a, 1969b, 1971a, 1971b).

Figura 4 – Máquina de “entrada” e “saída” no ensino das operações



Fonte: Rio De Janeiro (1978, p. 298).

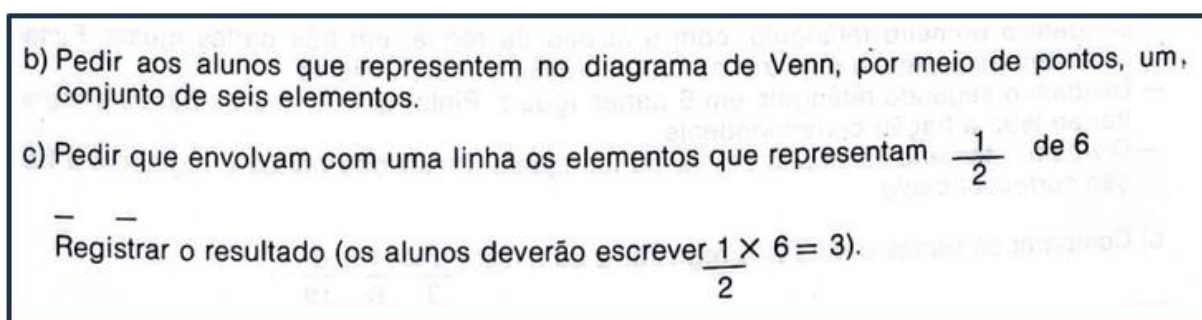
Esse diagrama assemelha-se ao que atualmente se denomina máquina de função, em que um número é transformado em outro após a realização de uma operação.

Categoria *significado*:

O sentido atribuído às frações na 3.^a série concentra-se na partição do inteiro em partes iguais e na introdução da notação fracionária. Já na 4.^a série, o *significado* amplia-se para a compreensão da fração como *operador multiplicativo fracionário*, articulado ao uso das Régua de Cuisenaire e aos conceitos de dobro, metade e triplo.

O trabalho realizado pelos reformuladores do LC parte do tratamento das frações equivalentes e, na ampliação deste conceito, chega ao raciocínio ligado aos *operadores multiplicativos*.

Figura 5 — Aplicação da fração como operador multiplicativo



Fonte: Proposta Metodológica — 1.^o grau — 4.^a série (Rio de Janeiro, 1978b, 433).

Nota-se, pela Figura 5, que após tratar o fato de que $1/2 = 3/6$, a publicação sugere atividades para calcular $1/2$ e $3/6$ de uma mesma quantidade. Deduz-se que o objetivo destas atividades seja verificar que as frações $1/2$ e $3/6$ pertencem a uma mesma classe de equivalências⁹. No entanto, constata-se que, similar a Dienes (1971a, 1971b), a publicação do LC trata fração como *operadores multiplicativos*, pois realiza este trabalho de construção da classe de equivalências a partir da multiplicação de um operador — representado por uma fração — pelo inteiro, conforme mostrado na Figura 5.

Categoria *gradação*:

Observa-se a intencionalidade em avançar do *simples* para o *complexo* (Valente, 2015). Inicialmente, as frações $1/2$, $1/3$ e $1/4$ são exploradas em situações concretas, passando à equivalência e, em seguida, às frações decimais e porcentagens. Essa gradação reflete a influência das ideias piagetianas de construção do conhecimento em estruturas que se complementam, assim como a preocupação do Movimento da Matemática Moderna com a formação de estruturas lógicas.

