

LES CONDITIONS DE CONVERGENCE DANS LA SÉRIE DE TAYLOR: une analyse socioépistémologique de la mémoire de Cauchy de 1831

*LAS CONDICIONES DE CONVERGENCIA EN LA SERIE DE TAYLOR: un análisis
socioepistemológico de la memoria de Cauchy de 1831*

Fernando Antonio Villacrés Lluay¹

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
(Cinvestav), México

fernando.villacres@cinvestav.mx

 Lattes: <http://lattes.cnpq.br/3512351979947447>

 Orcid: <https://orcid.org/0009-0003-9275-1097>

Rosa María Farfán Márquez²

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
(Cinvestav), México

rfarfan@cinvestav.mx

 Lattes: <http://lattes.cnpq.br/7907446494947583>

 Orcid: <https://orcid.org/0000-0003-1229-8521>

¹ Matemático na Escola Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH). Mestre em Ciências, com especialidade em Educação Matemática, pelo Centro de Pesquisa e Estudos Avançados do Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav), Cidade do México, México. Endereço para correspondência: Av. Instituto Politécnico Nacional 2508, Col. San Pedro Zacatenco, Alcaldía Gustavo A. Madero, Cidade do México, México, CEP: 07360. E-mail: fernando.villacres@cinvestav.mx.

² Doutora em Ciências com especialização em Matemática Educacional pelo Centro de Pesquisa e Estudos Avançados do Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav). Pesquisadora do Departamento de Matemática Educacional, Cinvestav, Cidade do México, México. Endereço para correspondência: Av. Instituto Politécnico Nacional 2508, Col. San Pedro Zacatenco, Alcaldía Gustavo A. Madero, Cidade do México, México, CEP: 07360. E-mail: rfarfan@cinvestav.mx.

RESUMO

Esta investigação analisa a natureza do conhecimento matemático da convergência para a série de Taylor, tomando como eixo a obra publicada por Augustin-Louis Cauchy em 1831. O estudo inscreve-se no marco teórico da socioepistemologia, que permite reinterpretar os processos de construção e difusão do saber matemático desde uma perspectiva contextual e histórica. A motivação principal deste trabalho surge da problemática documentada em diversos estudos, que apontam uma tendência recorrente no ensino e na aprendizagem da série de Taylor caracterizada pelo uso excessivamente algorítmico de sua fórmula, sem atenção a aspectos fundamentais como a convergência. Para abordar esta problemática, empregou-se a proposta metodológica de Hinojos e Farfán (2019), baseada na problematização do saber matemático, que possibilita historicizar e dialectizar o resultado obtido por Cauchy mediante análise contextual e textual de sua obra. A análise realizada permitiu identificar que as condições de convergência estabelecidas por Cauchy estão associadas à escolha de contornos circulares como domínios de convergência, vinculados diretamente ao raio de convergência através da parametrização polar de valores complexos. A partir destes achados, propõe-se uma conjectura epistemológica que pode ser contrastada com os alunos, a fim de melhorar a aprendizagem do conceito de convergência.

Palavras-chave: Série de Taylor. Convergência. Socioepistemologia. Augustin-Louis Cauchy.

RESUMEN

Esta investigación analiza la naturaleza del conocimiento matemático de la convergencia para la serie de Taylor, tomando como eje la obra publicada por Augustin-Louis Cauchy en 1831. El estudio se inscribe en el marco teórico de la socioepistemología, que permite reinterpretar los procesos de construcción y difusión del saber matemático desde una perspectiva contextual e histórica. La motivación principal de este trabajo surge de la problemática documentada en diversos estudios, que señalan una tendencia recurrente en la enseñanza y el aprendizaje de la serie de Taylor caracterizada por el uso excesivamente algorítmico de su fórmula, sin atención a aspectos fundamentales como la convergencia. Para abordar esta problemática, se empleó la propuesta metodológica de Hinojos y Farfán (2019), basada en la problematización del saber matemático, que posibilita historizar y dialectizar el resultado obtenido por Cauchy mediante análisis contextual y textual de su obra. El análisis realizado permitió identificar que las condiciones de convergencia establecidas por Cauchy están asociadas a la elección de contornos circulares como dominios de convergencia, vinculados directamente con el radio de convergencia a través de la parametrización polar de valores complejos. A partir de estos hallazgos, se propone una conjectura epistemológica que puede ser contrastada con el estudiantado a fin de mejorar el aprendizaje del concepto de convergencia.

Palabras clave: Serie de Taylor. Convergencia. Socioepistemología. Augustin-Louis Cauchy.

INTRODUCCIÓN

El presente artículo sintetiza los resultados derivados de una investigación de maestría concluida la cual inicia con la serie de Taylor, una herramienta importante en varios campos, utilizada frecuentemente para simplificar ecuaciones mediante aproximaciones (Cantoral, 2001); por ejemplo, la función exponencial admite desarrollo en serie de potencias con centro en el origen como $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, cuya expansión converge para todo $x \in \mathbb{R}$. Cantoral (2001) distingue dos enfoques de la serie: el newtoniano, que la concibe como una herramienta predictiva vinculada a fenómenos físicos (véase Zuñiga, 2022; Morales & Cordero, 2014), y el cauchyano, centrado en el análisis formal y las condiciones de convergencia. Cantoral recalcó que el discurso escolar actual tiende a privilegiar el enfoque de Cauchy, dando lugar a una presentación descontextualizada y formalista de mencionada la serie.

Diversos estudios documentan que estudiantes aplican algorítmicamente la fórmula de la serie de Taylor independientemente del enfoque adoptado; entre ellos, cabe mencionar el de Locia-Espinoza et al. (2020, p. 2) quienes reportan que docentes manipulan series geométricas y desarrollan series de potencias mediante la fórmula de Taylor-Maclaurin, pero presentan grandes dificultades para considerar las condiciones que garantizan su convergencia; y el de Martin (2013, p. 280) quien identificó diferencias en los patrones de razonamiento entre expertos y novatos en relación con la convergencia de la serie, destacando que el razonamiento de novatos puede asemejarse más a un algoritmo de uso frecuente que a una comprensión profunda del concepto. Estos hallazgos evidencian que la dificultad con la convergencia no es exclusiva de los estudiantes, sino que permea también la práctica docente, sugiriendo un problema con raíces que trascienden la formación individual y se vinculan con la forma en que el conocimiento sobre la serie de Taylor ha sido transmitido institucionalmente.

Esta tendencia algorítmica, documentada en el contexto actual, no es una problemática reciente. Sus raíces pueden rastrearse hasta discusiones del siglo XIX, cuando Cauchy (1822) advertía sobre los riesgos de sustituir indiscriminadamente funciones por series, limitándose esta sustitución a casos donde las funciones sean desarrollables en series convergentes. Su contraejemplo con la función $e^{-\frac{1}{x^2}}$ centrada en $x = 0$ muestra que la diferenciabilidad infinita no garantiza convergencia al valor de la función, lo que lleva a preguntarse: ¿qué condiciones aseguran que una función pueda representarse mediante una serie de potencias convergente?

Una respuesta de esto la obtuvo Cauchy en 1831 cuando publicó su memoria intitulada *Sur la mécanique céleste et sur un nouveau calcul appelée calcul des limites* (Cauchy, 1831),

donde “demostró que cualquier función de una variable compleja x tiene una expansión en serie de MacLaurin convergente” (Belhoste, 1991, p. 152). El tratamiento posterior de esta memoria ha sido fragmentado, debido a circunstancias sociopolíticas que afectaron su producción y difusión (Espinoza, 2009, p. 81), resultando pertinente estudiarla para comprender la génesis de su memoria y que derive en elementos que contribuyan a superar la algoritmia.

Nuestra investigación plantea la pregunta: ¿cómo estableció Cauchy las condiciones de convergencia de las series de Taylor en su memoria de 1831? Para responderla, se analiza su memoria de 1831, con el objetivo de identificar las condiciones bajo las cuales una función puede representarse por una serie convergente. Con base en los hallazgos se elaboró una conjetura epistemológica, con el fin de confrontarla con el estudiantado universitario, particularmente en cursos de Cálculo, Variable Compleja o cursos afines a funciones y series.

