



GEOMETRIA DEDUTIVA EM DEBATE NO MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA

*DEDUCTIVE GEOMETRY UNDER DEBATE IN THE MODERN
MATHEMATICS MOVEMENT*

Maria Célia Leme da Silva¹

UNIFESP, UNESP

celia.leme@unifesp.br



<http://lattes.cnpq.br/6495445682540608>



<https://orcid.org/0000-0001-6029-0490>

Ana Paula Jahn²

IME-USP

anajahn@ime.usp.br



<http://lattes.cnpq.br/3612359023677691>



<https://orcid.org/0000-0003-0515-7536>

¹ Doutora em Educação – Currículo pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP). Professora Associada da Universidade Federal de São Paulo (UNIFESP), Diadema, São Paulo/SP, Brasil. Professora do Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência da UNESP de Bauru e do Programa de Pós-graduação de Educação Matemática da UNESP de Rio Claro. Endereço para correspondência: Rua Rio Grande 551, ap. 11B, Vila Mariana, São Paulo/SP, Brasil, CEP: 04018-001. E-mail: celia.leme@unifesp.br.

² Doutora em Didática da Matemática pela Universidade Joseph Fourier (UJF Grenoble, França). Professora Doutora do Departamento de Matemática do Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade de São Paulo (IME-USP), São Paulo/SP, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Cardoso de Almeida, 820, ap. 142, Perdizes, São Paulo/SP, Brasil, CEP: 05013-001. E-mail: anajahn@ime.usp.br.

RESUMO

Este artigo examina a trajetória do ensino de geometria no Brasil e na França entre as décadas de 1930 e 1970, período que abrange reformas educacionais anteriores ao Movimento da Matemática Moderna (MMM) e o próprio movimento. Fundamentado em pressupostos da História Cultural, o estudo investiga como a geometria dedutiva e, posteriormente, as Transformações Geométricas (TG) foram abordadas em normativas curriculares e livros didáticos. A metodologia envolveu a análise de reformas brasileiras (1931, 1942, 1951), de instruções curriculares de São Paulo (1965-1975) e da França (1950-1978), bem como de livros didáticos representativos. Os resultados indicam que, no Brasil pré-MMM, houve uma restrição gradual da geometria intuitiva em favor de uma Geometria Euclidiana (GE) dedutiva, por vezes com ênfase na memorização. Durante o MMM, apesar das ideias modernizadoras, a introdução das TG nos livros didáticos paulistas (décadas de 1960-1970) ocorreu majoritariamente como apêndice ou justaposição, sem alterar os pilares da GE tradicional, mantendo-se, por exemplo, os casos de congruência. Em contraste, na França, as TG foram integradas explicitamente a partir de 1971, concomitantes a uma reestruturação curricular mais profunda, que incluiu a eliminação dos casos de congruência nos manuais e uma articulação mais forte com o estudo de álgebra e vetores. Conclui-se que as trajetórias de apropriação das TG e da geometria dedutiva divergiram significativamente entre os dois países, evidenciando a complexidade das reformas curriculares e a persistência de abordagens tradicionais no contexto brasileiro.

Palavras-chave: Geometria do ensino; Normativas; Livros didáticos, Transformações Geométricas.

ABSTRACT

This article examines the trajectory of geometry teaching in Brazil and France, focusing on the 1930s to 1970s, a period encompassing educational reforms prior to the Modern Mathematics Movement (MMM) and the MMM itself. Based on assumptions from Cultural History, the study investigates how deductive geometry and, later, Geometric Transformations (GT) were addressed in curricular regulations and textbooks. The methodology involved analyzing Brazilian reforms (1931, 1942, 1951) and curricular instructions from São Paulo (1965-1975) and France (1950-1978), as well as representative textbooks. The results indicate that, in pre-MMM Brazil, there was a gradual restriction of intuitive geometry in favor of deductive Euclidean Geometry (GE), sometimes with an emphasis on memorization. During the MMM, despite modernizing ideas, the introduction of GT into Brazilian textbooks in São Paulo (1960s-1970s) occurred mostly as an appendix or juxtaposition, without altering the pillars of traditional GE, such as the retention of congruence cases. In contrast, in France, GT was explicitly integrated starting in 1971, concomitant with a more profound restructuring of the curriculum that included the elimination of congruence cases in textbooks and a stronger link with the study of algebra and vectors. We conclude that the trajectories of appropriation of GT and deductive geometry diverged significantly between the two countries, highlighting the complexity of curricular reforms and the persistence of traditional approaches in the Brazilian context.

Keywords: Teaching Geometry; Regulations; Textbooks; Geometric Transformations.

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O presente trabalho sistematiza os principais resultados obtidos no âmbito de um projeto de pesquisa³ dedicado à história da *geometria do ensino*⁴ e ao Movimento da Matemática Moderna (MMM). Com base em pressupostos teórico-metodológicos da História Cultural (Chartier, 1990; Chervel, 1990; Julia, 2001), a investigação objetivou examinar saberes específicos para compreender os distintos processos de sistematização de *geometrias do ensino* modernizadoras. As principais fontes de estudo foram normativas e livros didáticos produzidos em dois estados brasileiros – São Paulo e Bahia e no contexto francês, abrangendo as décadas de 1950 a 1980, direcionados aos cursos primário e ginásial (anteriores a 1971) ou ao ensino de 1º grau (para alunos de 7 a 14 anos)⁵.

É imperativo reconhecer que o MMM tem sido objeto de densas investigações, tanto no Brasil quanto internacionalmente. No cenário brasileiro, três estudos são considerados pioneiros e referências indispensáveis: a tese de D'Ambrosio (1987) intitulada *The dynamics and consequences of the modern mathematics reform movement for Brazilian mathematics education*, defendida na Indiana University, EUA; a dissertação *O abandono do ensino de geometria: uma visão histórica*, de Pavanello (1989)⁶, defendida na UNICAMP; e a dissertação de Búrigo (1989), intitulada *Movimento da Matemática Moderna no Brasil: estudo de ação e do pensamento de educadores matemáticos nos anos 60*, defendida na UFRGS.

Após essa etapa inicial, inúmeras outras investigações foram conduzidas sobre esse momento histórico marcante, cuja ressonância se estende ao presente, como evidenciam estudos posteriores de Vitti (1998) e Soares (2001), entre outros.

O MMM configurou-se como uma iniciativa de grande alcance, com o objetivo de aproximar a matemática escolar da matemática acadêmica do século XX. Sua finalidade era preparar os estudantes para o ingresso na universidade, familiarizando-os com os conceitos, as noções e a linguagem empregados pelos matemáticos da época. Esse movimento mobilizou diversas ações, incluindo reuniões internacionais, grupos de estudo e uma vasta produção científica disseminada globalmente, estabelecendo-se como um campo fértil para a investigação

³ Projeto apoiado pelo CNPq (processo n. 405027/2023-0). Uma primeira versão dos resultados foi apresentada e publicada nos Anais do IX SIPEM.