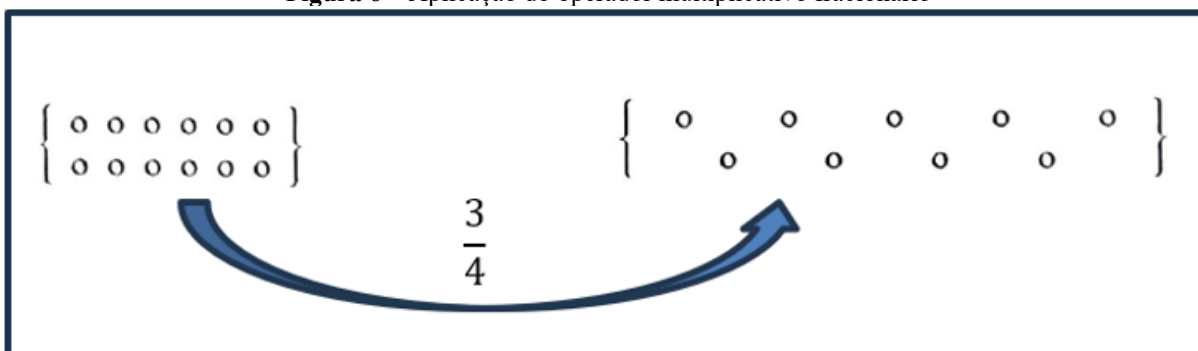
⁹ Dienes (1971b, p. 28) define classe de equivalência como os “estados fracionários [...] que representam as mesmas quantidades”.

Categoria exercícios e problemas:

As atividades propostas consolidam os conceitos introduzidos mediante a retomada sistemática das atividades, manipulação de materiais e representações gráficas (retângulos, círculos, diagramas de Venn). Na 3.^a série, os exercícios enfatizam a notação de fração, a equivalência e a comparação entre diferentes denominadores. Na 4.^a série, privilegiam-se a equivalência, a adição de frações com denominadores iguais e a aplicação do operador multiplicativo fracionário em diferentes contextos, ainda que sem avançar para casos mais complexos. Assim como Dienes (1971a), os reformuladores do LC recomendam que este trabalho seja realizado gradualmente, de acordo com as recomendações psicogenéticas de Jean Piaget, conduzindo o estudante à construção dessa estrutura por meio de diversas atividades com materiais manipuláveis.

A Figura 6 apresenta a conclusão de uma das fichas de trabalho em Dienes (1971b) e ilustra a aplicação de um operador multiplicativo fracionário.

Figura 6 – Aplicação do operador multiplicativo fracionário



Fonte: Os autores.

O diagrama apresentado na Figura 6 mostra a possibilidade de, utilizando um operador, obter um conjunto com 9 elementos a partir de um conjunto com 12 elementos. Coadunando com esta aplicação, tem-se a Figura 7 que ilustra uma atividade com operadores multiplicativos disponível na publicação do LC.

Figura 7 — Proposta de atividade do LC que utiliza o conceito de relação com operações inversas

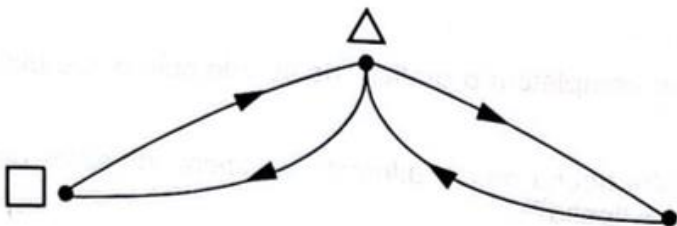
• **Objetivo:** Utilizar a subtração e a divisão como operações inversas de soma e de multiplicação.

• **Material:** • Para cada aluno:
— 1 folha de papel em branco
— giz amarelo, vermelho, azul e verde

• **Modo operacional:**

a) Desenhar no quadro-de-giz o esquema abaixo:

amarela → "...tem como dobro"	azul → tira 58 ...
vermelha → ... adiciona 58 ...	verde → "... tem como metade..."



Fonte: Proposta Metodológica — 1.º grau — 4.ª série (Rio de Janeiro, 1978b, 432).

Pode-se notar que o operador é aplicado às relações que envolvem as operações inversas e têm como objetivo transformar um número em outro.

