

Revista de História da Educação Matemática

HISTEMAT

ISSN: 2447-6447

Submetido: 04/09/2025

Aprovado: 18/12/2025



<https://doi.org/10.62246/HISTEMAT.2447-6447.2025.11.762>



O CÁLCULO DIFERENCIAL: um estudo histórico pelo livro *Cálculo diferencial e integral* de Piskunov

DIFFERENTIAL CALCULUS: a historical study through Piskunov's textbook differential and integral calculus

Daniel Sales da Conceição¹

Universidade Estadual de Feira de Santana

danielsalesc358@gmail.com



Lattes: <http://lattes.cnpq.br/9349210895409270>



Orcid: <https://orcid.org/0000-0001-8314-3207>

Eliene Barbosa Lima²

Universidade Estadual de Feira de Santana

eblima@uefs.br



Lattes: <http://lattes.cnpq.br/8159944355847853>



Orcid: <https://orcid.org/0000-0001-6928-5217>

¹ Graduando em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS). Av. Transnordestina, s/n, Novo Horizonte, Feira de Santana, Bahia, Brasil, CEP: 44036-900. E-mail: danielsalesc358@gmail.com.

² Doutora em Ensino, Filosofia e História das Ciências pela Universidade Federal da Bahia/ Universidade Estadual de Feira de Santana (UFBA/UEFS). Professora titular da Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS), Feira de Santana, Bahia, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Transnordestina, s/n, Novo Horizonte, Feira de Santana, Bahia, Brasil, CEP: 44036-900. E-mail: eblima@uefs.br.

RESUMO

Neste trabalho, teve-se como objetivo analisar, sob uma perspectiva histórica, a concepção de cálculo diferencial apresentada no livro *Cálculo diferencial e integral*, de Piskunov. Para tanto, fez-se uso de uma literatura vigente e da compreensão da obra tanto como objeto físico quanto como documento histórico (Choppin, 2004). Publicado para atender às demandas do estudante de engenharia, o livro foi bibliografia básica em diversos cursos de matemática, inclusive na formação de professores de matemática, como na Licenciatura Plena em Ciências da Universidade Estadual de Feira de Santana. Assim, por meio dos debates teóricos, metodológicos e epistemológicos do campo da história, interpretou-se que Piskunov adotou uma concepção moderna de limite, em sintonia com as contribuições teóricas disponíveis à época, mas ajustada ao seu público-alvo e ao seu ambiente educacional técnico. Isso traz indícios de que, ao menos naquele período, entre as décadas de 1960 e 1990, a perspectiva dos cursos de licenciaturas estava mais voltada para o próprio campo disciplinar da matemática.

Palavras-chave: Piskunov. Cálculo diferencial e integral. Livro didático. Matemática moderna. Licenciatura em Matemática.

ABSTRACT

This study aimed to analyze, from a historical perspective, the conception of differential calculus presented in Piskunov's textbook *Differential and Integral Calculus*. To this end, we drew on contemporary literature, along with an understanding of the work as both a physical object and a historical document (Choppin, 2004). Published to meet the demands of engineering students, the book served as core reference in various mathematics courses, including in mathematics teacher training, such as the full teacher training degree in Sciences at the Universidade Estadual de Feira de Santana. Thus, through theoretical, methodological, and epistemological debates within the field of history, it was interpreted that Piskunov adopted a modern conception of limits, in line with the theoretical contributions available at the time but adapted to his target audience and the technical educational environment. This suggests that, at least during that period (from the 1960s to the 1990s), the perspective of these teacher training programs was primarily focused on the mathematical disciplinary field itself.

Keywords: Piskunov. Differential and Integral Calculus. Textbook. Modern Mathematics. Mathematics Teaching Degree.

INTRODUÇÃO

Este trabalho de iniciação científica teve³ como objetivo analisar, sob uma perspectiva histórica, a concepção de cálculo diferencial apresentada no livro *Cálculo Diferencial e Integral*, de Piskunov. Essa investigação foi realizada no âmbito do projeto de pesquisa *O Cálculo Diferencial e Integral: uma análise das tentativas de sua escolarização*⁴, que visa “[...] analisar debates que intentaram incluir o Cálculo Diferencial e Integral como conteúdo escolar a partir da Reforma Benjamin Constant⁵ até os dias atuais” (Lima et al., 2021, p.1).

Esta pesquisa se insere em uma história cultural, que, segundo Barros (2005, p.1), “[...] é aquele campo do saber historiográfico atravessado pela noção de ‘cultura’”, em que o autor salienta que a comunicação, tanto oral quanto escrita, constrói a cultura. Nesse campo, há uma preocupação em problematizar os conflitos sociais, em dar voz ao indivíduo e às peculiaridades da formação de uma classe social, ou seja, em valorizar também aquilo que escapava ao comum (Vainfas, 1997). Assim, na história cultural, ganha relevância, por exemplo, a análise de um único livro didático, e não exclusivamente de sua coleção, analisada em um longo período.

Sob essa perspectiva, segundo Barros (2020, p.6), uma fonte histórica é “[...] tudo aquilo que, por ter sido produzido pelos seres humanos ou por trazer vestígios de suas ações e interferência, pode nos proporcionar um acesso significativo à compreensão do passado humano e de seus desdobramentos no presente”.

Em particular, o livro didático, conforme Choppin (2004), pode ser entendido como documento histórico e objeto físico. Na primeira categoria, “[...] a história que o pesquisador escreve não é, na verdade, a dos livros didáticos: é a história de um tema, de uma noção, de um personagem, de uma disciplina, ou de como a literatura escolar foi apresentada por meio de uma mídia particular [...]” (Choppin, 2004, p. 554). Já no segundo caso, “[...] o historiador dirige sua atenção diretamente para os livros didáticos, recolocando-os no ambiente em que foram concebidos, produzidos, distribuídos, utilizados e ‘recebidos’, independentemente, arriscaríamos a dizer, dos conteúdos dos quais eles são portadores” (Choppin, 2004, p. 554).

