



TRANSFORMAÇÕES LINEARES EM INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA LINEAR (1977): uma análise à luz da Teoria dos Registros e Representação Semiótica

*Transformations linéaires dans Introduction à l'algèbre linéaire (1977): une analyse à la lumière
de la théorie des registres et de la représentation sémiotique.*

*Transformaciones lineales en la introducción al álgebra lineal (1977): un análisis a la luz de la
teoría de registros y la representación semiótica.*

*Transformations linéaires dans Introduction à l'algèbre linéaire (1977): une analyse à la lumière
de la théorie des registres et de la représentation sémiotique.*

Ellen Martins da Silva¹

Universidade do Estado do Pará

ellen.mdsilva@aluno.uepa.br



Lattes: <http://lattes.cnpq.br/9008415524385864>



Orcid: <https://orcid.org/0009-0001-0194-2417>

Miguel Chaquiam²

Universidade do Estado do Pará

miguel.chaquiam@uepa.br



Lattes: <http://lattes.cnpq.br/9356361533701895>



Orcid: <https://orcid.org/0000-0003-1308-8710>

¹ Licenciada em Matemática pela Universidade do Estado do Pará (UEPA), Mestranda pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGEM-UEPA), Belém, Pará, Brasil. Endereço para correspondência: Rua do Una, Passagem Frederico, 198, Umarizal, Belém, Pará, Brasil, CEP: 66050-150. E-mail: ellen.mdsilva@aluno.uepa.br.

² Doutor em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Professor do Departamento de Matemática, Estatística e Informática e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará (UEPA), Belém, Pará, Brasil. Endereço para correspondência: Avenida Rômulo Maiorana, 2019, Vila Verde 105 - A, Marco, Belém, Pará, Brasil, CEP: 66.093-605. E-mail: miguel.chaquiam@uepa.br.

RESUMO

A pesquisa partiu da observação de dificuldades de compreensão de alunos da graduação em relação às transformações lineares e suas representações em álgebra linear. À vista disso, adotou-se a questão: Que representações de transformações lineares constam no livro *Introdução à Álgebra Linear* (1977), de Guilherme de La Penha e Mina Carakushansky, segundo a Teoria dos Registros de Representações Semiótica de Duval (2003), podem contribuir positivamente para percepção desse objeto matemático? Para responder ao questionamento, foi estabelecido como objetivo: Identificar registros e representações das transformações lineares no livro *Introdução à Álgebra Linear* (1977), sob a ótica da Teoria dos Registros de Representações Semiótica de Duval (2003), tendo-se em vista possíveis contribuições para entendimento dessa temática. Esteou-se a pesquisa em base documental, com levantamentos a partir do acervo do GHEMAZ, classificada como aplicada quanto a natureza; a abordagem é qualitativa; exploratória quanto aos objetivos e, quanto aos procedimentos, bibliográfica, segundo definições de Creswell (2007) e Bauer e Gaskell (2008). Foram identificadas três obras dos citados autores, sendo escolhida *Introdução à Álgebra Linear* (1977) por sua abrangência e relevância. A análise evidenciou que o livro *Introdução à Álgebra Linear* contempla quatro tipos de registros, algébricos, geométricos, matriciais e numéricos, elementos que podem contribuir para o entendimento do objeto matemático em diferentes perspectivas, ressaltado que nestes foram mantidos pelos autores o rigor matemático e a formalização. Por fim, é possível inferir que a forma apresentada pode contribuir para o entendimento e aplicação deste conteúdo a partir dos tipos de registros relacionados às transformações lineares.

Palavras-chave: Educação Matemática. Ensino de Matemática. Álgebra Linear. Transformações Lineares. Registros e Representações Semiótica.

ABSTRACT

This research stemmed from observations regarding undergraduate students' difficulties in understanding linear transformations and their representations in linear algebra. Consequently, the following question was posed: Which representations of linear transformations found in the book **Introdução à Álgebra Linear** (1977)—authored by Guilherme de La Penha and Mina Carakushansky—can positively contribute to the perception of this mathematical object, when viewed through the lens of Duval's (2003) Theory of Semiotic Representation Registers? To address this question, the study aimed to identify the registers and representations of linear transformations within the book **Introdução à Álgebra Linear** (1977), based on Duval's (2003) theory, while considering their potential contribution to understanding the subject matter. The research was grounded in a documentary analysis—drawing on the GHEMAZ collection—and is classified as applied research; it employs a qualitative approach and is exploratory in its objectives. Regarding procedures, it is a bibliographic study, following the definitions provided by Creswell (2007) and Bauer and Gaskell (2008). Three works by the aforementioned authors were identified, with **Introdução à Álgebra Linear** (1977) selected due to its scope and relevance. The analysis revealed that the book incorporates four types of registers—algebraic, geometric, matrix, and numerical—which can facilitate an understanding of the mathematical object from various perspectives, while noting that the authors maintained mathematical rigor and formalization throughout. Finally, it can be inferred that the presentation of these registers associated with linear transformations may contribute to the understanding and application of this content.

Keywords: Mathematics Education. Mathematics Teaching. Linear Algebra. Linear Transformations. Records and Representations. Semiotics.