⁴ De acordo com Valente e Bertini (2022).

⁵ A Lei 5.692/71 inaugurou uma nova organização no ensino brasileiro. Os cursos primário e secundário foram extintos e foi criado o Ensino de 1º Grau de oito anos de duração.

⁶ O objetivo da dissertação de Pavanello foi abordar a trajetória do ensino de geometria em diferentes momentos históricos, porém o artigo *O abandono do ensino de geometria no Brasil: causas e consequências*, publicado na *Zetetiké* em 1993, associou o MMM como uma das causas do abandono (Pavanello, 1993).

acadêmica em diversas nações. Um exemplo notável foi o projeto de cooperação entre Brasil e Portugal⁷, que proporcionou novas representações sobre o MMM, culminando na publicação do livro *O Movimento da Matemática Moderna: uma revolução curricular* (Oliveira, Leme da Silva & Valente, 2011). Adicionalmente, destaca-se a relevância da recente obra *Modern Mathematics: An International Movement?* (De Bock, 2023), publicado pela Springer.

A continuidade das pesquisas sobre geometria e o MMM é motivada por uma percepção ainda prevalente na comunidade de educadores matemáticos brasileiros, que sugere um “abandono do ensino de geometria” e atribui ao MMM uma possível responsabilidade por essa situação. Tal percepção foi reexaminada à luz dos resultados do Projeto de Cooperação Internacional CAPES/GRICES, particularmente no artigo de Leme da Silva (2022) intitulado *Abandono do ensino de geometria e a Matemática Moderna: uma revisão histórica*. Reconhecemos, contudo, a importância de aprofundar a compreensão desse tema, especialmente para elucidar as diferentes abordagens do ensino de geometria promovidas durante o MMM. Além disso, os estudos teóricos desenvolvidos para embasar a pesquisa histórica ao longo dos últimos anos – como a construção epistemológica do conceito de *matemática do ensino* (Valente & Bertini, 2022)⁸, adaptável à *geometria do ensino* – permitem-nos explorar as especificidades e peculiaridades dos saberes problematizados nesse período.

Para o presente artigo, ao reunir resultados de diferentes subprojetos, propomos uma nova reflexão que emerge como síntese de nossas análises sobre o período do MMM. O foco recai sobre como o ensino da geometria dedutiva foi abordado e problematizado naquele contexto. Investigamos as discussões acerca da introdução da geometria axiomática, especialmente para alunos do curso ginásial ou da 7ª série do 1º grau (13-14 anos de idade), período considerado crucial para a formalização do ensino de geometria, com a incorporação de provas e demonstrações.

Apresentamos, a seguir, os principais resultados que nos permitiram evidenciar as nuances da problematização do ensino da geometria dedutiva durante o MMM.

⁷ O projeto intitulado “A matemática moderna nas escolas do Brasil e de Portugal: estudos históricos comparativos”, desenvolvido na cooperação CAPES/GRICES no período de 2006 a 2009, foi coordenado do lado brasileiro pelo Prof. Dr. Wagner Rodrigues Valente e, do lado português, pelo Prof. Dr. José Manuel Matos.

⁸ Os autores referem-se à *matemática do ensino* como formas específicas de conhecimento matemático mobilizadas na prática educativa, sendo que *matemática a ensinar* refere-se ao conteúdo matemático que é alvo da ação pedagógica, enquanto *matemática para ensinar* diz respeito aos conhecimentos e competências necessários para efetivamente ensinar esse conteúdo aos alunos.

1. A GEOMETRIA EM TEMPOS PRÉ-MODERNOS

Apesar do projeto ter como ponto de partida a década de 1950 – momento de efervescência nas discussões, tanto no Brasil, com os Congressos Nacionais de Ensino de Matemática⁹, quanto internacionalmente, com a criação da CIEAEM (*Comission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques*) em 1950 –, julgamos pertinente examinar as três reformas nacionais do Ensino Secundário brasileiro, que antecederam o MMM: a Reforma Francisco Campos (de 1931), a Reforma Capanema (de 1942) e a Reforma Simões Filho (de 1951).

Os resultados dessa análise inicial foram apresentados no *XV Encontro Paulista de Educação Matemática* (EPEM), onde se buscou identificar a presença e as instruções referentes a conceitos específicos que, posteriormente, desempenhariam um papel significativo durante o período do MMM, a saber: as construções geométricas e as transformações geométricas. De modo geral, a estrutura proposta para o ensino de geometria e as orientações metodológicas puderam ser sintetizadas nos Quadros 1 e 2, os quais são discutidos a seguir.

Quadro 1: Propostas curriculares para o ensino de Geometria

1º Ciclo	Reforma Francisco Campos (de 1931)	Reforma Capanema (de 1942)	Reforma Simões Filho (de 1951)
1ª Série	Iniciação geométrica	Geometria intuitiva	
2ª Série	Iniciação geométrica	Geometria intuitiva	
3ª Série	Geometria dedutiva	Geometria dedutiva	Geometria dedutiva
4ª Série	Geometria dedutiva	Geometria dedutiva	Geometria dedutiva
5ª Série	Geometria dedutiva		

Fonte: Adaptado de Pastor e Leme da Silva (2024)

Conforme observado no Quadro 1, notam-se mudanças significativas entre as reformas. A reforma de 1931 organizava-se em 5 séries enquanto as demais possuíam 4; e percebe-se uma separação clara entre um estudo inicial ou uma geometria dita “intuitiva” nas primeiras séries e uma geometria dedutiva nas séries finais nas reformas de 1931 e 1942. Um ponto notável é a ausência de qualquer geometria nas duas primeiras séries na reforma de 1951. Vale destacar que a Geometria dedutiva proposta nas normativas refere-se à Geometria Euclidiana (GE). É neste cenário que as ideias modernizadoras chegaram ao curso ginásial de quatro anos, em que

⁹ O I Congresso Brasileiro do Ensino de Matemática ocorreu em 1955, em Salvador/Bahia; o II ocorreu em 1957, em Porto Alegre/RS; o III em 1959, no Rio de Janeiro/RJ; o IV em 1962, em Belém/PA; e o V e último congresso ocorreu em 1966, em São José dos Campos/SP.

a geometria se encontrava restrita às 3ª e 4ª séries, com enfoque predominantemente dedutivo. Quanto às instruções didático-pedagógicas, o Quadro 2 oferece uma visão geral.