1. MARCO TEÓRICO

Este estudio se apoya en el marco de la Socioepistemología, la cual “permite tratar con los fenómenos de construcción social del conocimiento matemático y de su difusión institucional” (Cantoral, 2013, p. 143). La teoría cuestiona la visión tradicional que presenta las matemáticas como un sistema cerrado, compuesto únicamente por objetos, definiciones y procedimientos desprovistos de contexto (Cantoral et al., 2015), permitiendo examinar cómo los objetos matemáticos, que se originan fuera del sistema educativo, atraviesan transformaciones y adaptaciones al ser introducidos en contextos institucionales, lo que altera su naturaleza original.

La Socioepistemología se sustenta sobre cuatro principios que orientan la construcción del conocimiento matemático (Cantoral et al., 2015): *la racionalidad contextualizada*, que reconoce que la racionalidad de los individuos depende del contexto en el que se encuentran involucrados; *el relativismo epistemológico*, que reconoce que la validez del conocimiento se juzga en relación con los criterios de la comunidad en la que se desarrolla; *la resignificación* la cual establece que el conocimiento adquiere diferentes significados a través de sus usos en contextos específicos; y *el normativo de la práctica social* que afirma que las prácticas sociales, en tanto normas compartidas, fundamentan la construcción del conocimiento matemático.

Con estos principios, la teoría plantea la *descentración del objeto*, que consiste en cambiar el enfoque del aprendizaje tradicionalmente centrado en la comprensión de objetos o fórmulas aisladas, hacia un enfoque que considera cómo estos objetos se utilizan y adquieren

significado en contextos específicos (Cantoral et al., 2015). Con ello, la socioepistemología ofrece un marco para contrastar la tendencia algorítmica documentada en el estudio.

Para profundizar este desplazamiento hacia los usos del conocimiento matemático, la socioepistemología configura la *problematización del saber matemático*, cuyo fin es cuestionar el saber dado por sentado y exponer su puesta en uso. Al *problematizar el saber*, se propone entenderlo como algo dinámico, emergente de la interacción entre las personas y su entorno (Cantoral, 2013). Esto implica examinar al conocimiento desde varias dimensiones y, debido al objetivo planteado en este estudio, se destaca la dimensión epistemológica la cual atiende a la construcción del saber, su derivación y las razones epistemológicas que lo sustentan (Cantoral, 2013, pp. 147–148).

Como resultado de la problematización del saber, se recuperan elementos vinculados al *modelo de anidación de prácticas* (MAP), el cual estructura la construcción del conocimiento en cinco niveles:

1. *Acciones*, respuestas inmediatas del sujeto ante el medio material, organizacional y social (Cantoral et al., 2014, p. 99);
2. *Actividad*, organización de un “conjunto de acciones que realiza el sujeto con intencionalidad determinada” (Márquez-García, 2018 p. 12), mediada por herramientas situadas socioculturalmente; *práctica*, corresponde al nivel donde la actividad es reiterada y reconocida por un grupo social;
3. *Práctica de referencia*, determina lo válido y aceptable en una comunidad, abarcando mecanismos como permanencia, cambio, transferencia por contigüidad, conservación de saberes, etc.;
4. *Prácticas sociales*, construcciones emergentes que se infieren y teorizan a partir de manifestaciones normativas (Cantoral et al., 2014).

A través de este modelo, se identifican prácticas vinculadas a distintos niveles del MAP presentes en la obra a estudiar, las cuales explican cómo surgieron las condiciones de convergencia configurando así una hipótesis epistemológica. La hipótesis epistemológica, entendida como la explicación de cómo se construye y organiza el conocimiento matemático a partir de las prácticas y significados desarrollados en su génesis (Arcos-Quezada et al., 2022), tiene como propósito recuperar las prácticas que dotaban de sentido al conocimiento matemático, proporcionando elementos que puedan confrontar la práctica algorítmica.

Desde la socioepistemología, el análisis de la obra busca determinar las orientaciones, significados y actividades matemáticas que subyacen a la construcción del conocimiento sobre el desarrollo de funciones en series de Taylor. Dichos elementos pueden permanecer difusos o

perdidos si el análisis se limita exclusivamente a la dimensión matemática del texto de Cauchy.

2. MARCO METODOLÓGICO

La investigación utilizó el modelo de siete pasos propuesto por Hinojos-Ramos y Farfán (2019) para el análisis histórico-epistemológico, adaptados al objetivo del presente estudio:

- I. Identificación del autor y su obra en el momento histórico cuando fue escrita;
- II. Intención del autor al crear su obra y el problema que intentó resolver;
- III. Paradigma del pensamiento científico vigente en la época;
- IV. Herramientas y técnicas matemáticas empleadas en la obra;
- V. Trabajo matemático realizado;
- VI. Resultados matemáticos principales y su relación con el conocimiento actual;
- VII. Elementos de construcción social del conocimiento matemático con el propósito de formular una hipótesis epistemológica.

A través de estos pasos se incorpora el proceso de *historización* que busca “el surgimiento de un conocimiento matemático específico, las circunstancias sociales y culturales de la época de los autores, los elementos que permitieron la construcción [...] de la obra y el problema que se resolvió o se intentó resolver” (Hinojos & Farfán, 2019, p. 22).

Por su parte la *dialectización* se refiere al “proceso de ‘diálogo’ con la obra, es decir, el análisis de la actividad matemática” (Marquéz-García, 2018, p. 13), enfocándose en el análisis de la puesta en uso del conocimiento matemático en la obra de Cauchy.

Varios de los pasos fueron modificados y complementados mediante un par de metodologías adicionales. Los primeros tres pasos del método se abordan con la configuración de Espinoza y Cantoral (2010), que examina la obra desde tres perspectivas: *una producción con historia*, relacionada con la racionalidad contextualizada, que permite analizar cómo la trayectoria de Cauchy influyó en su obra al verlo “como un representante de las formas de ver y hacer ciencia de su época” (Piña-Aguirre & Farfán, 2022, p. 5); *un objeto de difusión*, alineado con el relativismo epistemológico, que refleja la intencionalidad de Cauchy al publicar su obra según los criterios de la comunidad científica de su época (Piña-Aguirre & Farfán, 2022, p. 5); y *como parte de una expresión intelectual global*, vinculada a la resignificación, analiza cómo las ideas del autor evolucionaron y adquirieron nuevos significados en el desarrollo de su obra.

El cuarto paso consistió en identificar las herramientas y técnicas matemáticas empleadas en la obra, caracterizando su contenido. El quinto, se centró en el análisis textual de

la obra de Cauchy. Siguiendo la propuesta de Márquez-García (2018, pp. 16-17) se dividió la obra en unidades de análisis, entendidas como fragmentos donde se desarrolla la actividad matemática del autor. Sobre cada unidad, se aplicó un dialéctico analítico empleando cuestionamientos vinculados al MAP: *¿qué hace?*, *¿cómo hace?*, *¿por qué hace?* y *¿para qué hace?*, permitiendo identificar los usos del conocimiento.

La respuesta al *qué hace* identifica la *acción directa* del sujeto con el objeto. El *cómo hace* configura “el nivel de *actividad* [...], un conjunto de acciones [...], que se ponen en juego para lograr los objetivos en la actividad matemática” (Marquéz-García, 2018, p. 144). Este nivel es complementado con las respuestas al *para qué hace*, que revelan la intención de la actividad matemática, lo que permite reconocer la necesidad matemática de cada paso en su obra. El *por qué hace* facilita la comprensión del marco cultural que otorga sentido al quehacer matemático, incluyendo paradigmas reguladores del conocimiento, mecanismos de validación, etc.

A partir de los elementos identificados, el sexto paso analiza y contrasta el tratamiento del resultado de Cauchy en diferentes contextos (científicos, educativos) para establecer una base de su reinterpretación a través del tiempo. Para el último paso se configura una hipótesis epistemológica sobre las condiciones de convergencia en la obra de Cauchy.