RESUMEN

Esta investigación surgió de la observación de dificultades en la comprensión de las transformaciones lineales y sus representaciones en álgebra lineal entre estudiantes de pregrado. En vista de esto, se planteó la siguiente pregunta: ¿Qué representaciones de transformaciones lineales encontradas en el libro **Introducción al Álgebra Lineal** (1977), de Guilherme de La Penha y Mina Carakushansky, según la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas de Duval (2003), pueden contribuir positivamente a la percepción de este objeto matemático? Para responder a esta pregunta, se estableció el objetivo como: Identificar registros y representaciones de transformaciones lineales en el libro **Introducción al Álgebra Lineal** (1977), desde la perspectiva de la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas de Duval (2003), considerando posibles contribuciones a la comprensión de este tema. La investigación se basó en datos documentales, con encuestas de la colección

GHEMAZ, clasificadas como de naturaleza aplicada; el enfoque es cualitativo; Este estudio fue exploratorio en cuanto a sus objetivos y bibliográfico en cuanto a sus procedimientos, según las definiciones de Creswell (2007) y Bauer y Gaskell (2008). Se identificaron tres obras de los autores mencionados, seleccionándose **Introducción al Álgebra Lineal** (1977) por su exhaustividad y relevancia. El análisis mostró que **Introducción al Álgebra Lineal** incluye cuatro tipos de representaciones: algebraica, geométrica, matricial y numérica; elementos que pueden contribuir a la comprensión del objeto matemático desde diferentes perspectivas. Cabe destacar que los autores mantuvieron el rigor matemático y la formalización en estas obras. Finalmente, es posible inferir que el formato presentado puede contribuir a la comprensión y aplicación de este contenido a partir de los tipos de representaciones relacionadas con las transformaciones lineales.

Palabras clave: Educación Matemática. Enseñanza de las Matemáticas. Álgebra Lineal. Transformaciones Lineales. Registros y Representaciones. Semiótica.

RÉSUMÉ

Cette recherche est née du constat des difficultés rencontrées par les étudiants de premier cycle pour comprendre les transformations linéaires et leurs représentations en algèbre linéaire. Dès lors, la question suivante a été posée : quelles représentations des transformations linéaires, présentes dans l'ouvrage **Introduction to Linear Algebra** (1977) de Guilherme de La Penha et Mina Carakushansky, peuvent, selon la théorie des registres de représentations sémiotiques de Duval (2003), contribuer positivement à la compréhension de cet objet mathématique ? Pour y répondre, l'objectif a été défini comme suit : identifier les registres et les représentations des transformations linéaires dans l'ouvrage **Introduction to Linear Algebra** (1977), du point de vue de la théorie des registres de représentations sémiotiques de Duval (2003), en considérant leurs contributions potentielles à la compréhension de ce sujet. La recherche s'appuie sur des données documentaires, notamment des enquêtes menées auprès des archives du GHEMAZ, classées comme étant de nature appliquée ; l'approche est qualitative. Cette étude, exploratoire quant à ses objectifs et bibliographique quant à sa méthodologie, s'appuie sur les définitions de Creswell (2007) et Bauer et Gaskell (2008). Trois ouvrages de ces auteurs ont été recensés, et **Introduction to Linear Algebra** (1977) a été retenu pour son exhaustivité et sa pertinence. L'analyse a révélé que cet ouvrage propose quatre types de représentations : algébrique, géométrique, matricielle et numérique – autant d'éléments qui contribuent à la compréhension de l'objet mathématique sous différents angles. Il convient de souligner la rigueur et la formalisation mathématiques dont ont fait preuve les auteurs. En conclusion, le format présenté semble favoriser la compréhension et l'application de ce contenu, notamment grâce aux types de représentations liés aux transformations linéaires.

Mots-clés: Enseignement des mathématiques. Algèbre linéaire. Transformations linéaires. Enregistrements et représentations. Sémiotique.

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A Álgebra Linear tem despertado crescente interesse na área da Educação Matemática nas últimas décadas, seja por seu papel fundamental na estruturação de diversos ramos do saber matemático, seja pelas múltiplas aplicações que extrapolam o campo da Matemática pura e dialogam com áreas como Física, Computação, Economia e Engenharia, mais recentemente, Inteligência Artificial (IA). No interior dessa disciplina, o conceito de Transformação Linear ocupa posição de destaque, servindo como elo entre vetores, matrizes, espaços vetoriais e aplicações geométricas, o que evidencia sua importância para a formação matemática inicial dos estudantes de cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática e áreas afins.

Ainda assim, mesmo sendo um conteúdo essencial, são recorrentes os relatos de dificuldades enfrentadas por discentes ao estudarem Transformações Lineares, sobretudo pela natureza abstrata do conceito, pelas exigências cognitivas envolvidas na transposição entre diferentes formas de representação e pelo modo como o conteúdo é geralmente apresentado em materiais didáticos (Assis, 2019). Essa constatação, que surge tanto da literatura quanto da experiência prática vivida por muitos estudantes de Matemática, conforme apontado por Furtado e Cabral (2011), corroborada pelas dificuldades observadas em sala quanto a compreensão desse objeto por alunos da graduação, motivou-nos à escolha dessa temática.