Quadro 2: Orientações para o ensino de Geometria

Reforma	Instruções/Orientações
Campos (de 1931)	- Curso propedêutico de Geometria - Partir da intuição para <i>atingir gradualmente</i> a exposição formal: da experimentação e percepção sensorial para o raciocínio analítico
Capanema (de 1942)	- Geometria intuitiva como <i>transição suave</i> entre experiências com formas e concepção dedutiva da Geometria
Simões Filho (de 1951)	- Não dispensar o apelo à intuição - <i>Despertar aos poucos</i> o sentimento da necessidade da justificativa, da prova e da demonstração

Fonte: Adaptado de Jahn e Magalhães (2024, grifo nosso)

As três reformas enfatizam a transição entre uma geometria intuitiva – experimental, concreta, vinculada a experimentações práticas – e a geometria dedutiva, abstrata, que visa ao desenvolvimento do raciocínio hipotético-dedutivo. Ao buscar compreender tanto a estrutura quanto as orientações presentes nessas reformas, é fundamental retomar o papel significativo da Reforma Francisco Campos. Isso se deve ao fato de que o ideário do 1º movimento internacional do ensino de matemática, discutido no IV Congresso Internacional de Matemática, em 1908, sob a liderança de Félix Klein (1849-1925)¹⁰, foi apropriado pelas normativas brasileiras exatamente nessa reforma. Euclides Roxo (1890-1950), engenheiro e professor do Colégio Pedro II (instituição de referência para o Ensino Secundário à época), foi a figura central na renovação instituída pela Reforma Francisco Campos de 1931, que, pela primeira vez, estabeleceu a disciplina Matemática para o curso secundário.

A Reforma de 1931, segundo Roxo, amalgamava as tendências do primeiro movimento internacional, tanto do ponto de vista metodológico quanto dos conteúdos propostos, ao fundir os diferentes ramos da matemática (aritmética, álgebra e geometria) em uma única disciplina. As instruções para o ensino da matemática recomendavam que:

Partindo da intuição viva e concreta, a feição lógica crescerá, a pouco e pouco, até atingir, gradualmente, a exposição formal; [...] os conhecimentos serão adquiridos, a princípio pela experimentação e pela percepção sensorial e, depois, lentamente, pelo raciocínio analítico. Assim, quanto à geometria, o estudo demonstrativo formal deve ser precedido de um curso propedêutico, destinado ao ensino intuitivo, de caráter experimental e construtivo (Bicudo, 1942, p. 157)

Apesar de as três reformas enfatizarem a necessidade de uma geometria intuitiva, com experimentação e percepção sensorial, como preparatória para a compreensão de uma

¹⁰ Félix Klein (1849-1925), matemático alemão que liderou a primeira Comissão Internacional para estudo do Ensino da Matemática (CIEM), de modo a propor reformas do ensino.

geometria dedutiva, a reforma de 1951, em particular, excluiu o espaço destinado à parte introdutória e intuitiva das reformas anteriores, mantendo somente a abordagem dedutiva. É relevante considerar que a Reforma Francisco Campos foi alvo de inúmeras críticas, especialmente em contraposição ao modelo de ensino tradicional prevalente no decorrer do século XIX e nas primeiras décadas do XX.

As propostas para um ensino intuitivo da geometria foram destacadas durante a reforma de 1931. No entanto, a análise das regulamentações nos impõe a distinção entre os objetivos declarados nos programas e os objetivos reais do ensino efetivo. Enquanto as normativas indicam os objetivos pretendidos do ensino, as práticas pedagógicas revelam os objetivos reais, que nem sempre estão alinhados (Chervel, 1990). Tudo indica que esse foi o cenário nas décadas de 1930 a 1950, quando, apesar das diretrizes enfatizarem a importância do ensino intuitivo e de gradualmente despertar a necessidade de justificativas, os relatos acerca de práticas em sala de aula durante o *II Congresso Nacional de Ensino de Matemática*, em 1957, sugerem uma abordagem predominantemente dedutiva para o ensino de geometria, com ênfase na memorização de teoremas e de suas demonstrações.

A falta de concatenação lógica inicial dos teoremas e do caráter intuitivo de boa parte deles produz a nociva impressão, na mente do aluno, de que as demonstrações constituem malabarismos do professor. [...] Neste momento ele não percebe as relações mútuas que existem entre os vários teoremas. Não forma, também, uma ideia clara do que é uma teoria ou não possui teoria alguma. [...] Têm sido os malfadados teoremas a tábua de salvação dos alunos medíocres que, nos exames, conseguem a nota mínima graças a uma demonstração decorada (Congresso ..., 1959 apud Búrigo, 2015, p. 8).

Dessa forma, podemos inferir que, no ambiente educacional do ensino secundário, a abordagem do ensino de geometria era dominada pelo estudo de uma GE axiomática, com foco em postulados e na demonstração de teoremas. Isso resultava em uma prática de memorização por parte dos alunos, sem uma compreensão efetiva do significado do raciocínio dedutivo. O contexto da década de 1950, certamente direcionou a elaboração da primeira coleção didática moderna, na década de 1960, escrita por Osvaldo Sangiorgi (1921-2017)¹¹, matemático, professor e autor renomado de livros didáticos. Sangiorgi foi uma figura significativa no processo de apropriação e divulgação das ideias do MMM no Brasil, em particular com a criação do *Grupo de Estudo do Ensino de Matemática*¹² (GEEM), em São Paulo. É o que passamos a tratar na seção que segue.

¹¹ Para mais detalhes ver Valente (2008).

¹² O GEEM foi criado em 1961, em São Paulo, e atuou até 1976, sempre sob a liderança de Osvaldo Sangiorgi. Um estudo mais aprofundado sobre o GEEM pode ser lido em Lima e Passos (2008).

2. A GEOMETRIA MODERNA DE OSVALDO SANGIORGI

O estudo conduzido por Jahn e Leme da Silva (2023) realizou uma análise comparativa da abordagem da geometria dedutiva nos livros destinados ao curso ginásial de Osvaldo Sangiorgi (OS) nas décadas de 1950 e de 1960, esta última designada como moderna. O objetivo foi compreender, de maneira mais detalhada, como OS mobilizou aportes do MMM para eliminar a necessidade de os alunos decorarem as demonstrações de teoremas. Parece que esse foi um dos principais objetivos do livro moderno, já que a GE dedutiva era claramente prescrita tanto antes quanto no momento da publicação da coleção moderna. A pergunta central do estudo foi: em que medida e de que forma OS altera a proposta de uma geometria dedutiva para a 3ª série ginásial na coleção moderna (Sangiorgi, 1967), em comparação com a coleção pré-moderna (Sangiorgi, 1958)?