3. IMPLEMENTACIÓN

I¹

Al examinar la obra como *una producción con historia*, se aprecia que la vida de Cauchy transcurrió en el contexto de múltiples transformaciones políticas francesas: la Revolución (1789–1799), el Imperio Napoleónico (1804–1815), la Restauración (1814–1830) y la Revolución de Julio de 1830 (Belhoste, 1991). Tras este último acontecimiento, optó por el exilio voluntario debido al nuevo régimen de Luis Felipe, reduciendo su producción matemática (Belhoste, 1991). En este contexto presenta su obra intitulada *Sur la mécanique céleste et sur un nouveau calcul appelée calcul des limites* (Cauchy, 1831) en Turín, el 11 de octubre de 1831, ante la Academia de Ciencias de dicho lugar (Carminé, 2021). Este trabajo, que marcó su regreso al mundo académico, tiene una extensión de cerca de 200 páginas, estructuradas en dos partes: formulación matemática y series de funciones, y aplicaciones astronómicas (Bottazzini & Gray, 2013).

¹ Esta numeración se refiere a los siete pasos señalados por Hinojos-Ramos y Farfán (2019)

La memoria circuló por diversos canales académicos. Inicialmente se publicó en litografía sin aparecer en las actas oficiales de la Academia (Carminé, 2021). En 1832 apareció un resumen en la *Gazzetta Piemontese*, que incluía parte de la segunda memoria de 1831, y en 1841 se publicó en sus *Exercices d'analyse et de physique mathématique*, lo que amplió su accesibilidad (Remmert, 1991, p. 204). Esta edición (Cauchy, 1841, pp. 41–55) se toma como fuente principal para el estudio, dado que incluye notas complementarias del autor al pie referidas a distintas secciones dentro de los *Exercices* lo que facilita y enriquece el análisis.

Considerando la data de publicación, se asume que Cauchy contaba con principios matemáticos bien establecidos, por ende, se analiza su concepción y si el nuevo ambiente turinés pudo generar cambios en su enfoque. Piña-Aguirre y Farfán (2022) rescatan que Cauchy concebía a las matemáticas como un campo completo destinado a aplicaciones prácticas y reconocía la carencia de fundamentos teóricos rigurosos en los métodos existentes.

Cauchy adaptó la estructura lógica-formal al contexto algebraico del siglo XIX y, aunque influenciado por el programa de Lagrange de fundamentar el cálculo en el álgebra, buscando prescindir de nociones provenientes de la Geometría y la Física, Cauchy rechazó el fundamento algebraico por considerarlo carente de rigor y generalidad, dado que en su cálculo, Lagrange había introducido métodos del álgebra del infinito (Grabiner, 1981, p. 54), como la serie de Taylor donde establecía que toda función posee representación en serie de potencias.

Este rechazo obligó a Cauchy a desarrollar nuevos fundamentos para el cálculo, estableciendo formas de verificar la convergencia al tratar con series infinitas y cantidades complejas. En su *Cours d'analyse* de 1821 afirmaba haber dado a los métodos (relativos al tratamiento de funciones, series, cantidades infinitesimales y cantidades imaginarias) “todo el rigor que se exige a la geometría”, evitando apoyarse en argumentos surgidos de la *generalidad del álgebra* que, según él, no se ajustaban a la exactitud matemática, señalando que la mayoría de las fórmulas algebraicas aplicadas a series infinitas son válidas cuando la serie converge (Bradley & Sandifer, 2009, pp. 1–2).

Este cambio marcó la transición hacia una nueva estructura del Cálculo. Cauchy (1822) mostró que el posicionamiento de Lagrange no podía sostenerse al brindar contraejemplos sobre diferentes funciones con una misma representación en serie, y una expansión que no converge a la función expandida. Espinoza (2009, p. 67) argumenta que, lejos de señalar un error, su trabajo le permitió establecer su construcción matemática basada en la continuidad. Grabiner (1981) menciona que en sus pruebas implementó el *álgebra de desigualdades* para formalizar la noción de continuidad (límite y aproximaciones), parte de su rigor en el tratamiento de series.

II

Examinando la obra como un *objeto de difusión*, en la época descrita los astrónomos y geómetras utilizaban series de potencias a problemas de mecánica celeste sin verificar formalmente la convergencia de las series utilizadas (Cauchy, 1841, pp. 41–43). Cauchy criticó estos métodos introduciendo un *nouveau calcul*, el *Calcul des limites*, afirmando que:

Los métodos que empleaban los geómetras para deducir los movimientos de los cuerpos celestes a partir del principio de la gravedad aún dejaban mucho que desear. A menudo carecían del rigor adecuado. Así, en particular, no se encuentra en ninguna parte de la *Mécanique céleste* de Laplace una demostración suficiente de la fórmula de Lagrange, que sin embargo sirve de base para la mayoría de las teorías presentadas en esta obra (Cauchy, 1841, p. 41).

Su objetivo era proporcionar rigor teórico a los métodos establecidos en mecánica celeste, para determinar perturbaciones planetarias los cuales, según Plana, requerían años de trabajo llevándolo a declarar que:

[L]os geómetras y los astrónomos concederán algún valor [...], cuando sepan que he logrado establecer, sobre el desarrollo de las funciones, ya sean explícitas o implícitas, principios generales de fácil aplicación, con la ayuda de los cuales uno puede no sólo demostrar las fórmulas rigurosamente, e indicar las condiciones de su existencia, sino también fijar los límites de los errores que uno comete al descuidar los residuos que deben completar la serie (Cauchy, 1841, p. 43).

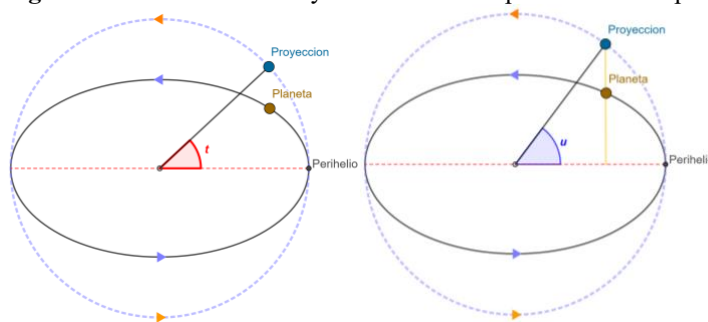
Belhoste (1991, p. 128) aclara que es erróneo suponer que la obra surgió de diálogos con Plana, siendo en realidad evolución de investigaciones previas de Cauchy. Se asume que Plana compartía la preocupación por optimizar cálculos de mecánica celeste, pero difería en énfasis, enfocándose en la aplicabilidad numérica (Grattan-Guinness, 1990, pp. 1195–1205), mientras que Cauchy enfatizaba la consistencia teórica rigurosa.

III

Lo anterior abre paso a comprender la obra *como parte de una expresión intelectual global*. La crítica hacia la serie de Lagrange representa un hilo conductor que desembocó en la memoria de 1831, dado que dicha serie había sido estudiada por Cauchy en 1827, compartiendo metodologías entre ese trabajo y su memoria de 1831 (Smithies, 1997).

La serie de Lagrange fue introducida en 1770 para expandir raíces de ecuaciones en potencia, y meses después usada para abordar el problema de Kepler, el cual consiste en determinar la posición de un planeta alrededor del Sol en un momento dado (Bottazzini, 1989). El problema involucra la ecuación de Kepler $t = u - e \sin(u)$ que relaciona la anomalía media t , la anomalía excéntrica u (Figura 1) y la excentricidad e de la trayectoria de un planeta.

Figura 1 – Anomalía media y excéntrica en el problema de Kepler



Fuente: Elaboración propia

La estrategia implementada por Lagrange consistía en expandir $u(t)$ en serie lo que proporcionó observaciones breves para garantizar la convergencia, exigiendo que la excentricidad e fuera pequeña, lo que implicaba movimientos planetarios casi circulares, sugiriéndose dominios circulares de convergencia (Bottazzini, 1989).