É nesse contexto, que a publicação de Piskunov ganha relevância. Trata-se de um livro, conforme Lima (2012, p. 284), “[...] rigoroso no tratamento dos conceitos trabalhados e traz as

³ Aprovado pelo Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC/CNPq) 2024/2025, da Universidade Estadual de Feira de Santana.

⁴ Fomentado pelo CNPq, mediante aprovação no Edital da Chamada CNPq/MCTI/FNDCT Nº 18/2021 – Universal - *faixa A*, 2021.

⁵ Essa Reforma foi implementada por meio do Decreto n.º 981, de 8 de novembro de 1890, que regulamentou a instrução primária e secundária do Distrito Federal (Decreto n.º 981, 1890). Na atualidade, tais níveis de ensino podem ser equiparados aos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental e o Ensino Médio.

demonstrações da maioria dos teoremas enunciados”. Segundo Roque (2012), a compreensão do rigor em cada período do conhecimento matemático está fortemente vinculada ao objeto central de estudo. Sob essa perspectiva, a autora argumenta que as definições devem estar alinhadas às implicações e aos padrões de cada época; caso contrário, são consideradas insatisfatórias. Em suma, a produção do conhecimento matemático é legitimada com base no rigor estabelecido em um determinado período.

Além disso, o livro de Piskunov foi tomado, entre as décadas de 1960 e 1990, como referência em vários cursos superiores envolvendo as ciências exatas no Brasil. Isso pode ser constatado, por exemplo, no curso de Matemática da Universidade de São Paulo (USP), onde a obra se tornou popular entre estudantes e professores de matemática a partir dos anos 1960.

Lima (2012) também reforça que o livro de Piskunov era amplamente recomendado, principalmente pela variedade de seus exercícios, o que é evidenciado pelo próprio autor em seu prefácio da nona edição da versão russa de sua obra, publicada em 1985. Em suas próprias palavras: “O livro didático inclui um grande número de problemas e exemplos para exercícios, muitos dos quais ilustram a relação da matemática com outras disciplinas” (Piskunov, 1985, p.12, tradução nossa). De modo geral, Lima (2012, p. 284) delineou o livro da seguinte forma:

há um predomínio da linguagem simbólica em detrimento da linguagem natural; sempre que possível cada definição ou teorema é seguido de um exemplo visando ilustrar aquilo que foi apresentado e ao final de cada capítulo, uma grande quantidade de exercícios é proposta ao leitor, sendo que a maioria deles envolve cálculos e aplicação direta dos conceitos.

O livro também foi bastante difundido na Universidade Federal da Bahia (UFBA) (UFBA, 1980) e na Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS) (1980-1990). Esta última, no período de 1976 a 1986, ofertava o curso de Licenciatura Plena em Ciências, com habilitação em Matemática, voltado para a formação dos professores de matemática que iriam lecionar no segundo grau (Ensino Médio). Nesse curso, foi implementado o ensino de cálculo diferencial por meio de uma disciplina denominada Cálculo I, que, no ano de 1986, segundo Oliveira (2022), foi ministrada tendo o estudo de limite como conceito-base para a disciplina.

Este estudo ainda não havia sido realizado no âmbito da UEFS, apesar de o livro de Piskunov estar presente na análise na pesquisa de Oliveira (2022), cujo foco foi produzir uma análise do ensino de cálculo diferencial na UEFS, no curso de Licenciatura Plena em Ciências, com habilitação em Matemática, no ano de 1986, o que difere do objetivo deste trabalho.

Assim, nesta pesquisa, utilizamos como objeto de estudo e fonte histórica (Choppin,

2004), a 9.^a edição⁶ do livro traduzida para o português em 1982. Essa edição foi escolhida com base em um levantamento bibliográfico realizado pelo Colegiado de Matemática da UEFS, no ano de 1991, acerca da bibliografia básica e complementar das disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática. Naquela época, o acervo da biblioteca já contava com 16 volumes da edição de 1982 de Piskunov (UEFS, 1991). Assim, tudo indica que essa tenha sido a edição utilizada na disciplina de Cálculo I em 1986.

O livro de Piskunov, conforme sinalizado anteriormente, foi adotado como bibliografia básica para a disciplina Cálculo I, ministrada, de acordo com seu conteúdo programático, seguindo os capítulos de forma semelhante à estrutura proposta no índice da obra. Ou seja, o curso foi iniciado com os conteúdos relacionados a número, variável, funções e, posteriormente, abordou-se limite e continuidade das funções, sendo o limite a teoria central no ensino do cálculo diferencial desde o século XIX. Na sequência, apresentou-se a derivada (Oliveira, 2022).

Dito isso, é fundamental compreender as transformações do cálculo diferencial integral, especialmente no que se refere ao período denominado de Matemática Moderna. De modo geral, esse novo estatuto da matemática começou a ser sistematizado a partir do século XIX, com a introdução de novas abordagens, temas, objetos e metodologias que influenciaram diversas áreas do conhecimento e foram consolidados e desenvolvidos ao longo do século XX (Lima & Dias, 2010). Assim, ao explorar os processos de institucionalização dessa matemática moderna, foi possível identificar as mudanças paradigmáticas que moldaram o pensamento matemático e, conseqüentemente, avaliar as possíveis contribuições de Piskunov, considerando de que forma suas ideias dialogavam com as inovações e os desafios daquela época.