O estudo apresenta uma análise quantitativa inicial no que diz respeito à quantidade de páginas dedicadas exclusivamente ao estudo da geometria. O exemplar pré-moderno dedica 65,3% do total de páginas do volume, o que corresponde a 186 páginas. O livro moderno dedica 63,7% do total de páginas, contendo 200 páginas para o ensino de geometria, ou seja, não houve diferença significativa na porcentagem do total de páginas. Por outro lado, para atender à Portaria de 1951, que não propõe geometria nas 1ª e 2ª séries, os conteúdos de geometria ocupam mais de 50% do volume da 3ª série. Assim, observamos que, diferentemente da abordagem atual de diluir os conteúdos geométricos ao longo de todos os anos escolares, nas décadas de 1950 e 1960, a geometria apresentava-se concentrada nas duas últimas séries ginásiais, mas de modo algum podemos considerar que ela tenha sido negligenciada ou pouco expressiva nos livros didáticos analisados.

Ao comparar a sequência de conteúdos dos dois livros, podemos identificar que ela foi preservada no livro moderno, entretanto, os mesmos conceitos passaram a ser propostos com cerca de 28% a mais de espaço. Inversamente ao que poderíamos conjecturar – que haveria mais teoremas –, o número de teoremas demonstrados nos dois livros passou de 54 para 28, ou seja, uma redução de cerca de 50% na quantidade de teoremas.

Com isso, passou-se à análise qualitativa, de modo a compreender o aumento de espaço para desenvolver a GE e a redução da quantidade de teoremas.

Uma diferença observada foi na reorganização completa dos postulados, introduzindo o conceito de medida e, por exemplo, os quatro casos de congruência de triângulos, que no livro pré-moderno eram teoremas (proposições demonstradas), passam a ser postulados no livro

moderno. Porém, antes de postular os casos de congruência, são propostas construções geométricas, como *exercícios exploratórios*, envolvendo a construção de triângulos dados três elementos dentre lados e ângulos (por exemplo, dados dois lados e o ângulo compreendido entre eles), para que os alunos pudessem verificar experimentalmente a igualdade dos triângulos construídos. OS justifica a mudança de abordagem para os casos de congruência:

Dentre as questões de ordem didática que têm provocado celeuma no curso ginasial, está a que diz respeito aos casos de congruência de triângulos, antigamente denominados casos clássicos de igualdade de triângulos.

Postula-se ou demonstra-se?

Na verdade, nem uma coisa nem outra [...]

Os casos “clássicos” de congruência de triângulos ocorrerão por conta da “exploração” que os alunos farão em classe, usando régua, compasso e transferidor. Posteriormente, na construção axiomática que se fará da Geometria – o que terá lugar progressivamente – esses casos serão englobados no postulado P.10

(Sangiorgi, 1966, p. 50, grifos do autor).

A redução do número de teoremas justifica-se ainda pela implementação de uma geometria experimental preparatória para o estudo da GE dedutiva, com a inserção de *exercícios exploratórios*, antes de iniciar as demonstrações, para que o estudante experimente a verificação de algumas propriedades em decorrência de outras.

Nesta fase, o aluno já está “habitado” a verificar que algumas propriedades são consequências de outras mais elementares. É a preparação para o início de uma axiomatização simples, onde serão reunidas sob a forma de postulados (axiomas) as situações encontradas nos exercícios exploratórios. Somente depois de muita vivência (basta ver que, no livro, o Grupo de *dez postulados fundamentais* é introduzido depois de 120 páginas dedicadas à geometria) é que o aluno pode ser iniciado nas *demonstrações* propriamente ditas (Sangiorgi, 1966, p. 51).

Tudo indica estar em jogo a compreensão de um processo dedutivo que incorpora “novos postulados”, de modo a permitir um entendimento mais adequado do raciocínio lógico-dedutivo subjacente, porém preservando a “tradicional” GE. O objeto a ser ensinado – no caso, a geometria dedutiva – foi modificado tanto em relação ao objeto de ensino (geometria a ensinar) quanto às ferramentas de trabalho do professor (geometria para ensinar), no momento de inserir *exercícios exploratórios*, configurando uma *geometria do ensino*¹³ elaborada por OS.

Outro exemplo que nos ajuda a compreender a mudança da proposta feita por OS é a maneira de apresentar e desenvolver os teoremas. O teorema da propriedade dos ângulos da base de um triângulo isósceles, no livro de 1958, foi feito de maneira clássica: o teorema é enunciado, com uma figura ilustrativa ao lado, identificam-se a hipótese e a tese e realiza-se a

¹³ A partir de uma adaptação do constructo *matemática do ensino* de Valente e Bertini (2022), estamos considerando a *geometria a ensinar* e a *geometria para ensinar* como constituintes interligadas da configuração de uma *geometria do ensino* durante o MMM.

demonstração. Na abordagem moderna, os alunos primeiro foram convidados a realizar *exercícios exploratórios*, que correspondem a construir um triângulo isósceles, medir os ângulos, comparar com as construções dos colegas se o resultado obtido também foi verificado por eles e enunciar a propriedade identificada. Outros exercícios complementam essa etapa, como os *testes de atenção*, que pedem aos alunos para identificar os vértices correspondentes em diversas situações de congruência de triângulos. Em seguida, o livro traz três demonstrações distintas: a primeira como um “plano de ação”, que corresponde a traçar a bissetriz do ângulo entre os lados congruentes; a segunda, como “outro caminho” para a prova, traçando a altura relativa à base do triângulo isósceles e a terceira, por meio de “esquemas desenhados”, coloridos de preferência, onde figuram uma série de passos dedutivos, por meio de construções ($\rightarrow$), de equivalências ($\Leftrightarrow$) e de implicações ($\Rightarrow$). A valorização de diferentes resoluções e diversas representações para a demonstração do mesmo teorema, de modo que o aluno possa compreender a diversidade de caminhos no processo dedutivo, é um aspecto inovador nos livros didáticos brasileiros da década de 1960.

Nas conclusões, é preciso destacar que OS conjugava dois elementos relevantes para um autor de livros didáticos produzir inovações: uma sólida formação matemática, realizada na Universidade de São Paulo, que lhe conferia segurança para alterar postulados, juntamente com o curso de verão desenvolvido nos EUA, em que muito provavelmente, tomou contato com debates e experiências entre diferentes geometrias debatidas no MMM. Além disso, ele também tinha a *expertise* como professor de aulas particulares para estudantes de renomados colégios paulistanos, o que lhe permitia conhecer as dificuldades e os erros mais comuns cometidos pelos alunos. Em outras palavras, OS transitava com habilidades tanto na *geometria a ensinar* como na *geometria para ensinar*, o que possibilitava anunciar recomendações pertinentes aos estudantes e professores sobre a *geometria do ensino*. A frase que resumiria, no nosso entender, a apropriação de OS sobre a geometria no MMM seria: “Não ‘decore’ demonstrações de teoremas!” (Sangiorgi, 1967, p. 258).

3. TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E O MMM

As propostas modernizadoras para o ensino de geometria produziram muitos debates e embates, tanto no Brasil quanto internacionalmente. Pelo menos duas tendências podem ser

destacadas na *Primeira Conferência Interamericana*¹⁴ de 1961: (1) a elaborada por G. D. Birkhoff¹⁵, que propunha uma modificação nos axiomas de Euclides, seguindo a forma geral de Hilbert¹⁶, sem, entretanto, abandonar os princípios da GE e sendo mais difundida nos EUA; e (2) a desenvolvida na Alemanha, por meio das Transformações Geométricas (TG), apoiada nas ideias de F. Klein. Leme da Silva (2008) realizou um primeiro estudo sobre a proposta de OS e apontou que a abordagem moderna desse autor se aproximou mais da tendência internacional utilizada nos Estados Unidos e baseada em Birkhoff, do que da proposta do ensino da geometria por meio das TG, ligada a Klein.

De todo modo, as TG foram objeto de muitas discussões, sendo, inclusive, consideradas como responsáveis pelo “fracasso” do MMM. Assim, o estudo de Leme da Silva e Jahn (2024a) analisou como as TG foram abordadas em quatro livros didáticos entre as décadas de 1960 e 1970, produzidos por lideranças do MMM em São Paulo e na Bahia, conforme o Quadro 3.

Quadro 3: Livros didáticos selecionados para análise

Título	Autor	Ano
<i>Matemática – Curso Moderno para os ginásios – 3º vol.</i>	Oswaldo Sangiorgi (OS)	1967
<i>Matemática – Curso Moderno – 3 Ciclo Ginásial</i>	Alcides Bóscolo, Benedito Castrucci (BC)	1970
<i>Ensino Atualizado da Matemática – curso ginásial – vol. 3</i>	Omar Catunda, Martha M. de Souza Dantas, Eliana Costa Nogueira, Norma Coelho de Araújo, Eunice da C. Guimarães e Neide C. de Pinho e Souza (CD)	1971
<i>Curso Moderno de Matemática para ensino de primeiro grau – 7</i>	Anna Averbuch, Franca Cohen Gottlieb, Lucília Bechara Sanchez, Manhúcia Liberman e Jacy Monteiro (supervisão) (GRUEMA) ¹⁷	1975

Fonte: Leme da Silva e Jahn (2024a, p. 6)

O critério de escolha dos livros foi estabelecido em dois grupos: o dos “matemáticos” (doutores e/ou catedráticos em Matemática da USP) que representam o campo acadêmico e o conhecimento da matemática do século XX – Castrucci, Catunda, Jacy Monteiro; e o de professores(as) de Matemática, que representam o campo profissional, o conhecimento da cultura escolar e suas dinâmicas – Sangiorgi, Bóscolo, ambos de São Paulo; Dantas, Nogueira, Araújo, Guimarães e Souza, da Bahia; Averbuch, Gottlieb, do Rio de Janeiro e Sanchez e Liberman, de São Paulo.

¹⁴ Esta Conferência teve o apoio da Organização dos Estados Unidos Americanos (OEA) e da Organização das Nações Unidas para a Educação, Ciência e Cultura (UNESCO), ocorreu em 1961, em Bogotá, Colômbia, com participantes da Argentina, Bolívia, Brasil, Canadá, Colômbia, Costa Rica, Chile, Equador, El Salvador, Estados Unidos, Guatemala, Honduras, Índias Ocidentais, México, Nicarágua, Panamá, Peru, Porto Rico, Uruguai e Venezuela (Fehr, 1962).

¹⁵ George David Birkhoff (1884-1944), matemático estadunidense.

¹⁶ David Hilbert (1862-1943), matemático alemão.

¹⁷ Grupo de Ensino de Matemática Atualizada.

Foram construídas três categorias de análise para o exame de cada livro: (1) Abordagem das TG como objetos de ensino – o objetivo foi analisar como o conceito de TG é definido nos livros; (2) Articulação entre TG e Geometria Euclidiana (GE) – o objetivo foi analisar como a proposta de inserir as TG se integrou (ou não) à GE configurada para as escolas; (3) Sequência de conceitos estudados sobre TG – o objetivo foi analisar se houve uma uniformização na escolha das TG a serem apresentadas e na ordem dos conceitos abordados. As conclusões foram sintetizadas no Quadro 4, a seguir.

Quadro 4: Síntese das categorias analisadas nos livros selecionados

Autor(es)	Abordagem da TG (definição)	Articulação entre TG e GE	Conteúdos
OS	Translação e Rotação, conjuntos munidos da operação de adição para justificar grupo comutativo.	Não houve, TG isoladas no Apêndice do livro	Translações Rotações Simetria Axial Simetria Central
BC	Transformações no plano como funções e estudo de suas propriedades. Grupo das Transformações	Não houve, TG isoladas no Apêndice do livro	Transformações, Translações, Simetria Central, Rotação, Simetria Axial Isometria Direta e Inversa
CD	Transformações no plano afim como funções e estudo de suas propriedades. Grupo afim elementar, grupo das congruências (isométrico ou euclidiano)	Integra as TG com a GE	Translações, Dilatações Transformação no plano afim, Grupo afim elementar, Homotetia, Simetria axial, Grupo das congruências, Rotação
GRUEMA	Simetria Axial como uma função e estudo de suas propriedades	Integra as TG com a GE nos tópicos Simetria e Congruência	Simetria axial

Fonte: Leme da Silva e Jahn (2024a, p. 15-16)

A análise geral permite dizer que temos quatro propostas claramente diferenciadas para a abordagem das TG nos livros didáticos analisados. A categoria de articular as TG com a GE no livro didático foi um divisor no processo analítico, visto que os livros de OS e BC optaram por não inserir as TG no corpo do texto, deixando-as isoladas (ou desconectadas) do estudo da GE “clássica”, presente nos livros didáticos desde sempre.