Años más tarde, Laplace también abordó el problema de Kepler, estableciendo una generalización de la serie de Lagrange con convergencia para $e < 0.66195$ (Smithies, 1997, p. 152). Cauchy admiró la estrategia de Laplace de convertir sumas en integrales, pero señaló que este había aplicado una aproximación integral pensando en valores grandes de la variable, lo cual podía introducir errores si el parámetro fuese pequeño (Grattan-Guinness, 1990). Conocidos estos resultados, Cauchy se preguntó “si no sería posible establecer de manera general las condiciones de convergencia de la serie de Lagrange y de fórmulas similares que él había obtenido mediante el cálculo de residuos.” (Cauchy, 1827a, pp. 29–30).

Con este trabajo de 1827, apoyándose en integrales de contorno circulares e introduciendo el concepto de *módulo principal* de la función, obtuvo la condición de convergencia de Laplace, y más aún, la condición general de convergencia de la serie de Lagrange junto con expresiones para aproximar el resto de la serie (Cauchy, 1827a).

Varias ideas fueron plasmadas en la memoria de 1831, particularmente la implementación de contornos cerrados de integración. Inicialmente Cauchy evaluó integrales a lo largo de contornos rectangulares en el plano complejo, sumando residuos de polos en el interior (Grattan-Guinness, 1990; Smithies, 1997). Su transición al uso de curvas circulares se dio a finales de 1826, debido al reconocimiento de las ventajas de implementar dichos contornos al simplificar el análisis y evitar indeterminaciones (Smithies, 1997, pp. 194–204).

Cauchy (1827b) muestra cómo emplear integrales alrededor de curvas cerradas circulares por medio de la parametrización $re^{\sqrt{-1}p}$ con $r \geq 0$ y $p \in [-\pi, \pi]$. Gracias al empleo de contornos cerrados en el plano complejo, pudo abordar de manera rigurosa las singularidades, incluyendo aquellas ubicadas en el infinito. Esta capacidad fue clave para

fundamentar y desarrollar su teoría de residuos, permitiendo no solo el cálculo de sumas de series, sino también la derivación precisa de fórmulas para el desarrollo en series de potencias.

Con ello, formalizó los criterios de convergencia de las series dentro del marco del análisis complejo, consolidando principios generales para el manejo y expansión de funciones, y estableciendo las condiciones necesarias para la existencia y precisión de dichas expansiones. De este modo, aunque Cauchy intentó prescindir de la intuición geométrica, integró estos elementos para describir sus trabajos, siendo así su obra de 1831 el resultado de un cambio intelectual que combina fundamentos algebraicos e intuición geométrica (contornos circulares).

IV

Pasando a la descripción de las herramientas y técnicas, la obra se apoya en técnicas del análisis complejo de su época, especialmente en la integración de funciones sobre contornos circulares en el plano complejo. Se utiliza la parametrización $re^{\sqrt{-1}p}$ con r módulo y p argumento, y se incluye el estudio de funciones en esta parametrización mediante conceptos de continuidad y diferenciabilidad, empleando técnicas de integración para deducir sus fórmulas.

Dado que el trabajo de 1831 se originó a partir de investigaciones previas, se podría inferir una implementación del cálculo de residuos en su obra, aunque Belhoste (1991, p. 275) precisa que “el cálculo de residuos no se utilizó en estos estudios y los métodos de demostración fueron muy diferentes”, extendiéndose al trabajo analizado donde no se encuentran referencias explícitas a dicho cálculo en la sección a analizar.

Las técnicas matemáticas más destacadas en el texto son implementadas en el campo de la variable compleja, lo que requiere comprender los procedimientos operativos de Cauchy en esta área. Para ello, se adopta la conjetura formulada por Piña-Aguirre y Farfán (2022) donde describen el enfoque de Cauchy respecto al tratamiento de cantidades compleja:

se propicia por medio de la generalización de resultados en Variable Real a través de la introducción de cantidades complejas, cuya manipulación requiere de conceptualizarlas como el trabajo simultáneo entre dos cantidades reales, recurriendo a la validación de los resultados establecidos en el campo de los complejos mediante un trabajo por analogía en el campo real (Piña-Aguirre y Farfán, 2022, p. 19).

Para dotar de rigor a los métodos, se asume que emplea objetos matemáticos de los cuales ya se conocen sus propiedades matemáticas garantizadas por medio del *álgebra de desigualdades*. Por ejemplo, en el análisis de la serie geométrica $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ se reconoce que esta converge cuando $|x| < 1$ (Bradley & Sandifer, 2009), donde utilizará este caso como referencia para acotar los desarrollos en su obra de 1831. Al centrarse en la expansión de funciones en series convergentes, el tratamiento de las desigualdades se inspiraba en los métodos de

D'Alembert referidos a acotar el error en series mediante el establecimiento de límites para la suma de los términos restantes, basándose en una comparación término a término con una progresión geométrica (Grabiner, 1981, p. 63),

Por otro lado, la noción de continuidad emerge como condición esencial para el desarrollo de series de potencias: para que f sea desarrollable en serie, tanto f como su derivada deben permanecer finitas y continuas (Cauchy, 1841, p. 54). Jayakody y Zazkis (2015) destacan que, en matemáticas, es posible encontrarse con dos definiciones diferentes para un mismo objeto y lo ejemplifican con la noción de continuidad: D1, f es continua en a si $f(a)$ está definida y $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$; y D2, se restringe el estudio sólo para los puntos del dominio.

La continuidad en la obra de Cauchy se relaciona con D1, pues se infiere que el autor asocia discontinuidades con singularidades de la función. Desde D2 esto no implica que la función sea discontinua en ese punto (como ocurre con $f(x) = 1/x$). En consecuencia, la continuidad se interrumpe cuando se alcanza una singularidad.

V

El análisis del aparato matemático en la obra se centra en determinar la naturaleza de las condiciones de convergencia para el desarrollo en serie. Se aplica un análisis a ocho segmentos específicos denominados *unidades de análisis*, a partir de las cuales son respondidos a los cuestionamientos establecidos metodológicamente. Las respuestas se construyeron mediante inferencias fundamentadas en el análisis del contexto y en la actividad matemática de cada unidad, tomando como base tanto la obra de Cauchy (1841) como el análisis realizado por Smithies (1997, pp. 147–185) quien brinda detalles adicionales sobre la misma.

La segmentación de las unidades corresponde a bloques donde se exponen las fórmulas deducidas que permiten derivar su resultado. Las fórmulas que se derivan directamente de otras previas se incluyen en una misma unidad de análisis, pues sus usos del conocimiento mantienen una dependencia directa. Aunque cada unidad depende de la anterior, esta segmentación permite identificar usos del conocimiento matemático, incluidos aquellos menos evidentes que podrían pasar inadvertidos en un análisis que considere la obra como una sola unidad.

Tabla 1 – Unidad de análisis 1

Sea p un arco real y n un número entero. Encontramos, suponiendo $n > 0$,	
(1)	$\int_{-\pi}^{\pi} e^{np\sqrt{-1}} dp = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-np\sqrt{-1}} dp = 0,$
y suponiendo que $n = 0$,	
(2)	$\int_{-\pi}^{\pi} dp = 2\pi.$
Sea, además	
$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$	
una función entera de la variable x . Si se asigna a esta variable un valor imaginario $\bar{x}$ cuyo módulo sea X , de forma que tenemos	
$\bar{x} = Xe^{p\sqrt{-1}},$	
de las fórmulas (1) y (2) obtenemos	
$\int_{-\pi}^{\pi} f(\bar{x}) dp = \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{1}{\bar{x}}\right) dp = 2\pi a_0;$	
por lo tanto, tendremos	
(3)	$\int_{-\pi}^{\pi} f(\bar{x}) dp = 2\pi f(0).$

Fuente: elaborada por los autores con base a la obra de Cauchy (1841)

¿*Qué hace?*: se describe el cálculo de integrales definidas de números complejos en coordenadas polares, además se introduce f polinómica evaluada en la parametrización $\bar{x} = Xe^{p\sqrt{-1}}$ y se establece la relación entre la integral de f sobre el contorno $p \in [-\pi, \pi]$ y el valor $f(0)$; ¿*Cómo hace?*: se establecen casos base en el círculo unitario para $k = 0$ y $k \neq 0$ (inferidos al separar la integral compleja su parte real e imaginaria con la fórmula de Euler), luego al introducir $f(\bar{x})$ se determina la integral de f sobre el contorno utilizando los resultados previos (1) y (2); ¿*Para qué hace?*: establecer una relación entre el valor de $f(0)$ y la integral de f a lo largo del contorno circular parametrizado, lo que fundamenta el enlace entre la función y su desarrollo en serie alrededor del origen; ¿*Por qué hace?*: el uso de contornos circulares simplifica el cálculo de las integrales y evita indeterminaciones en presencia de polos que podrían surgir con otros contornos, tal como Cauchy mostró en sus investigaciones de 1827.