As análises apresentadas permitem concluir que os reformuladores do LC se apropriaram das influências do MMM e das ideias Piaget e Dienes, articulando teoria e prática em um movimento que caracteriza a constituição da matemática escolar. Ademais, a partir das análises das quatro categorias anteriormente apresentadas, conclui-se que as publicações do LC configuram uma *matemática do ensino de frações* própria da década de 1970, no recém-criado Estado do Rio de Janeiro, pois, conforme Valente (2020, p. 167), “a matemática do ensino revela em cada época as articulações estabelecidas entre a matemática a ensinar e a matemática para ensinar”.

Desse modo, a análise da *matemática do ensino de frações* nos documentos do LC evidencia os *saberes a ensinar frações* — vinculados aos temas a serem tratados em matemática — e os *saberes para ensinar frações* — relacionados às orientações metodológicas dirigidas ao professor. Trata-se, portanto, de um processo de *apropriação*, por parte dos reformuladores,

das propostas de Zoltan Paul Dienes, do ideário do MMM e das ideias cognitivistas de Jean Piaget, concretizando-as em práticas pedagógicas específicas. Portanto, a *matemática do ensino de frações* elaborada pelo LC revela não apenas a circulação de ideias matemáticas e pedagógicas, mas também os modos como essas ideias foram apropriadas, transformadas e legitimadas como saber escolar no contexto educacional fluminense da década de 1970.

Em diálogo com os estudos já existentes acerca das frações e dos saberes profissionais (Santos, 2022; Domingues, 2022; Morais, 2021; Trindade, 2021; Nascimento, 2022), este trabalho volta-se especificamente para a produção do Laboratório de Currículos do Rio de Janeiro, até então pouco explorada pela História da educação matemática. Ao focalizar esses materiais, amplia-se a compreensão da circulação e elaboração dos saberes sobre frações na década de 1970, evidenciando a constituição de uma *matemática do ensino de fração* própria ao contexto fluminense.

AGRADECIMENTOS

Para trabalhos publicados em português:

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior — Brasil (CAPES) — Código de Financiamento 001.

REFERÊNCIAS

- Borer, V. L. (2017). Saberes: uma questão crucial para a institucionalização da formação de professores. In R. Hofstetter & W. R. Valente (Orgs.), *Saberes em (trans)formação: tema central da formação de professores* (pp. 173–199). Editora Livraria da Física.
- Certeau, M. de. (2020). *A invenção do cotidiano – Artes de fazer* (M. de L. Menezes, Trad.; 3rd ed., cap. II). Forense Universitária.
- Chartier, R. (2002). *A história cultural: Entre práticas e representações* (M. M. Galhardo, Trad.; 2ª ed.). Difel.
- Costa, D. A., & Hoffmann, Y. T. (2023). Matemática do ensino e a Hem: novos conceitos, novas problemáticas. In D. A. Costa & I. Zimmer (Orgs.), *Matemática do ensino: alguns ensaios*. Editora Livraria da Física.
- Dienes, Z. P. (1969a). *Opérateurs additifs: Commentaires*. O.C.D.L.
- Dienes, Z. P. (1969b). *Opérateurs additifs: Fiches de travail*. O.C.D.L.