Outra característica evidenciada no Quadro 4 é a diversidade de TG selecionadas para serem estudadas por estudantes de 13 anos e a ordem de estudo nos livros, tanto nos autores que não integram as TG com a GE, quanto nos que realizam uma proposta integradora. OS vai diretamente para as isometrias: Translação, Rotação, Simetria Axial e Central, enquanto BC introduz o conceito de transformação no plano como ponto de partida, apresenta as TG em ordem distinta daquela proposta por OS e inclui Isometrias Diretas e Inversas. CD traz uma lista completa do estudo das TG, o mais próximo possível dos conceitos desenvolvidos no

campo acadêmico, ao passo que, o livro GRUEMA trabalha somente uma TG, a Simetria Axial. Como conclusões, as autoras retomam as características dos grupos de autores tomados na escolha – aqueles mais vinculados ao campo acadêmico, de um lado, e, por outro, os reconhecidos como representantes do campo profissional – e afirmam que:

Em síntese, a análise de como as TG foram inseridas nos livros reitera as tensões estabelecidas entre o campo acadêmico e o profissional. O exame do processo de inserir as TG na cultura escolar, por meio de livros didáticos, realizado por diferentes autores, sujeitos com histórico de formações e experiências diferenciadas, revela a complexidade do diálogo, da possibilidade de conjugar demandas vindas de duas culturas distintas: a acadêmica, como representante da produção científica, e a escolar, representante de experiências de práticas profissionais (Leme da Silva & Jahn, 2024a, p. 18).

Por fim, podemos destacar que não foram encontrados consensos para o estudo das TG, mesmo selecionando autores no interior de um coletivo de lideranças, o que nos permite ressaltar a inexistência de uma única representação das TG no ensino durante o MMM no Brasil.

4. TG NOS CONTEXTOS BRASILEIRO E FRANCÊS

O projeto de pesquisa também contemplou um estudo comparativo sobre as TG nos contextos brasileiro e francês. No Brasil, a partir de 1961, a análise focou especificamente no estado de São Paulo. O estudo examinou as regulamentações de ambos os países separadamente, para, ao final, comparar a apropriação das TG em seus respectivos livros didáticos. Uma primeira etapa da investigação (Leme da Silva, Jahn & Moyon, 2024) analisou as normativas curriculares brasileiras entre as décadas de 1950 e 1970, com especial atenção às diretrizes paulistas a partir de 1961. Paralelamente, um segundo estudo (Moyon, Leme da Silva & Jahn, 2025) investigou os programas franceses do mesmo período.

No caso brasileiro, a análise de três normativas curriculares do ensino secundário em São Paulo (cf. Quadro 1 da seção anterior) revelou que as TG foram incorporadas de maneira significativa e com finalidade definida apenas em 1975. Em 1965, por exemplo, elas figuravam apenas como *Sugestões*, no estado de São Paulo¹⁸. O Guia Curricular de 1975 traz explicitamente as TG como indicação, porém sua publicação ocorreu em um momento de acentuadas críticas ao MMM, demonstrando sinais de seu arrefecimento. Apesar deste contexto, vale considerar que o *Guia Curricular* de 1975 sugere fortes indícios das ideias modernizadoras para o estado de São Paulo, sem, contudo, a pretensão de generalizar essa

¹⁸ A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB 4.024/61) autorizou os conselhos estaduais de educação a definirem e desenvolverem os programas das disciplinas, concedendo a cada estado da federação a prerrogativa de elaborar seu próprio programa de ensino.

tendência para os demais estados do país. O Quadro 5 sintetiza a presença e a função das TG nessas propostas.

Apesar deste contexto, vale considerar que o *Guia Curricular* de 1975 sugere fortes indícios das ideias modernizadoras para o estado de São Paulo, sem, contudo, a pretensão de generalizar para os demais estados do país. O Quadro 5 sintetiza a presença das TG nessas propostas, bem como sua relação com o conceito de função.

Quadro 5: TG nas propostas curriculares brasileiras de 1951 (Nacional), 1965 e 1975 (SP)

Reforma/Proposta	TG	Função	Abordagem da Geometria
Simões Filho (1951)	Translação e Rotação (alunos de 13 anos)	Não está presente	Geometria dedutiva (alunos de 13 e 14 anos)
<i>Sugestões</i> para um roteiro de Programa (1965)	Translação, Rotação e Simetria (alunos de 13 anos)	Presente para alunos de 14 anos	Geometria dedutiva (alunos de 13 e 14 anos)
Guia Curricular Proposto para Matemática (1975)	Transformação no plano, Isometrias, Translação, Simetria Axial, Simetria Central e Homotetia (alunos de 11 a 14 anos)	Presente em todos os 8 anos, porém de forma explícita em alunos de 11, 12 e 14 anos)	Geometria intuitiva em todos os 8 anos; redução da geometria dedutiva

Fonte: Leme da Silva *et al.* (2024, p. 19)

Paralelamente, na França, a análise das instruções oficiais para o ensino secundário (1950-1970) indica um percurso distinto, mas com algumas convergências na inserção das TG. Visando a um maior rigor na integração dos estudos da matemática acadêmica ao ensino, a França incluiu as TG como um elemento essencial para modernizar o currículo, para estabelecer uma ligação entre a álgebra e a geometria (ideia atrelada à Bourbaki). Embora ausentes dos programas da década de 1960, as TG foram explicitamente incorporadas nos programas de 1971, concomitante à publicação das instruções referentes ao MMM. O Quadro 6 resume a presença das TG nos programas franceses.

Quadro 6: TG nas propostas curriculares francesas (1950-1978)

Programa/Ano	TG	Abordagem da Geometria
Programas anteriores a 1971	Nenhuma menção explícita às TG (somente conceito de pontos simétricos em relação com a mediatriz para <i>alunos de 13 anos</i>)	Geometria concreta e experimental (<i>alunos de 12 e 13 anos</i>) Geometria dedutiva (<i>a partir de 14 anos</i>)
Programas de 1971 (mantidos em 1973)	Simetria central, Translação; Composição de translações (<i>alunos de 14 anos</i>) Isometrias: Translações, simetrias centrais e ortogonais; Grupo das isometrias (<i>alunos de 15 anos</i>)	Geometria dedutiva, com manipulações e exercícios práticos precedendo a axiomática (<i>alunos de 14 anos</i>) Ênfase na geometria dedutiva, com articulação entre geometria e álgebra (<i>alunos de 15 anos</i>)
Programas de 1978 (para o ano escolar de 1979)	Simetria ortogonal, Simetria central, Translação (<i>alunos de 14 anos</i>) Simetrias (<i>alunos de 15 anos</i>)	Desaparecimento da ênfase na axiomática (<i>alunos de 14 anos</i>) Foco nas aplicações das simetrias e transformações. A noção de grupo não aparece mais (<i>alunos de 15 anos</i>)

Fonte: Adaptado de Moyon *et al.* (2025)

A análise conjunta dessas normativas permite identificar tanto pontos similares quanto distintos nas trajetórias de inserção das TG em ambos os países. Enquanto no Brasil as TG aparecem como sugestões em 1965 e são efetivamente incorporadas somente em 1975, na França, as TG foram introduzidas de maneira explícita desde 1971, integradas a uma reestruturação mais profunda do currículo.