Al cambiar el centro del contorno circular para el cual se derivan las expansiones en serie, se consiguen expresiones vinculadas con este nuevo punto de expansión. En general, considerando que f es una función polinómica, se tendría para cualquier punto complejo z_0 :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(z_0 + \bar{x}) dp = 2\pi f(z_0).$$

Esto se denomina *fórmula del valor medio de Gauss*. Las expansiones consideran contornos circulares centrados en el origen debido a la parametrización $Xe^{p\sqrt{-1}}$, en lugar de

$z_0 + Xe^{p\sqrt{-1}}$, por ende, los resultados se relacionan con los comportamientos de $f(0)$, obteniendo en los resultados, la expansión en series convergentes de Maclaurin.

Con los contornos circulares se definen dominios de convergencia análogos a la condición del problema de Kepler (convergencia para una pequeña excentricidad), garantizando que las condiciones se cumplan dentro de ciertos radios definidos por estas regiones.

Tabla 2 – Unidad de análisis 2

Es fácil extender la fórmula (3) al caso en que $f(\bar{x})$ deje de ser una función entera de x . De hecho, generalmente tenemos

$$D_X f(\bar{x}) = \frac{1}{X\sqrt{-1}} D_p f(\bar{x}).$$

Ahora, si se integran ambos miembros de la ecuación anterior, 1° con respecto a X y desde $X = 0$; 2° con respecto a p entre los límites $p = \pi$ y $p = -\pi$; y si se supone que la función de X y p , representada por $f(\bar{x})$, permanece finita y continua (junto con su derivada), cualquiera que sea p , para el valor asignado a X , y para un valor menor, se recuperará precisamente la fórmula (3).

Fuente: elaborada por los autores con base en la obra de Cauchy (1841)

¿Qué hace?: se extiende (3) para abordar diferentes funciones introduciendo una relación entre las derivadas parciales de $f(\bar{x})$; *¿Cómo hace?:* se presenta la relación $df(\bar{x})/dX = (1/iX)df(\bar{x})/dp$ (se infiere su derivación mediante el uso de la regla de la cadena) y se realiza una doble integración, bajo las hipótesis de finitud y continuidad de $f(\bar{x})$ y $f'(\bar{x})$, primero con respecto a X y luego con respecto a p ; *¿Para qué hace?:* generalizar la expresión (3) a un conjunto más amplio de funciones para mostrar que la misma relación integral se mantiene siempre que f cumpla las condiciones de finitud y continuidad; *¿Por qué hace?:* operar con funciones finitas y continuas (y derivadas continuas) para poder aplicar rigurosamente las integraciones. También utiliza ideas similares a las de Gauss (1816) atendiendo a las observaciones sobre las condiciones de validez para los resultados obtenidos.

La expresión (3) es un caso particular de la *fórmula del valor medio de Gauss*, para $z_0 = 0$: el valor promedio de f en cualquier circunferencia equivale a $f(z_0)$, con z_0 el centro de la circunferencia. Smithies (1997) destaca que la descripción metodológica expuesta en esta unidad es un proceso similar al que Gauss implementa en su 3^{ra} demostración del teorema fundamental del álgebra. En su trabajo Gauss advierte de varias consideraciones para poder realizar el cambio del orden de integración cuando se tienen una integral doble (Gauss, 1816). Estas consideraciones se infieren al introducir la hipótesis de continuidad (Cauchy, 1839). En esta memoria de 1839 describe con más detalle el proceso de generalización de (3) junto con consideraciones rigurosas para el cambio de orden de integración establecidas en sus lecciones del cálculo infinitesimal de 1823.

Tabla 3 – Unidad de análisis 3

Por otro lado, como tenemos $d\bar{x} = \bar{x}dp\sqrt{-1}$, si las funciones derivadas $f'(\bar{x}), f''(\bar{x}), \dots, f^{(n)}(\bar{x})$ permanecen finitas y continuas para el valor atribuido a X y para valores menores bastará con aplicar la integración por partes a la integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\bar{x})}{\bar{x}^n} dp,$$

Para así concluir

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\bar{x})}{\bar{x}^n} dp = \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f'(\bar{x})}{\bar{x}^{n-1}} dp = \frac{1}{n(n-1)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f''(\bar{x})}{\bar{x}^{n-2}} dp = \dots$$

y consecuentemente

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\bar{x})}{\bar{x}^n} dp = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(n)}(\bar{x}) dp,$$

O, en virtud de la fórmula (3):

$$(4) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\bar{x})}{\bar{x}^n} dp = \frac{f^{(n)}(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}.$$

Si la función $f(\bar{x})$ desaparece para un valor nulo de x , la ecuación (3) dará simplemente

$$(5) \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(\bar{x}) dp = 0.$$

Fuente: elaborada por los autores con base en la obra de Cauchy (1841)

¿Qué hace?: se realiza iteraciones de integración por partes sobre $f(\bar{x})$ y sus derivadas de orden superior, obteniendo una relación recursiva entre integrales de derivadas sucesivas de f , y tras n iteraciones, se obtiene (4) que expresa el valor de la n -ésima derivada de $f(0)$ a través de su integral de contorno vinculada con un polo de orden n . En última instancia, deriva (5) al suponer en (3) que $f(x) = 0$; ¿Cómo hace?: se introduce la relación diferencial $d\bar{x} = \bar{x}dp\sqrt{-1}$ y se emplea el proceso de integración por partes, luego se aplica este proceso de forma reiterada: tras cada integración se usa el resultado obtenido para efectuar la siguiente integral. Este método inductivo, repetido n veces, conduce a la expresión (4) junto con la ayuda de (3) para derivadas $\int_{-\pi}^{\pi} f^{(n)}(\bar{x}) dp = 2\pi f^{(n)}(0)$; ¿Para qué hace?: establecer una expresión que relacione la integral de contorno de f con su derivada n -ésima en el origen, es decir, se busca obtener los coeficientes de la serie de Maclaurin utilizando integrales de contorno vinculándolos con un polo. ¿Por qué hace?: el proceder metodológico en el campo complejo viene ligado con generalizaciones conocidas del campo real (Piña-Aguirre y Farfán, 2022), permitiendo aplicar técnicas de análisis conocidas en lo complejo y garantizar la validez de los resultados obtenidos.

Tabla 4 – Unidad de análisis 4

De las fórmulas (3), (4), (5) se pueden deducir fácilmente, como veremos, aquellas que sirven para desarrollar una función explícita o implícita de la variable x en una serie ordenada según las potencias ascendentes de esta variable.

Si, en la fórmula (5), se reemplaza $f(\bar{x})$ por el producto

$$\bar{x} \frac{f(\bar{x}) - f(x)}{\bar{x} - x},$$

con x siendo diferente de $\bar{x}$, y el módulo de x siendo menor que X , concluiremos

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\bar{x} f(\bar{x})}{\bar{x} - x} dp = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\bar{x} f(x)}{\bar{x} - x} dp = f(x) \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + \frac{x}{\bar{x}} + \frac{x^2}{\bar{x}^2} + \dots \right) dp = 2\pi f(x),$$

y así encontramos la conocida fórmula

$$(6) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\bar{x} f(\bar{x})}{\bar{x} - x} dp.$$

La ecuación (6) supone, al igual que las ecuaciones (3) y (5), que la función de X y p representada por $f(\bar{x})$ permanece finita y continua para el valor a asignado a X , y para valores menores.