Em suma, essa compreensão nos permitiu analisar as propostas de Piskunov em seu livro, situando-o em um contexto histórico e epistemológico mais amplo.

1. O LIVRO DE CÁLCULO DE PISKUNOV

Nikolai Semenovich Piskunov (1908-1977) foi um matemático soviético nascido em Froltsovo (atual Ivanovo). Formou-se, em 1929, pelo Instituto Pedagógico Yaroslavl e, como Doutor em Ciência Física e Matemática atuou como professor a partir de 1939. Desde 1941,

⁶ No levantamento bibliográfico realizado pelo Colegiado de Matemática da UEFS, no ano de 1991, consta que o livro publicado em 1982 correspondia à 8.^a edição. Contudo, no acervo da Biblioteca, para o mesmo ano, encontra-se apenas a 9.^a edição, a qual optamos por utilizar nesta análise. Não foi possível determinar com certeza se houve um erro datilográfico ou se há duas edições publicadas no mesmo ano.

trabalhou no Instituto de Matemática da Academia de Ciência da União das Repúblicas Socialistas Soviéticas (URSS)⁷. A linha de pesquisa de Piskunov direcionava-se às equações diferenciais parciais (EDP), físico-matemática e aos modeladores matemáticos da hidromecânica. Em colaboração com Andrey Kolmogorov (1903-1987), Ivan Petrovsky (1901-1973) e Ronald Fisher (1890-1962), desenvolveu a Equação KPP-Fisher. Piskunov foi também agraciado com o título de Cientista Honrado da República Socialista Federativa Soviética da Rússia (RSFSR) em 1965.

Além disso, era autor de livros didáticos, tendo escrito vários deles para universidades, com o total de 29 publicações e 14 livros. Dentre suas obras, destaca-se o livro *Cálculo Diferencial e Integral*, publicado em 1961⁸. Inicialmente, conforme destacado por Piskunov (1985) no prefácio da quinta edição russa, de 1978, a partir da quarta edição, o livro, que tinha um formato compacto, passou a ser publicado em dois volumes. Em relação ao volume 1, foi inicialmente pensado “[...] para atender o curso de matemática para estudantes universitários, projetados para 300-450 horas” (Piskunov, 1985, p. 11), mas, a partir da 9.^a edição russa, passou a ser projetado para 400-450 horas.

Há no prefácio da 9.^a edição em português, um relato de Piskunov (1982), afirmando que alguns capítulos foram revistos e acrescidos de informações, especialmente aqueles que abordavam ramos ligados à matemática moderna, cuja institucionalização teve início a partir do século XIX, período conhecido como a “idade do rigor” (Roque, 2012). Essa alcunha se estabeleceu por conta do movimento da construção do campo científico da “matemática pura” nesse período, com a participação de personagens como Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) e Karl Weierstrass (1815-1897), responsáveis, respectivamente, por impulsionar a reorganização da análise e por constituir a definição de limite baseada em termos de *épsilon* (ϵ) e *delta* (δ).

Todo esse processo, com seu caráter abstrato e formalizado, favoreceu a consolidação da matemática moderna ao longo do século XX, a qual se caracteriza principalmente por seu enfoque conceitual e por uma abordagem axiomática, voltada à coerência interna e à generalidade, moldando o ensino de disciplinas até os dias atuais.

Dessa forma, justifica-se a revisão feita pelo Piskunov, pois os conhecimentos atrelados à matemática moderna eram considerados necessários e fundamentais para seu público-alvo: os

⁷ Atualmente é composta por 15 repúblicas, que se tornaram países independentes após a dissolução da URSS em 1991. São elas: Rússia, Ucrânia, Bielorrússia, Estônia, Letônia, Lituânia, Armênia, Geórgia, Azerbaijão, Moldávia, Cazaquistão, Quirguistão, Tadjiquistão, Turcomenistão e Uzbequistão.

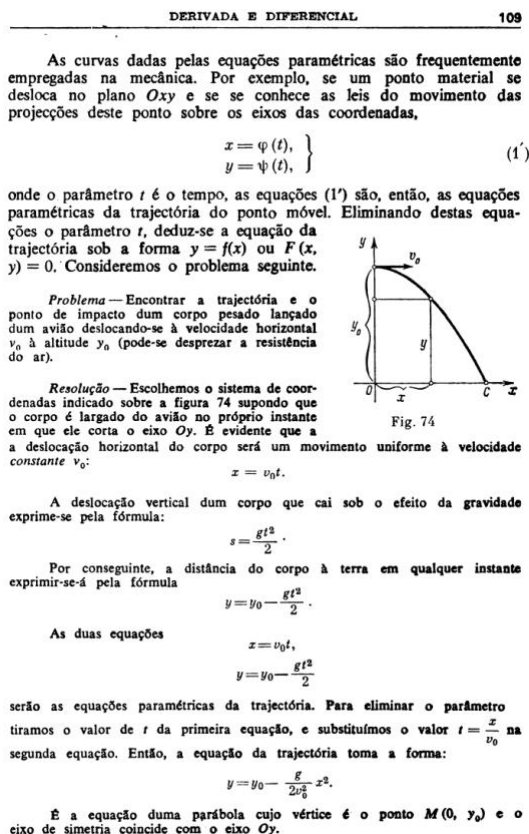
⁸ A publicação mais antiga que encontramos até o momento.

alunos do curso de engenharia e futuros engenheiros (Conceição & Vasconcelos, 2025). Explica Piskunov (1982, p. 11):

Certos capítulos foram profundamente revistos e completados, em especial aqueles que tratam de certos ramos da matemática moderna, cujo conhecimento é nos nossos dias indispensável a todo o engenheiro. [...] Certas questões, habitualmente tratadas nestes capítulos, foram conscientemente reportadas aos capítulos seguintes. Isto permitiu abordar rapidamente a derivada, noção fundamental do cálculo diferencial; esta necessidade foi-nos ditada pelas exigências das outras disciplinas do ensino técnico superior.