Outra diferenciação crucial reside na relação com a Geometria Euclidiana (GE): enquanto no Brasil as TG são inseridas em um momento em que as orientações indicam uma redução da GE dedutiva, valorizando a geometria intuitiva ao longo dos oito anos do Ensino Fundamental, no contexto francês, a inserção das TG coincide com uma ênfase na geometria dedutiva, buscando uma articulação entre geometria e álgebra. É importante destacar, ainda, que essa articulação na França frequentemente explorava a relação entre translações e vetores, aspecto ausente nas normativas brasileiras da época. Um elemento comum nos dois países, porém, é a ausência explícita da rotação nas normativas da década de 1970.

Para finalizar o estudo comparativo, um terceiro artigo (em fase de avaliação) teve por objetivo examinar livros didáticos significativos do Brasil (especialmente do estado de São Paulo) e da França, de modo a analisar as propostas de práticas pedagógicas para a sala de aula. Os resultados obtidos, ao investigar livros didáticos, permitiram esclarecer as evidentes diferenças nos processos de apropriação das TG realizados pelos autores dos respectivos países.

No Brasil, na década de 1970, os livros didáticos do estado de São Paulo mantinham as TG em uma posição de “apêndice”, reiterando a abordagem da década de 1960. Mesmo quando deslocadas para um capítulo interno do livro, e não mais em um apêndice, elas eram

apresentadas como uma justaposição, um complemento, sem reestruturar a geometria ou buscar conexões profundas com a GE, que continuava a ser estudada nos demais capítulos. Essa manutenção da GE tradicional é evidenciada pela permanência dos casos de congruência nos livros brasileiros. Em contrapartida, na França, os livros didáticos da década de 1970 apresentaram uma reconfiguração significativa, aproximando-se de uma geometria fundamentada nas TG e rompendo com a abordagem da GE tradicional ao, em todos os livros analisados, suprimir os casos de congruência. Isso demonstra uma clara tentativa francesa de reestruturar a geometria sobre novas bases conceituais, as TG.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conforme delineado na introdução, este trabalho teve como objetivo apresentar os principais resultados obtidos no projeto de pesquisa em questão. Consideramos essas conclusões pertinentes e inovadoras, pois agregam novas perspectivas à historiografia do ensino de geometria. O primeiro destaque recai sobre o estudo dos tempos pré-modernos, particularmente a década de 1950, que se revela fundamental para elucidar o cenário educacional brasileiro do ensino de geometria no curso ginásial que antecedeu o MMM.

A análise da reforma de 1951, com sua sinalização para a retirada da geometria intuitiva das duas séries iniciais, restringindo o curso ginásial a um enfoque exclusivo de Geometria Euclidiana (GE) dedutiva, em conjunto com o cotejamento de depoimentos de professores, constitui uma base essencial para a compreensão crítica da chegada do MMM no início da década de 1960. Esse estudo pré-moderno é crucial para entender o contexto e as premissas sobre as quais as ideias do MMM se desenvolveram.

Os dois estudos subsequentes, pautados no exame de livros didáticos representativos das décadas de 1950, 1960 e 1970, permitem compreender como as lideranças – os primeiros autores a produzir manuais modernizadores para subsidiar as inovações – conceberam o estudo da geometria dedutiva, dada a predominância dessa abordagem no curso ginásial.

A análise comparativa da GE dedutiva nos livros de Sangiorgi trouxe evidências claras de que o livro moderno da década de 1960, em São Paulo, introduziu um estudo experimental e exploratório da geometria intuitiva, que havia sido banido pela Reforma de 1951. Além disso, propôs possibilidades de articulação entre essa abordagem intuitiva e a GE dedutiva. As propostas elaboradas podem, inclusive, servir de referência para a concepção de tarefas

didáticas por professores de matemática na atualidade, favorecendo a transição de uma *prova pragmática* para uma *prova conceitual* (Balacheff, 2022) no século XXI, conforme sugerido em Leme da Silva e Jahn (2024b). Em síntese, Sangiorgi exemplifica uma apropriação das ideias do MMM que buscou reduzir a memorização mecânica em favor de uma compreensão mais significativa dos conceitos geométricos pelos alunos.

Ainda no âmbito das investigações sobre livros didáticos, os resultados reiteram o papel dinâmico da escola e a pluralidade das apropriações de um mesmo ideário. Isso se evidenciou no exame minucioso sobre o conceito de TG em quatro livros de período próximo e elaborados por lideranças do MMM, tanto do campo acadêmico quanto do campo profissional. Concluímos que a diversidade de propostas para um mesmo tema nos convida à cautela diante de uma única representação do que teria sido o ensino de geometria no MMM. A análise das TG permite, portanto, compreender divergências internas no MMM e como certas abordagens modernizadoras foram recebidas e apropriadas.

Por fim, o estudo comparativo da circulação e apropriação das TG nos contextos brasileiros e franceses evidenciou, mais uma vez, a complexidade e a relevância do processo axiomático no ensino de geometria para os alunos de 13 a 14 anos de idade. As TG representavam uma das tendências, apontadas por Fehr (1962), para substituir a GE como base para provas e demonstrações de propriedades geométricas; a outra tendência modificava os axiomas, mas preservava o processo lógico dedutivo da GE. Foi justamente nesse ponto que se observou uma das diferenças mais marcantes nos processos de apropriação das TG nos livros didáticos da década de 1970: enquanto o Brasil introduziu as TG sem alterar significativamente o processo dedutivo – mantendo e discutindo os casos de congruência de triângulos como objeto fundamental para aplicação em provas e demonstrações de teoremas – a França inseriu uma abordagem axiomática pautada nas TG e eliminou por completo os casos de congruência de triângulos dos livros didáticos da década de 1970.

Em outras palavras, o debate sobre o equilíbrio entre a geometria intuitiva e a dedutiva para alunos do ensino secundário (13 a 14 anos de idade) parece ser uma continuidade histórica. Essa tensão já estava presente na reforma modernizadora brasileira de 1931, que recebeu fortes críticas, e se estendeu ao período do MMM no Brasil. Tudo indica que os autores de livros didáticos de São Paulo optaram por inserir as TG como justaposição aos demais conteúdos geométricos propostos, sem alterar os axiomas e princípios que sustentavam o processo demonstrativo da GE, notadamente os casos de congruência.

Todos os estudos apresentados se conectam pelo objetivo maior de compreender as mudanças e continuidades no ensino de geometria durante os períodos pré-moderno e do

MMM. Juntos, oferecem uma visão abrangente das mudanças pedagógicas e de conteúdos curriculares ocorridas, bem como das tensões e desafios enfrentados. Ao integrar esses estudos, alargamos nossa compreensão acerca do MMM e identificamos os processos de provas e demonstrações como um aspecto relevante no debate, especialmente para o contexto brasileiro, analisado pelos livros didáticos de São Paulo, onde as TG não chegaram a provocar rupturas fundamentais no currículo escolar.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos aos participantes e colaboradores do Grupo de Estudos e Pesquisas em Geometria Escolar: História e Formação de Professores (GEPGE), à Universidade Estadual Paulista (UNESP) e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio fundamental para a viabilidade dos estudos apresentados (processo n. 405027/2023-0).