Fuente: elaborada por los autores con base en la obra de Cauchy (1841)

¿Qué hace?: se desarrolla una fórmula para representar f como una integral de contorno; *¿Cómo hace?*: se introduce en (5) el kernel de Cauchy $\bar{x}/(\bar{x} - x)$ (Bottazzini, 1986) que vincula el comportamiento de $f(x)$ y $f(\bar{x})$, expandiéndolo en serie geométrica e imponiendo la condición de convergencia de esta y con ello se simplifican integrales de los términos de la expansión en serie usando (3) y (4); *¿Para qué hace?*: garantizar la convergencia de sus desarrollos por medio de la condición heredada de la serie geométrica $|x| < X$, la cual delimita los dominios circulares en los cuales la representación en serie es válida y así acotar sus resultados a funciones que cumplan dicha condición bajo las hipótesis de continuidad y finitud. *¿Por qué hace?*: establecer criterios rigurosos heredando las condiciones de convergencia de la serie geométrica, usando el *álgebra de desigualdades* como mecanismo de validación y vincular el comportamiento de la función en el campo complejo y el campo real.

El cociente introducido en esta unidad presenta una singularidad cuando $\bar{x} = x$, lo que a primera vista indicaría una discontinuidad. Sin embargo, al tomar el límite

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow x} \frac{f(\bar{x}) - f(x)}{\bar{x} - x} = f'(x)$$

dado que f y sus derivadas de orden superior son finitas y continuas, el cociente también resulta finito y continuo. Respecto a las integrales de contorno, Grattan-Guinness (1990, p. 771) señala que Cauchy entendía que “las integrales tomarían el mismo valor para dos trayectorias que no se intersecan si los polos se encuentran entre ellas”. Así cuando $\bar{x} \rightarrow x$, el valor de la integral permanece invariante independientemente del radio del círculo. Este enfoque es adoptado por varios textos de variable compleja al derivar la *fórmula integral de Cauchy* (FIC) (Ahlfors, 1979; Brown & Churchill, 2009; Saff & Snider, 2003), argumentando que, si f es continua alrededor de x , la integral se reduce a 0. En esta unidad se enfatiza el papel de la serie

geométrica para obtener las condiciones de convergencia, además la introducción del cociente refleja la idea de que el valor de la integral es independiente del contorno.

Tabla 5 – Unidad de análisis 5

Dado que el cociente $\frac{\bar{x}}{(\bar{x}-x)}$ es la suma de la progresión geométrica $1, \frac{x}{\bar{x}}, \frac{x^2}{\bar{x}^2}, \dots,$ que siempre es convergente, mientras el módulo de x se mantenga inferior al módulo X de $\bar{x}$; se deduce de la fórmula (6) que $f(x)$ será desarrollable en una serie ordenada según las potencias ascendentes de x, si el módulo de la variable real o imaginaria x permanece por debajo del valor en el que la función $f(x)$ (o su derivada de primer orden) deja de ser finita y continua. En particular, puesto que las funciones $\cos x, \sin x, e^x, e^{x^2}, \cos(1-x^2), \dots,$ (y sus derivadas de primer orden) nunca dejan de ser finitas y continuas, estas funciones siempre serán desarrollables en series convergentes ordenadas según las potencias ascendentes de x. Por el contrario, las funciones $(1+x)^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{1-x}, \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}, \dots,$ que, cuando se les asigna a x un valor imaginario de la forma $Xe^{p\sqrt{-1}}$, dejan de ser funciones continuas de x (junto con sus derivadas de primer orden) en el momento en que el módulo X se iguala a 1, serán ciertamente desarrollables en series convergentes ordenadas según las potencias ascendentes de la variable x, si el valor real o imaginario de x tiene un módulo inferior a uno; pero podrán volverse, y de hecho se volverán, divergentes si el módulo de x supera la unidad; Finalmente, como las funciones $\frac{1}{e^x}, e^{\frac{1}{x^2}}, \cos \frac{1}{x}, \dots,$ se vuelven discontinuas para un valor cero de x, y por tanto cuando el módulo de x es lo más pequeño posible, nunca pueden desarrollarse en series convergentes ordenadas según las potencias ascendentes de x.

Fuente: elaborada por los autores con base en la obra de Cauchy (1841)

¿Qué hace?: se realiza un análisis del comportamiento de funciones en series de potencias (Maclaurin); ¿Cómo hace?: utilizando la condición derivada $|x| < X$ mediante la condición de la serie geométrica $|x| < 1$; ¿Para qué hace?: determinar los límites (radios) de convergencia en cada caso y así caracterizar el comportamiento de las funciones ante su expansión en serie; ¿Por qué hace?: se busca acotar los resultados, trabajando solo con series que cumplan condiciones de continuidad y finitud ilustrándolo con ejemplos, además de establecer límites que permitan entender y verificar sus avances para el desarrollo en serie.

Nótese que funciones tipo e^x admiten siempre series convergentes en todo el plano, funciones con singularidades (del tipo polo) tienen su expansión limitada a $|x| < 1$ (por ejemplo, $(1+x)^{1/2}$ converge sólo si $|x| < X = 1$), mientras que funciones con singularidades en el origen no pueden desarrollarse en series convergentes de Maclaurin.

Tabla 6 – Unidad de análisis 6

Se deduce también de la fórmula (6) que, en el desarrollo de $f(x)$ según las potencias ascendentes de x , el término general será

$$(7) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^n}{\bar{x}^n} f(\bar{x}) dp = \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} f^{(n)}(0).$$

Por lo tanto, cuando la función $f(x)$ sea desarrollable en una serie convergente ordenada según las potencias ascendentes de x , tendremos

$$(7) \quad f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f''(0) + \cdots,$$

de acuerdo con el teorema de Maclaurin.

Fuente: elaborada por los autores con base en la obra de Cauchy (1841)

¿Qué hace?: se deriva la serie de Maclaurin para f relacionando los coeficientes de la serie con las integrales correspondientes; *¿Cómo hace?:* se emplea (6) y se infiere la expansión del kernel de integración como una serie geométrica para simplificar los términos y calcular el término general de la serie de Maclaurin; *¿Para qué hace?:* generalizar el teorema de Maclaurin usando contornos circulares complejos para determinar sus coeficientes y explicitar la condición de convergencia, *¿Por qué hace?:* se busca conectar con el teorema para tener el resultado principal de su obra, fundamentando así la generación de coeficientes en los criterios de continuidad y finitud de f en el radio de convergencia X establecido.

Tabla 7 – Unidad de análisis 7

Si denominamos ξ al módulo de x , y $\Lambda f(\bar{x})$ al límite del módulo $f(\bar{x})$, es decir, el valor más grande que este módulo puede adquirir cuando se varía el ángulo p sin cambiar el módulo X , el primer miembro de la fórmula (7) tendrá un módulo inferior a

$$(9) \quad \left(\frac{\xi}{X}\right)^n \Lambda f(\bar{x}),$$

es decir, el término general de la progresión geométrica cuya suma es

$$(10) \quad \frac{X}{X - \xi} \Lambda f(\bar{x}).$$

Así que el resto de esta progresión geométrica, a saber,

$$\frac{\xi^n}{X^{n-1}(X - \xi)} \Lambda f(\bar{x}),$$

superará al resto de la serie convergente que representa el desarrollo de $f(x)$.

Fuente: elaborada por los autores con base en la obra de Cauchy (1841)

¿Qué hace?: establece cotas superiores para el módulo del n -ésimo término y para el módulo del resto al truncar la serie n términos; *¿Cómo hace?:* se introduce $\xi = |x|$ y $\Lambda f(\bar{x}) = \sup_{-\pi \leq p \leq \pi} |f(\bar{x})|$ y con ello se establece una estimación del módulo del término general y una del resto tras n términos por medio de la expansión en serie geométrica y la desigualdad establecida en una nota al pie de página, que describe el valor medio $\frac{1}{b-a} \left| \int_a^b g(x) dx \right| \leq \sup\{|g(x)|: a \leq x \leq b\}$ (Smithies, 1997); *¿Para qué hace?:* proporcionar estimaciones que abarquen los

términos individuales y el resto de la expansión; ¿*Por qué hace?*: al estudiar el resto de la serie de Lagrange en 1827, lo hacía mediante un tratamiento basado en desigualdades y, además, asegurando que al acotar el resto de la expansión, este decrece conforme se aumente n .