O livro de Piskunov, embora não fosse prioritariamente destinado à formação de professores, foi amplamente adotado em diversos cursos superiores. Isso se deve, além de ter como base a matemática moderna, vista como representação de uma nova era para o conhecimento matemático, à presença também de diversos problemas ligados ao cotidiano e à aplicação do cálculo, os quais atendiam às expectativas técnicas de cursos como o de engenharia, como observado na Figura 1.

Figura 1 – Parametrização de curva sob um problema físico



Fonte: Piskunov (1982, p. 109)

Outro exemplo nesse sentido foi apresentado no tópico “Interpretação mecânica da derivada segunda” (Piskunov, 1982, p.129). Nele, há aplicações da derivada, bem como o uso

de situações cotidianas para introduzir o domínio de definição de uma variável. Por este prisma, o autor fez a seguinte exposição:

Uma variável é susceptível de tomar valores numéricos diferentes. O conjunto destes valores pode variar de acordo com o caráter do problema considerado. Por exemplo, a temperatura da água aquecida nas condições normais pode variar dependendo da temperatura ambiente, 15 a 18°C, até ao ponto de ebulição, 100°C. Pelo contrário, a variável $x = \cos \alpha$ pode levar todos os valores compreendidos entre -1 e +1 (Piskunov, 1982, p.17).

O livro fez bastante sucesso não apenas no Brasil⁹. Sua difusão ocorreu mundialmente, sendo traduzido para outras línguas como, espanhol, inglês, francês e a já mencionada língua portuguesa. Essa ampla distribuição culminou, em 2019, na instituição do Prêmio Piskunov pela Faculdade de Engenharia da Universidade Nacional de Assunção (FIUNA), destinado aos estudantes com destacado desempenho na disciplina de Cálculo Diferencial. Conforme a FIUNA (2024), a premiação homenageia “[...] o nome do autor do livro base usado historicamente pela cátedra, Nikolai Semenovich Piskunov, que foi um matemático soviético, conhecido por seu livro básico sobre cálculo diferencial e integral”.

Assim, conforme mencionado anteriormente, utilizamos nesta pesquisa histórico-cultural, a 9.^a edição do livro traduzida para o português. Ao voltarmos nossa atenção para a sua estrutura, observamos que esse livro didático, tomado neste caso como um objeto físico (Choppin, 2004), está dividido em 12 capítulos (Quadro 1).

Quadro 1 – Divisão dos capítulos do livro de Piskunov

Capítulos	Intitulação
Primeiro	Número, variável, funções
Segundo	Limite e continuidade das funções
Terceiro	Derivada e diferencial
Quarto	Teoremas relativos às funções deriváveis
Quinto	Estudo da variação das funções
Sexto	Curvatura duma curva
Sétimo	Números complexos. Polinômios
Oitavo	Funções de várias variáveis

⁹ Segundo Reimão (2014), embora o Brasil ainda atravessasse um período de censura a livros pelo menos até a década de 1980, obras de caráter científico, técnico e didático eram liberadas por meio da Instrução n.º 1-70, de 24 de fevereiro de 1970.

Nono	Aplicações do cálculo diferencial na geometria do espaço
Décimo	Integral indefinida
Décimo-primeiro	Integral definida
Décimo-segundo	Aplicações geométricas e mecânicas da integral definida

Fonte: Piskunov (1982)

No entanto, mediante o nosso objetivo, concentramo-nos no primeiro – *Número, variável, funções* – e segundo capítulos – *Limite e continuidade das funções*.

Mesmo com a significativa circulação da obra, ao longo do tempo, Piskunov promoveu alterações na estrutura e no conteúdo de sua obra, possivelmente em resposta às críticas e às sugestões. Uma dessas modificações foi a reestruturação desses dois primeiros capítulos, implementada a partir da 4.^a edição¹⁰:

Os dois primeiros capítulos do primeiro volume são “Número. Variável. Função” e “O limite. Continuidade de funções” são escritas na medida do possível brevemente. Algumas das questões geralmente estabelecidas nesses capítulos foram movidas para o terceiro e os capítulos subsequentes, sem prejuízo do caso. Isso tornou possível passar mais cedo para o conceito básico de cálculo diferencial - derivada, é exigido por outras disciplinas do curso universitário (a conveniência de tal localização do material é confirmada pela experiência de trabalho) (Piskunov, 1982, p. 11)

Sob esses termos, a seguir, analisamos que cálculo diferencial foi proposto no livro *Cálculo diferencial e integral*, de Piskunov.

2. O CONCEITO DE LIMITE NO LIVRO DE PISKUNOV

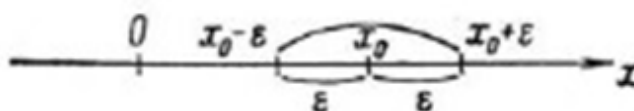
Piskunov, conforme mencionado anteriormente, produziu o seu livro com uma grande variedade de exemplos aplicados e com a utilização de demonstrações geométricas. Entretanto, segundo Ávila (2002), ele não deixou de lado o rigor matemático. Para Ávila (2002, p. 84), tal prática é evidenciada na “[...] introdução, logo no início do curso, da definição de limite em termos de $\mathcal{E}$ (épsilon) e δ (delta), e consequente dedução das propriedades do limite”

Esse aspecto pode ser examinado, por exemplo, no tópico *Domínio de definição duma variável*, onde Piskunov determina que o domínio de uma variável é o “conjunto dos valores

¹⁰ Essa informação consta no prefácio da edição russa publicada em 1985.

numéricos que ela é susceptível de tomar” (Piskunov, 1982, pp. 17-18). Ressaltando ainda que se x pertence ao intervalo $(x_0 - \mathcal{E}, x_0 + \mathcal{E})$, então x_0 é o centro do intervalo de raio $\mathcal{E}$, que em outras palavras significa que $|x - x_0| < \mathcal{E}$.