- Dienes, Z. P. (1971a). *Frações* (M. P. B. de M. Charlier & R. F. J. Charlier, Trans.; Supervisão do GEEM – Grupo de Estudos do Ensino da Matemática). Herder.
- Dienes, Z. P. (1971b). *Frações: Fichas de trabalho* (M. P. B. de M. Charlier & R. F. J. Charlier, Trans.; Supervisão do GEEM – Grupo de Estudos do Ensino da Matemática). Herder.
- Domingues, J. M. (2022). *Os saberes matemáticos sistematizados por Manoel Jairo Bezerra no acessório de ensino Blocofração, 1950–1970* (Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina). Universidade Federal de Santa Catarina.
- França, D. M. (2019). *Matemática nas séries iniciais: o que mudou?* Appris.
- Hofstetter, R., & Schneuwly, B. (2017). Saberes: um tema central para as profissões do ensino e da formação. In R. Hofstetter & W. R. Valente (Orgs.), *Saberes em (trans)formação: tema central da formação de professores* (pp. 113–172). Editora Livraria da Física.
- Hofstetter, R., & Schneuwly, B. (2020). “Profissionalização” e formação de professores: uma tipologia dos saberes de referência para a docência. In W. R. Valente (Org.), *Ciências da educação, campos disciplinares e profissionalização: Saberes em debate para a formação de professores* (pp. 17–60). Editora Livraria da Física.
- Julia, D. (2001). A cultura escolar como objeto histórico. *Revista Brasileira de História da Educação*, (1), 9–43.
- Morais, M. das D. de. (2021). *Abordagem sobre frações: Uma análise do contrato didático e das concepções de ensino da matemática como fatores de influência na aprendizagem de estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental* (Tese de Doutorado, Universidade Federal de Pernambuco). Universidade Federal de Pernambuco.
<https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/442165>
- Morais, R. S., Bertini, F., & Valente, W. R. (2021). *A matemática do ensino de frações: do século XIX à BNCC*. Editora Livraria da Física.
- Nascimento, D. de S. (2022). *Uma caracterização das proposições dos materiais do Laboratório de Currículos do Rio de Janeiro (1975–1985): Os saberes profissionais do professor que ensina matemática nos primeiros anos escolares* (Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Sergipe). Universidade Federal de Sergipe.
- Rio de Janeiro (Estado), Secretaria de Estado de Educação e Cultura. (1976). *Reformulação de currículos (Vol. 1: Pré-Escolar e 1.º Grau)*. Imprensa Oficial.
- Rio de Janeiro (Estado), Secretaria de Estado de Educação e Cultura. (1978a). *Proposta metodológica – 1.º grau – 3.ª série*. Imprensa Oficial.
- Rio de Janeiro (Estado), Secretaria de Estado de Educação e Cultura. (1978b). *Proposta metodológica – 1.º grau – 4.ª série*. Imprensa Oficial.
- Rio de Janeiro (Estado), Secretaria de Estado de Educação e Cultura. (1978c). *Proposta metodológica – 1.º grau – 5.ª série*. Imprensa Oficial.
- Santos, R. (2022). *Uma caracterização do saber profissional do professor que ensinava aritmética a partir de exemplares da Revista de Ensino (1902–1930)* (Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Sergipe). Universidade Federal de Sergipe.
- Tramontano, A. F., & França, D. M. (2022a). Como abordar o conceito de fração? *Anais do ENAPHEM – Encontro Nacional de Pesquisa em História da Educação Matemática*, (6).
<https://periodicos.ufms.br/index.php/ENAPHEM/article/view/16662>

- Tramontano, A. F., & França, D. M. de A. (2022b). Educação matemática no Rio de Janeiro nas décadas de 1960–1980: Saberes profissionais em tempos do MMM. *Seminário Temático Internacional*, 1(1), 1–11. <https://anais.ghemat-brasil.com.br/index.php/STI/article/view/137>
- Tramontano, A., & França, D. M. (2024). Zoltan Paul Dienes e o ensino de frações: Uma análise dos saberes a ensinar e para ensinar em suas obras (1960–1970). *Seminário Temático Internacional*, 1(1), 1–8. <https://anais.ghemat-brasil.com.br/index.php/STI/article/view/287>
- Trindade, S. da S. (2021). *A constituição de um grupo de estudos sobre frações com professores que ensinam matemática* (Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul). Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- Valente, W. R. (2015). História da educação matemática nos anos iniciais: a passagem do simples/complexo para o fácil/difícil. *Cadernos de História da Educação*, 14(1), 357–374.
- Valente, W. R. (2020). História e cultura em educação matemática: A produção da matemática do ensino. *REMATEC: Revista de Matemática, Ensino e Cultura*, 15(36), 164–174.