Tabla 8 – Unidad de análisis 8

<i>También se podría llegar a la misma conclusión de la siguiente manera.</i> <i>Generalmente tenemos</i> $\frac{\bar{x}}{\bar{x} - x} = 1 + \frac{x}{\bar{x}} + \frac{x^2}{\bar{x}^2} + \dots + \frac{x^{n-1}}{\bar{x}^{n-1}} + \frac{x^n}{\bar{x}^{n-1}(\bar{x} - x)}.$ <i>Como resultado, la fórmula (6) da</i> $(11) \quad f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \dots + \frac{x^{n-1}}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} f^{(n-1)}(0) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^n}{\bar{x}^{n-1}(\bar{x} - x)} f(\bar{x}) dp.$ <i>Así que el resto de la serie de Maclaurin extendida al $n^{\text{ésimo}}$ término será</i> $(12) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^n}{\bar{x}^{n-1}(\bar{x} - x)} f(\bar{x}) dp.$ <i>Ahora bien, dado que el módulo de la función contenida bajo el signo de $\int$ en la integral (12) es inferior a la expresión (11), es evidente que podremos decir lo mismo de la integral en sí misma.</i>	
---	--

Fuente: elaborada por los autores con base en la obra de Cauchy (1841)

¿*Qué hace?*: se obtiene una fórmula explícita para el término residual tras el truncamiento del n -ésimo término; ¿*Cómo hace?*: se emplea el desarrollo finito de $\bar{x}/(\bar{x} - x)$ sustituyéndolo en (6), y con ello se simplifican los términos utilizando fórmulas previas para obtener (12) cuyo módulo puede compararse mediante la desigualdad anterior; ¿*Para qué hace?*: obtener una estimación precisa del error, mostrando que cuando n crece, el módulo del resto tiende a cero; ¿*por qué hace?*: según Smithies (1986) otra de las características del rigor de Cauchy era que sus resultados estén sujetos a verificación numérica, y con el establecimiento de las cotas y la formulación explícita para el error, se garantiza esta comprobación numérica.

VI

La investigación revela que las condiciones de convergencia estudiadas por Cauchy emergen de la interacción entre la representación algebraica de la función y su manifestación geométrica en el plano complejo. Es decir, para que una serie de Taylor converja es necesario vincular estas dos perspectivas mediante la parametrización polar, que permite interpretar dominios circulares de convergencia limitados por singularidades.

El trabajo de Cauchy además inspiró desarrollos entre sus contemporáneos. Por ejemplo, Laurent en 1843 demostró que una función holomorfa dentro de un anillo podía representarse mediante una serie que incluía potencias tanto positivas como negativas, destacando como “el primer resultado realmente importante que había sido desarrollado en la teoría de las funciones de variable compleja por cualquier matemático excepto Cauchy” (Bottazzini, 1986, pp. 162–

163). Liouville estableció en 1844 su teorema sobre funciones doblemente periódicas, mientras que en astronomía Leverrier utilizó los métodos de Cauchy para calcular perturbaciones de Urano, llevándolo al descubrimiento de Neptuno en 1846 (Belhoste, 1991, p. 206).

Asimismo, su trabajo tuvo varios cambios sobre todo en la hipótesis de continuidad de Cauchy para la derivada de f , ya que inicialmente no imponía la continuidad de la derivada, sino que asumía la continuidad de f , añadiéndola en 1839 para dar mayor rigor a sus desarrollos (Smithies, 1997). Años más tarde, siguiendo las ideas de Liouville, Cauchy eliminó la condición de continuidad de f' en sus teoremas y Goursat en 1900 demostró que ni siquiera es preciso suponer continuidad de la derivada para el teorema integral sea válido (Bottazzini, 1986).

En los textos de variable compleja el teorema revela transformaciones metodológicas. Ahlfors (1979), Brown y Churchill (2009, pp. 190–192), Saff y Snider (2003, pp. 235, 243–244) presentan la serie de Taylor como un caso que se justifica mediante la fórmula integral de Cauchy y técnicas de contorno, enfatizando la demostración a través del teorema integral y el control del resto por cotas de la serie. Sin embargo, los textos desplazan el énfasis metodológico de la serie geométrica —relevante en la obra original de Cauchy— hacia argumentos basados en la reducción de contornos y reemplazos estratégicos. Needham (1997, p. 64) captura en mayor medida las motivaciones de Cauchy destacando que el radio de convergencia equivale a la distancia entre el centro de desarrollo y la singularidad más próxima. Esta reinterpretación muestra que, aunque el contenido técnico se mantiene, la forma de presentación y las vías didácticas se han resignificado en el tiempo.

VII

A través de los cuestionamientos asociados al MAP, emergen componentes estructurales que sustentan una hipótesis epistemológica sobre las prácticas matemáticas que dotaron de sentido al teorema de expansión de funciones en su contexto original.

Como resultado de la reconstrucción, se identificó que el autor estableció una articulación conceptual entre representaciones algebraicas y contornos en el plano complejo, cada una complementándose y otorgando sentido a la otra. La parametrización polar conecta el comportamiento analítico abstracto de la función con su manifestación geométrica en el plano complejo. De esta manera, las propiedades que se transfieren por analogía al campo complejo son los criterios de convergencia de las series, donde Cauchy utilizó las propiedades de la serie geométrica como modelo para la convergencia de sus desarrollos, validadas mediante el álgebra de desigualdades que en el campo complejo delimitan regiones donde converge la serie.

Estos elementos muestran que la convergencia en la obra es el resultado de la interacción entre la estructura analítica de la función y su comportamiento geométrico. Con base en esta reconstrucción, se formula la siguiente hipótesis epistemológica:

Para la convergencia de series se requiere de representaciones algebraicas y geométricas de la función, vinculadas por medio de la parametrización polar para concebir dominios de convergencia delimitados por singularidades, validados mediante el comportamiento de la serie geométrica a través de desigualdades.

Esto implica que los contornos circulares solo garantizan convergencia mientras no alcancen una singularidad de la función, estableciendo que propiedades de las funciones son límites intrínsecos que determinan geoméricamente el radio de convergencia. Un ejemplo ilustrativo es la función $1/(1+x^2)$, continua y diferenciable en el eje real, pero que al examinarla desde el plano complejo mediante la parametrización polar revela polos en $x = \pm i$, los cuales imponen un radio de convergencia finito.

En términos de Piña-Aguirre y Farfán (2023), esta conjetura se alinea con su categoría, *medio de representación*, en la que las construcciones geométricas (como curvas o dominios parametrizados) son necesarias para obtener resultados simbólicos. Bajo esta perspectiva, al considerar la parametrización de trayectorias en el plano complejo, la hipótesis establece que las construcciones geométricas no son meros apoyos visuales, sino herramientas para mostrar la convergencia de series de potencias y la independencia del camino de integración.

CONCLUSIONES

El presente trabajo se propuso analizar el trabajo de Cauchy de 1831 para identificar las condiciones que garantizan la convergencia de las series de Taylor. Para ello se empleó el modelo de Hinojos y Farfán (2019) con base en la problematización del saber, integrando el análisis del contexto de producción con el estudio de la argumentación matemática.

El análisis contextual mostró que la obra de Cauchy surgió como respuesta a la falta de rigor en los métodos de la mecánica celeste que involucran series. Su trabajo representó también un abono a la ruptura epistemológica con el programa de Lagrange destacado por Espinoza (2009), que asumía la representabilidad de funciones mediante series de potencias, estableciendo en su lugar condiciones de finitud y continuidad para garantizar la convergencia.

La reconstrucción del trabajo matemático mediante el MAP reveló que las condiciones de convergencia en la obra están ligadas a la elección de contornos circulares como dominios

de convergencia, conectando el radio de convergencia con una interpretación geométrica mediante parametrización polar. De este modo, las series de Taylor se comprenden no solo desde criterios analíticos sino también desde criterios geométricos. Asimismo, el análisis del contexto de producción reveló que dicha elección de contornos no fue aleatoria, sino que tiene sus raíces en trabajos anteriores del mismo autor, siendo un núcleo el problema de Kepler resuelto por Lagrange, al destacar los valores pequeños para la excentricidad de una elipse.