Figura 2 – Representação e vizinhança feita por Piskunov



Fonte: Piskunov (1982, p. 34)

No contexto desta análise, discutimos, em seguida, os conceitos de limite de uma função e limite de uma variável, presentes no segundo capítulo, intitulado *Limite e Continuidade das Funções*, tomando-os como base para nossa reflexão. Posteriormente, examinamos os elementos dessa definição em relação ao que foi tratado no capítulo *Número, variáveis e funções*, o que nos permitiu aprofundar a compreensão do processo adotado por Piskunov até chegar à sua formulação conceitual.

Nesse capítulo, assim Piskunov define limite de uma função:

Seja $y = f(x)$ uma função definida numa vizinhança do ponto a ou em certos pontos desta vizinhança. A função $y = f(x)$ tende para o limite b ($y \rightarrow b$) quando x tende para a ($x \rightarrow a$), se para cada número positivo ϵ , por mais pequeno que seja, se pode indicar um número positivo δ tal que para todos, os x diferentes de a e verificando a desigualdade

$$|x - a| < \delta$$

a desigualdade

$$|f(x) - b| < \epsilon$$

é satisfeita. Se b é o limite da função $f(x)$ quando $x \rightarrow a$, escreve-se então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

ou $f(x) \rightarrow b$ quando $x \rightarrow a$ (Piskunov, 1982, p. 37).

Essa definição proposta por Piskunov, mesmo na atualidade, ainda é considerada moderna, em razão de seu rigor fundamentado nas abordagens algébricas e analíticas. Para que tal definição fosse viabilizada, foi necessário, primeiramente, estabelecer o campo numérico em que se situam os objetos $(x, y, a, b, \delta, \epsilon)$, neste caso, os números reais. Piskunov optou por apresentar esse conteúdo logo no primeiro capítulo, no tópico *Números reais. Representação dos números reais pelos pontos do eixo numérico*.

Ainda nesse segundo capítulo, encontra-se a definição de limite de uma variável, apresentada antes da definição de limite de uma função. Nessa seção, Piskunov (1982, p. 34) afirmou:

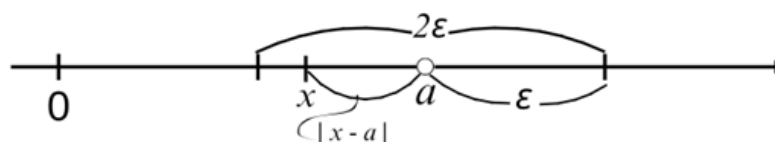
O número constante a chama-se o limite da grandeza variável x. Se, para todo o número arbitrariamente pequeno

$\varepsilon > 0$, se pode indicar um valor da variável x tal que todos os valores consequentes da variável verifiquem a desigualdade

$$|x - a| < \varepsilon.$$

Se o número a é o limite da variável x, diz-se que x tende para o limite a e escreve-se:
 $x \rightarrow a$ ou $\lim x = a$

Figura 3 – Representação de Piskunov



Fonte: Piskunov (1982, p. 84)

Para utilizar as expressões “O número constante *a*” e “grandeza variável” foi necessário que Piskunov (1982, p. 34) as definisse no capítulo anterior. No tópico, *Grandezas variáveis e grandezas constantes* é explicado, por meio de exemplos de grandezas físicas, o conceito de *variação* (suscetível a tomar diferentes valores) e *constância* (quando os valores numéricos não mudam).

Em seus estudos, Reis (2003) enfatiza que o ensino de cálculo passou a ser fundamentado na teoria do limite a partir do século XIX, especialmente por conta das contribuições de Cauchy, que desenvolveu essa teorização com base nas ideias de *variação e constância*. Em suas próprias palavras: “Chamamos quantidade variável aquela que consideramos capaz de assumir diversos valores diferentes sucessivamente. Por outro lado, chamamos quantidade constante aquela que assume um valor fixo e determinado”¹¹ (Cauchy, 1823, p.1, tradução nossa)

É possível identificar uma aproximação conceitual entre a definição de limite de uma variável apresentada por Piskunov e aquela formulada por Cauchy, na qual este explicitava:

Quando os valores sucessivamente atribuídos a uma variável aproximam-se indefinidamente de um valor fixo, de modo que eles finalmente difiram deste valor tão pouco quanto quisermos, esse último valor é chamado o limite de todos os outros. [...] Indicaremos o limite para o qual

¹¹ On nomme quantité variable celle que l'on considère comme devant recevoir successivement plusieurs valeurs différentes les une des autres. On appelle au contraire quantité constante toute quantité qui reçoit une valeur fixe et déterminée.

converge determinada variável pela abreviação “lim.” escrita antes da variável em questão¹² (Cauchy, 1823, p.1, tradução nossa).

Em resumo, tomam-se valores consecutivos para uma variável (x), de modo que x se torne infinitamente pequeno, ou seja, menor que qualquer número dado, a ponto de não mais se distinguir de um valor fixo (a), à medida que x se aproxima de a . (USP, 2001a). Observamos, portanto, que a expressão “arbitrariamente pequeno”, empregada por Piskunov (1982), retoma a concepção de infinitamente pequeno, formulada por Cauchy. Em suas palavras: “valores numéricos sucessivos de uma variável diminuem indefinidamente de modo a tornarem-se menores que qualquer número dado” (Cauchy, 1823, p.1, tradução nossa).