REFERÊNCIAS

- Balacheff, N. (2022). A argumentação matemática: um precursor problemático da demonstração. Tradução de Saddo Ag Almouloud e Méricles Thadeu Moretti. *Educação Matemática Pesquisa*, 24 (1), 770-815.
- Bicudo, J. C. (1942). *O ensino secundário no Brasil e sua atual legislação (de 1931 a 1941 inclusive)*. São Paulo, SP: Associação dos Inspectores Federais do Ensino Secundário do Estado de São Paulo.
- Búrigo, E. Z. (1989). *Movimento da matemática moderna no Brasil: estudo da ação e do pensamento de educadores matemáticos nos anos 60*. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Porto Alegre, RS.
- Búrigo, E. Z. (2015). Professores de Matemática deveriam estudar história? In: *Anais do XII Encontro Gaúcho de Educação Matemática* (pp. 1-14). Porto Alegre, RS.
- Chartier, R. (1990). *A história cultural – entre práticas e representações*. Rio de Janeiro, RJ: Bertrand Brasil S.A.
- Chervel, A. (1990). História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. *Teoria & Educação*, 2, 177-229.
- D'Ambrosio, B. S. (1987). *The dynamics and consequences of the modern mathematics reform movement for Brazilian mathematics education*. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Indiana University. Bloomington, IL/EUA.
- De Bock, D. (Ed.). (2023). *Modern mathematics: An international movement?* Cham, Switzerland: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-11166-2>

- Fehr, Howard Franklin (1962). *Educacion Matematica en las Americas*. Bureau of Publications. Teachers College, Columbia University.
- Jahn, A. P., & Leme da Silva, M. C. (2023). Don't memorize theorem proofs! The Modern Geometry of Osvaldo Sangiorgi. *Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, 13(4), 1-19. <https://doi.org/10.37001/ripem.v13i4.3622>.
- Jahn, A. P., & Magalhães, G. R. (2024). As transformações geométricas em tempos pré-modernos: Um estudo preliminar. In: *Anais do XV Encontro Paulista de Educação Matemática* (pp. 1-12). Guaratinguetá, SP: Sociedade Brasileira de Educação Matemática – Regional São Paulo.
- Julia, D. (2001). A cultura escolar como objeto histórico. *Revista Brasileira de História da Educação*, 1, 9-44.
- Leme da Silva, M. C. (2008). A geometria escolar moderna de Osvaldo Sangiorgi. In: W. R. Valente, (Org.). *Osvaldo Sangiorgi – um professor moderno* (pp. 69-93). São Paulo, SP: Annablume Editora.
- Leme da Silva, M. C. (2022). Abandono do ensino de geometria e a Matemática Moderna: uma revisão histórica. *Zetetiké*, 30, 1-22.
- Leme da Silva, M. C., & Jahn, A. P. (2024a). Transformações geométricas no ensino de geometria: Diferentes apropriações na matemática moderna. *Bolema*, 38, e230289, 1-21. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v38a230289>.
- Leme da Silva, M. C., & Jahn, A. P. (2024b). Práticas experimentais e demonstrativas na sala de aula de matemática: Reflexões entre passado e presente. In: M. Bairral, M. P. Henrique, & A. R. de Assis (Eds.), *Caminhos da geometria da atualidade: Velhos percursos, novas lentes*. Seropédica: Editora da Universidade Rural (EDUR, UFRRJ). Disponível em: Acesso em: 10 abr. 2026.
- Leme da Silva, M. C.; Jahn, A. P., & Moyon, M. (2024). Transformações geométricas e Matemática Moderna: O que dizem as normativas curriculares no período de 1950 a 1970? *Revista de História da Educação Matemática*, 10, 1-22.
- Lima, F. R.; Passos, L. F. (2008). G.E.E.M. – Grupo de Estudos do Ensino da Matemática e o Movimento da Matemática Moderna. In: W. R. Valente (Org.). *Osvaldo Sangiorgi: um professor moderno* (pp. 95-118). São Paulo, SP: Annablume Editora.
- Moyon, M.; Leme da Silva, M. C., & Jahn, A. P. (2025). Transformations géométriques et mathématiques modernes: que disent les programmes français entre les années 1950 et 1970. *Repères – IREM*, 137, 5-25.
- Oliveira, M. C. A.; Leme da Silva, M. C., & Valente, W. R. (org.) (2011). *O Movimento da Matemática Moderna: história de uma revolução curricular*. Juiz de Fora, MG: Editora UFJF.
- Pastor, E. S., & Leme da Silva, M. C. (2024). O ensino de geometria para o 1º ciclo do curso secundário em tempos pré-modernos. In: *Anais do XV Encontro Paulista de Educação Matemática* (pp. 1-12). Guaratinguetá, SP: Sociedade Brasileira de Educação Matemática – Regional São Paulo.
- Pavanello, R. M. (1989). *O abandono do ensino de geometria: uma visão histórica*. 196f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Campinas, SP.

- Pavanello, R. M. (1993). O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. *Zetetiké*, 1(1), 7-17.
- Sangiorgi, O. (1958). *Matemática para a Terceira Série Ginásial*. São Paulo, SP: Companhia Editora Nacional.
- Sangiorgi, O. (1966). *GUIA para uso dos PROFESSORES. 3º Volume – Matemática Curso Moderno*. São Paulo, SP: Companhia Editora Nacional.
- Sangiorgi, O. (1967). *Matemática Curso Moderno. 3º Volume para os ginásios*. São Paulo, SP: Companhia Editora Nacional.
- Soares, F. S. (2001). *Movimento da Matemática Moderna no Brasil: Avanço ou Retrocesso?* 192f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada). Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-RJ). Rio de Janeiro, RJ.
- Valente, W. R. (2008). Osvaldo Sangiorgi, um best seller. In: W. R. Valente (Org.). *Osvaldo Sangiorgi: um professor moderno* (pp. 13-41). São Paulo, SP: Annablume Editora.
- Valente, W. R., & Bertini, L. de F. (Orgs.) (2022). *A matemática do ensino: uma história do saber profissional 1870-1960*. (Coleção Educação & Saúde, Vol. 1) São Paulo, SP: Universidade Federal de São Paulo.
- Vitti, C. M. (1998). *Movimento da matemática Moderna: Memória, Vaia e Aplausos*. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Metodista de Piracicaba (UNIMEP). Piracicaba, SP.