Esto permitió manifestar invariantes epistemológicas como: la utilización de contornos circulares cerrados parametrizados; la imposición de condiciones de finitud y continuidad (ausencia de singularidades); y la herencia de criterios de convergencia de la serie geométrica (rigurosidad). Por ende, $|x| < X$ representa la distancia a la singularidad más cercana desde el centro de expansión de Maclaurin, y $|x - a| < X$ para la expansión de Taylor.

De cara al futuro, se propone confrontar y robustecer el resultado principal a través del tratamiento posterior del resultado de Cauchy por otros científicos (Laurent, Liouville, Lamarle, Briot y Bouquet, etc.). Esto permitiría el diseño de estrategias didácticas que se nutran de los tratamientos en libros de texto e incorporen la articulación entre representaciones algebraicas y geométricas por medio de la parametrización, superando el enfoque procedimental al comprender dónde converge la serie y por qué una función admite desarrollo en serie.

REFERENCIAS

- Ahlfors, L. (1979). *Complex Analysis: An Introduction to The Theory of Analytic Functions of One Complex Variable* (3rd ed.). McGraw-Hill Education.
- Arcos Quezada, J. I., Hinojos-Ramos, J., Montiel-Espinosa, G., Rodríguez, F. M., & Zubillaga Guerrero, E. (2022). La investigación histórica: enfoques para la enseñanza y aprendizaje de la matemática en México. *Memorias del VI Congreso Iberoamericano de Historia de la Educación Matemática (CIHEM)*, 144–156.
- Belhoste, B. (1991). *Augustin-Louis Cauchy: A Biography*. Springer.
- Bottazzini, U. (1986). *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*. Springer New York.
- Bottazzini, U. (1989). *Lagrange et le problème de Kepler*. *Revue d'histoire Des Sciences*, 42(1/2), 27–42.
- Bottazzini, U., & Gray, J. (2013). *Hidden Harmony—Geometric Fantasies: The Rise of Complex Function Theory*. Springer.
- Bradley, R. E., & Sandifer, C. E. (2009). *Cauchy's Cours d'analyse*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0549-9>
- Brown, J. W., & Churchill, R. V. (2009). *Complex variables and applications* (8th ed). McGraw-Hill.

- Cantoral. (2001). *Matemática Educativa: Un estudio de la formación social de la analiticidad*. Grupo Editorial Iberoamérica.
- Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa: Estudios sobre construcción social del conocimiento* (1ra ed.). Gedisa.
- Cantoral, R., Montiel-Espinosa, G., & Reyes-Gasperini, D. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(3).
- Cantoral, R., Montiel-Espinosa, G., & Reyes-Gasperini, D. (2015). El programa socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa: *El caso de Latinoamérica*. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 18(1). <https://doi.org/10.12802/relime.13.1810>
- Carmine, B. (2021). Agostino Luigi Cauchy In Italy. *IJAEMR*, 6(3), 86–99.
- Cauchy, A.-L. (1822). Sur le développement des fonctions en séries, et sur l'intégration des équations différentielles, ou aux différences partielles. *Bull. Des Sci. Par La Soc. Philomatique de Paris*, 49–54.
- Cauchy, A.-L. (1827a). Mémoire sur divers points d'analyse. *Oeuvres Complètes d'Augustin Cauchy*, 2(1), 29–32.
- Cauchy, A.-L. (1827b). Sur quelques propositions fondamentales du calcul des résidus. *Oeuvres Complètes d'Augustin Cauchy*, 7(2), 291–323.
- Cauchy, A. L. (1831). Résumé d'un mémoire sur la mécanique céleste et sur un nouveau calcul appelé calcul des limites. *Oeuvres Complètes d'Augustin Cauchy*, 12(2), 48-112.
- Cauchy, A.-L. (1839). Note sur l'intégration des équations différentielles des mouvements planétaires. *Exercices d'Analyse et de Physique Mathématique*, 1, 27–32.
- Cauchy, A.-L. (1841). Résumé d'un mémoire sur la mécanique céleste et sur un nouveau calcul appelé calcul des limites. *Exercices d'Analyse et de Physique Mathématique*, 2, 41–98.
- Espinoza, L. (2009). *Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemológico* (Tesis de Maestría). Cinvestav. https://www.researchgate.net/publication/275045220_Una_evolucion_de_la_analiticidad_de_las_funciones_en_el_siglo_XIX_Un_estudio_socioepistemologico_Cinvestav
- Espinoza, L., & Cantoral, R. (2010). Una propuesta metodológica para estudios socio históricos: el caso de la teoría de funciones de Lagrange. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 23, 889–898. CLAME
- Gauss, C. F. (1816). Theorematis de resolubilitate functionum algebraicarum integrarum in factores reales demonstratio tertia. *Werke*, 3, 57–64.
- Grabner, J. V. (1981). *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*. Dover Publications.
- Grattan-Guinness, I. (1990). *Convolutions in French Mathematics, 1800–1840: From the Calculus and Mechanics to Mathematical Analysis and Mathematical Physics* (Vol. 4). Birkhäuser.
- Hinojos-Ramos, J. E., & Farfán, R. M. (2019). Historical-epistemological elements for the design of a learning situation from Socioepistemology. The case of steady-state and electrical engineering. *Revista de Docencia e Investigación Educativa: Journal of Teaching and Educational Research*, 5(15), 20–31.
- Jayakody, G., & Zazkis, R. (2015). Continuous Problem of Function Continuity. *For the Learning of Mathematics*, 35(1), 8–14.

- Locia-Espinoza, E., Morales-Carballo, A., & Merino-Cruz, H. (2020). Taylor's Formula, Limited Development, and Development of Power Series: A Study of the Knowledge of University Professors in Training. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 15(3). <https://doi.org/10.29333/iejme/7852>
- Márquez-García, G. (2018). *Una problematización del concepto de topología en los inicios de la teoría de conjuntos abstractos de Fréchet* (Tesis de Maestría). Cinvestav. <https://repositorio.cinvestav.mx/handle/cinvestav/927>
- Martin, J. (2013). Differences between experts' and students' conceptual images of the mathematical structure of Taylor series convergence. *Educational Studies in Mathematics*, 82(2), 267–283. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9425-7>
- Morales, A., & Cordero, F. (2014). La graficación—Modelación y la Serie de Taylor. Una socioepistemología del cálculo. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 17(3), 319–345. <https://doi.org/10.12802/relime.13.1733>
- Needham, T. (1997). *Visual Complex Analysis*. Clarendon Press. <https://books.google.com.ec/books?id=ogz5FjmiqlQC>
- Piña-Aguirre, J. G., & Farfán Márquez, R. M. (2022). Sobre los procesos de demostración y el contexto de producción de la memoria Sur Les Intégrales Définies de Augustin-Louis Cauchy. *Revista de História Da Educação Matemática*, 8, 1–22.
- Piña-Aguirre, J. G., & Farfán Márquez, R. M. (2023). What enabled the production of mathematical knowledge in complex analysis? *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 18(2), 1–14. <https://doi.org/10.29333/iejme/12996>
- Remmert, R. (1991). *Theory of Complex Functions*. Springer Science & Business Media.
- Saff, E. B., & Snider, A. D. (2003). *Fundamentals of Complex Analysis with Applications to Engineering and Science* (3rd ed). Prentice Hall.
- Smithies, F. (1986). *Cauchy's conception of rigour in analysis*. *Archive for History of Exact Sciences*, 36(1), 41–61. <https://doi.org/10.1007/BF00357440>
- Smithies, F. (1997). *Cauchy and the Creation of Complex Function Theory*. Cambridge University Press.
- Zuñiga Coronel, F. A. (2022). Una mirada de la Serie de Taylor mediante un sistema de referencia variacional en contexto de predicción en circuitos eléctricos. *El cálculo y su enseñanza*, 18(2). <https://doi.org/10.61174/recacym.v18i2.181>