A noção de limite de uma variável já havia sido discutida por D’Alembert (citado em Baron & Bos, 1985, p. 28) no século XVIII, da seguinte maneira:

Diz-se que uma grandeza é o limite de outra grandeza quando a segunda pode aproximar-se da primeira tanto quanto se queira, embora a primeira grandeza nunca possa exceder a grandeza da qual ela se aproxima; de modo que a diferença entre tal quantidade e seu limite é absolutamente indeterminável.

Ainda assim, essa definição não atendia o rigor que passou a ser exigido na matemática a partir do século XIX. Baron e Bos (1985, p. 32) fizeram diversas críticas, especialmente em torno de questões como: “Suponhamos que agora que uma variável possa alcançar seu limite. Surgem então dois problemas: até que ponto são preservadas as propriedades da variável quando ela alcança o limite, e até que ponto o limite ainda é único?” Os autores acrescentaram, ainda, que “O problema que não está claro é como a variável percorre seus domínios, e como se aproxima do seu limite”.

De outra parte, a definição de limite formulada por Cauchy, considerada moderna à época, embora já desvinculada das noções geométricas, ainda não apresentava a última palavra do rigor, isto é, a noção de δ e ε .

A formalização do cálculo, com a última palavra do rigor, vem a partir de Weierstrass. Em sua contribuição de *função contínua e magnitude de uma variável*, ele fez a seguinte afirmação:

Chamamos de magnitude variável, ilimitada ou limitada, aquela que pode aceitar valores infinitamente pequenos, ou que é capaz de tais valores, se, entre os valores que pode aceitar, as quantidades forem menores do que qualquer quantidade arbitrariamente pequena assumida. Um tamanho variável x se torna infinitamente pequeno, com outro y , ao mesmo tempo, significa: ‘Depois de assumir uma grandeza arbitrariamente pequena ε , pode ser determinado para x um

¹² Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres. [...]. Nous indiquerons la limite vers laquelle converge une variable donnée par l'abréviation “lim.” placée devant cette Variable.

limite de δ , de modo que para cada valor de x , para o qual $|x| < \delta$, o valor correspondente torna-se $|y| < \varepsilon$ (Weierstrass, 1878, p. 57 citado em Silva, 2021, p. 296).

Na publicação de 1982 de *Cálculo Diferencial e Integral*, para que a definição de limite de uma variável estivesse em conformidade com a definição moderna, Piskunov descreveu as expressões “ $\varepsilon > 0$ ” (raio da vizinhança), “ $|x - a| < \varepsilon$ ” (módulo e variável limitada), “consequentes da variável” (variável ordenada), as quais foram esclarecidas, respectivamente, no primeiro capítulo nos tópicos: Domínio de definição duma variável; Valor absoluto de um número Real e Variável ordenada; Variável crescente e Variável decrescente; Variável limitada.

Dessa forma, Piskunov (1982) conseguiu definir o limite de uma variável, preservando a unicidade e as propriedades do limite, garantindo que sua definição de limite respeitasse umas das principais características exigidas pela matemática moderna. Assim, ele conseguiu evitar as críticas levantadas por Baron e Bos (1985) em relação à definição proposta por D’Alembert. No entanto, até aquele momento, Piskunov não esclarecera de que forma a variável percorria seu domínio.

Para tratar dessa questão, Piskunov (1982) iniciou, ainda no primeiro capítulo, a introdução de noções sobre função, organizando o conteúdo em quatro seções: *Função*; *Diversas formas de expressões das funções*; *Principais funções elementares*. *Funções elementares*; *Funções Algébricas*. Na seção *Função*, Piskunov (1982, p. 20) afirmou: “ y é uma Função de x e escreveremos $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$, etc., se a cada valor da variável x pertencendo a um certo domínio, corresponde um valor da variável y ”.

Essa definição difere daquela formulada pelo Grupo Bourbaki ao final da década de 1930, a qual é amplamente adotada atualmente. Segundo Roque (2012, p. 474), os bourbakistas, por meio de uma abordagem conjuntista, definiram função nos seguintes termos:

Sejam E e F dois conjuntos, que podem ser distintos ou não. Uma relação entre um elemento variável x de E e um elemento variável y de F é dita uma relação funcional se, para todo x pertencente a E , existe um único y pertencente a F que possui a relação dada com x . Damos o nome função à operação que associa, desse modo, a todo elemento x pertencente a E , o elemento y pertencente a F que possui a relação dada com x ; y será dito o valor de função no elemento x

Assim, em um primeiro movimento, pareceu-nos que Piskunov trabalhou com uma definição de função, tendo certas semelhanças com versões que circularam em tempos anteriores, como a utilizada por Dirichlet em 1837.

Como é possível notar no excerto a seguir, há certa aproximação entre a definição proposta por Piskunov e aquela apresentada por Dirichlet (1837 citado em Lima, 2006, p. 88, tradução nossa):

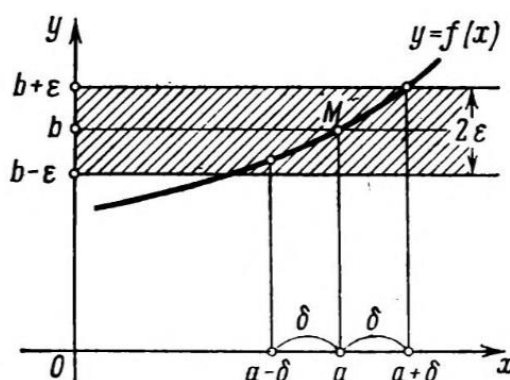
Se a variável y está tão relacionada a variável x de tal forma que sempre que um valor numérico é atribuído a x , existe uma regra segundo a qual um único valor de y é determinado, então y é dito ser uma função da variável independente x ” (citado em Lima, 2006, p. 88, tradução nossa).

Contudo, apesar das semelhanças, como o uso da noção de variabilidade na formulação do conceito de função dada por Dirichlet, é importante considerar que essas definições foram elaboradas em contexto históricos distintos. Por exemplo, enquanto o conceito de domínio ainda não estava plenamente estabelecido à época de Dirichlet, já era amplamente reconhecido e sistematizado, quando Piskunov formulou sua definição. Isso permitiu, em nossa leitura, que Piskunov incorporasse esse conceito à sua definição de função, aproximando-a das concepções atualmente aceitas.

Dada a definição de função, Piskunov (1982) seguiu para a introdução do conceito de limite de uma função. Contudo, para que essa definição pudesse ser considerada moderna, conforme discutido anteriormente, era necessário o uso da noção de função contínua, a qual, segundo Ávila (2002), só foi formalmente apresentada por Weierstrass em 1874.

De fato, Weierstrass definiu que, se f é uma função contínua em um intervalo (a, b) , então, para todo $x \in (a, b)$, existem $x' \leq x$ e $x'' \geq x$, tais que, por menor que seja o intervalo considerado, sempre vai existir um x pertencente ao intervalo, de modo que x' se aproxima de x pela esquerda ($x' \leq x$) e x'' pela direita ($x'' \geq x$). Essa ideia está diretamente relacionada à condição $|x - a| < \delta$, notação também utilizada por Piskunov, ao apresentar sua definição de limite de uma função (USP, 2001b). Assim, vemos que Piskunov consegue definir limite de uma função com base nos pressupostos do rigor moderno estabelecidos a partir do século XIX (Figura 4).

Figura 4 – Representação de limite de uma função feita por Piskunov



Fonte: Piskunov (1982, p. 38)

Notamos, ainda, que o autor constrói essa definição passo a passo, apresentando, no início do capítulo, elementos que seriam essenciais para a sua melhor compreensão. Ao final,

Piskunov expressou o limite de uma função utilizando “ $f(x) \rightarrow b$ quando $x \rightarrow a$ ” (Piskunov, 1982, p.37), mostrando como o comportamento da função está ligado ao comportamento da variável, o que possibilita um entendimento mais coerente da ligação entre a definição algébrica e a representação geométrica em termos de ε e δ .

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este texto teve como objetivo realizar uma análise, de cunho histórico, sobre o cálculo diferencial presente no livro *Cálculo diferencial e integral*, de Piskunov. Para tanto, fez-se uso de uma literatura vigente e da compreensão da obra tanto como objeto físico quanto como documento histórico (Choppin, 2004).

Ao nos debruçarmos sobre essa questão e ao interrogar o livro como um documento histórico (Choppin, 2004), percebemos que se trata de um cálculo considerado moderno, acrescido de representações geométricas, recurso utilizado pelo autor para favorecer a compreensão dos conteúdos.

A análise realizada ao longo deste texto permite observar que, na definição de limite de uma função apresentada por Piskunov (1982), o conceito de variação desempenha um papel central. Ao construir essa definição de limite, o autor detalha o que se entende por variação, os tipos possíveis, quais os elementos variam (os números reais), o espaço em que essa variação ocorre (a vizinhança de um ponto), de que maneira ela se dá (variação de grandeza em relação a outra) e até onde se pode variar (limite).

Chama atenção, nesse processo, a maneira como Piskunov introduziu o limite de uma variável, assim como os mecanismos que empregou para alinhar a sua abordagem aos padrões de rigor moderno que passaram a orientar a matemática a partir do século XIX. Isso igualmente se reflete na definição de função apresentada por ele, que, embora guarde semelhanças com a proposta de Dirichlet, já incorpora conceitos amplamente estabelecidos na época da publicação da primeira edição de seu livro. Com isso, torna-se evidente que os conceitos matemáticos se constroem ao longo do tempo, resultando de contribuições diversas e de diferentes momentos históricos da matemática.

Embora tenha feito apropriações para atender à formalidade exigida na época, Piskunov não abandonou aspectos que pareciam estar atrelados à sua formação. Um exemplo disso é a escolha de não adotar a definição de função fundamentada no método axiomático da teoria dos

conjuntos, conforme proposto pelo Grupo Bourbaki, mas sim, uma definição que atendia aos métodos russos. Segundo Kaznatcheev (2018), tratava-se de uma abordagem pedagógica que valorizava a prática e a intuição, permitindo que os alunos construíssem sua compreensão dos conceitos matemáticos a partir de exemplos concretos.

Dessa forma, Piskunov utilizou uma concepção moderna de limite, em sintonia com as contribuições teóricas disponíveis à época, mas ajustada ao seu público-alvo e ao seu ambiente educacional técnico. Em outras palavras, ele empregou conceitos da matemática vigentes no mundo acadêmico para construir a sua obra, que, embora direcionada a engenheiros, foi amplamente usada em programas de formação de professores de matemática, como na Licenciatura Plena em Ciências da UEFS, pelo menos no ano de 1986. Essa dualidade permite uma reflexão sobre a natureza da formação matemática oferecida naquele período, especialmente em relação aos futuros professores da disciplina.

Nessa conjuntura, não podemos ignorar o fato de que a adoção desse livro na formação de professor de matemática traz indícios de que, ao menos naquele período, a perspectiva dos cursos de licenciatura estava mais voltada para o próprio campo disciplinar da matemática. Isso porque os saberes mobilizados na obra não foram concebidos nem organizados tendo como prioridade o estudante da licenciatura e a sua aprendizagem, tampouco a sua prática específica da docência em sala de aula. Sob essa ótica, ainda que sejam necessários mais estudos, os saberes do cálculo parecem pertencer a uma cultura geral, mobilizados em diversas especialidades, independentemente da área de formação.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), por meio de bolsa de iniciação científica aprovada em Edital aprovada em outubro de 2024.

REFERÊNCIAS

- Ávila, G. (2002). O ensino do cálculo e da análise. *Revista Matemática Universitária*, 33, 83-95.
- Baron, M. E., & Bos, H. J. M. (1985). *Curso de história da matemática: Origens e desenvolvimento do cálculo* (J. R. B. Coelho, R. Maier, & M. J. M. M. Mendes, Trans.). Universidade de Brasília.

- Barros, J. D'A. (2005). História cultural e história das idéias: Diálogos historiográficos. *Cultura: Revista de História e Teoria das Ideias*, 21, 1-24. <https://journals.openedition.org/cultura/3353>
- Barros, J. D'A. (2020). Fontes históricas: Uma introdução à sua definição, à sua função no trabalho do historiador, e à sua variedade de tipos. *Cadernos do Tempo Presente*, 11(2), 3-26.
- Cauchy, A. L. (1899). *Resume des leçons données a l'École Polytechnique sur le calcul infinitésimal*. In *Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy* (Sér. 2, Vol. 4). Gauthier-Villars. https://archive.org/details/TO0E033362_TO0324_PNI2035_000000/mode/2up. (Obra original publicada em 1823).
- Choppin, A. (2004). História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. *Educação e Pesquisa*, 30(3), 549-566. <http://www.scielo.br/pdf/ep/v30n3/a12v30n3.pdf>
- Conceição, D. S., & Vasconcelos, A. L. (2023). Um estudo da definição de limite pelo livro Cálculo Diferencial e Integral de Piskunov. *Revista História, Matemática e Educação Matemática*, 1(1), 20-31. <https://periodicos.uefs.br/index.php/rehimem/article/view/11883/9709>
- Decreto nº 981, de 8 de novembro de 1890. (1890). Aprova o Regulamento da Instrução Primária e Secundária do Distrito Federal. <https://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1824-1899/decreto-981-8-novembro-1890-515376-publicacaooriginal-1-pe.html>
- Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Asunción. (ca. 2024). *Prêmio Piskunov*. <https://www.ing.una.py/?p=38852>
- Kaznatcheev, A. (2018, 10 nov.). Bourbaki vs the Russian method as a lens on heuristic models. *Russian Heuristics*. <https://egtheory.wordpress.com/2018/11/10/russian-heuristics/#more-8230>
- Lima, E. B. (2006). *Dos infinitésimos aos limites: A contribuição de Omar Catunda para a modernização da análise matemática no Brasil*. [Dissertação de Mestrado em Ensino, Filosofia e História das Ciências]. Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana
- Lima, E. B. et al. (2021). *O cálculo diferencial e integral: Uma análise das tentativas de sua escolarização* [Projeto de pesquisa]. Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico.
- Lima, E. B., & Dias, A. L. M. (2010). O Curso de análise matemática de Omar Catunda: Uma forma peculiar de apropriação da análise matemática moderna. *Revista Brasileira de História da Ciência*, 3(2), 211-230.
- Lima, G. L. (2012). *A disciplina de Cálculo I do curso de Matemática da Universidade de São Paulo: Um estudo de seu desenvolvimento, de 1934 a 1994*. [Tese em Educação Matemática]. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
- Oliveira, M. B. (2022). O ensino de cálculo diferencial no curso de Licenciatura Plena em Ciências da Universidade Estadual de Feira de Santana: Uma análise do caderno de cálculo de uma licencianda (1986). *ACERVO: Boletim do Centro de Documentação do GHEMAT-SP*, 4, 1-25. <https://doi.org/10.55928/ACERVO.2675-2646.2022.4.71>
- Piskunov, N. (1982). *Cálculo diferencial e integral* (9. ed.). Lopes da Silva.

- Piskunov, N. (1985). *Differentsial'noe i integral'noe ischisleniya dlya vtuzov* [Cálculo diferencial e integral para estudantes de escolas técnicas superiores] (13. ed., Vol. 1). Nauka.
- Reimão, S. (2014). “Proíbo a publicação e circulação...” – censura a livros na ditadura militar. *Estudos Avançados*, 28(80), 201-216. <https://revistas.usp.br/eav/article/view/79684/83686>
- Reis, F. S. (2003). *A tensão entre rigor e intuição no ensino de cálculo de análise: A visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos*. [Tese em Educação] Universidade de São Paulo.
- Roque, T. (2012). *História da matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Zahar.
- Silva, C. M. S. (2021). As Notas de Aula de Karl Weierstrass em 1878. *Revista Brasileira de História da Matemática*, 21(42), 294-328. <https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/364/331>
- Universidade de São Paulo. (2001a). *Augustin Louis Cauchy (1789-1857)*. <http://ecalculo.if.usp.br/historia/cauchy.htm>
- Universidade de São Paulo. (2001b). *Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897)*. <http://ecalculo.if.usp.br/historia/weierstrass.htm>
- Universidade Estadual de Feira de Santana, Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática. (1991). *Levantamento bibliográfico*. UEFS.
- Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática. (1980). *Programa de ensino para a disciplina Cálculo IV*. Arquivo do IM-UFBA.
- Vainfas, R. (1997). História das mentalidades e história cultural. In C.F. Cardoso & R.Vainfas (Org.). *Domínios da História: ensaios de teoria e metodologia* (pp.127-162). Campus.