Além disso, o contato com os conteúdos relacionados às transformações lineares durante a graduação revelou não apenas a profundidade conceitual do tema, mas também as limitações enfrentadas pelos alunos, especialmente no que diz respeito à compreensão das ideias em torno das transformações lineares quanto função que atua sobre vetores, preservando estruturas lineares, e que pode ser representada de múltiplas formas, como por expressões algébricas, diagramas, matrizes e imagens geométricas. Nesse sentido, são exigidos do docente competências, habilidades e atitudes que possam mudar essa situação, pautada pela busca de alternativas metodológicas e tratamento de conteúdos de álgebra linear (Da Silva; Basso, 2010).

A reflexão sobre tais dificuldades, associada à leitura da obra didática de Guilherme de La Penha e Mina Carakushansky, Álgebra Linear I e II (1974), Sinopse de Álgebra Linear (1975) e Introdução à Álgebra Linear (1977), retratados em Chaquiam (2012), levou-nos a indagar os porquês de as abordagens das transformações lineares em livros utilizados no ensino superior não mobilizarem registros e representações que possam favorecer o entendimento desse objeto matemático. Segundo Duval (2003) a dificuldade do estudante em compreender a natureza abstrata e não-real dos objetos matemáticos decorre da necessidade de utilizar representações de registros semióticos para acessar esses objetos.

Além disso, reconhecendo que os livros didáticos exercem forte influência no planejamento das aulas e na forma como os conteúdos são compreendidos pelos estudantes, conforme apontam estudos de Cardoso (2014), torna-se relevante investigar à luz de teorias que tratam da mediação semiótica como são registrados e representados os conteúdos relacionados às transformações lineares nas obras de Guilherme de La Penha e Mina Carakushansky.

Notou-se no artigo Dias e Chaquiam (2020), que a pesquisa teve como foco caracterizar as apresentações e representações dos objetos de (in)dependência linear, geradores, base e dimensão em espaços vetoriais em livros de álgebra linear de Guilherme de La Penha e Mina Carakushansky. Nele, buscou-se compreender como esses conceitos foram introduzidos, definidos e representados sob os aspectos naturais, algébricos e geométricos.

Assim, como forma de contemplar uma análise mais ampla da álgebra linear e expandir os achados da pesquisa original, e dado que as considerações finais do artigo sugerem a possibilidade de aprofundar o entendimento nessa área explorando outros objetos matemáticos presentes nos materiais bibliográficos investigados por esses dois autores, nesse sentido decidiu-se ampliar a investigação com outro recorte, neste caso, focado nas transformações lineares, para complementar os resultados apresentados por Dias e Chaquiam (2020).

Os estudos desenvolvidos por Dias e Chaquiam (2020) apontam a teoria de registro e representações semiótica, de Duval (2003), para caracterizar os registros e representações de objetos da álgebra linear e, nesse sentido, para dar continuidade a análise desenvolvida por esses autores, seguir-se-á na mesma direção em relação as transformações lineares, presentes no livro *Introdução à Álgebra Linear* (1977), de La Penha e Carakushansky.

Frente as abordagens identificadas inicialmente no livro *Introdução à Álgebra Linear* (1977), que contemplam o constante nos demais livros, foi estabelecido como norte: Que representações de transformações lineares constam no livro *Introdução à Álgebra Linear* (1977), de Guilherme de La Penha e Mina Carakushansky, segundo a Teoria dos Registros de Representações Semiótica (TRRS) de Duval (2003), podem contribuir positivamente para percepção desse objeto matemático? Buscando elementos e argumentos para responder ao questionamento elencado foi estabelecido como objetivo: Identificar registros e representações das transformações lineares no livro *Introdução à Álgebra Linear* (1977), sob a ótica da TRRS de Duval (2003), tendo-se em vista possíveis contribuições para entendimento dessa temática.

Mais precisamente, como desdobramentos deste objetivo geral, foram estabelecidos os seguintes objetivos específicos: i) Apresentar traços biográficos acerca de Guilherme de La Penha e Mina Carakushansky, bem como sua produção inerente à álgebra linear; ii) Discorrer sobre Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2003), tendo-se em vista a

identificação de registros e transformações no livro *Introdução à Álgebra Linear* (1977) referentes às transformações lineares; iii) Apresentar os livros de álgebra linear de Guilherme de La Penha e Mina Carakushansky, em particular, os registros e transformações relacionados às transformações lineares; e iv) Descrever os registros e transformações dos conteúdos elencados com vista a caracterizar sua importância para o entendimento e consolidação desse objeto matemático.

Em relação a metodologia, consideramos as definições de Creswell (2007) e Bauer e Gaskel (2008), visto que é uma pesquisa aplicada, voltada à geração de conhecimento para aplicação prática e à solução de problemas específicos. Ademais, em relação a abordagem, qualitativa, tendo-se em vista um entendimento e aprofundamento do assunto. Quanto aos objetivos, a pesquisa é exploratória, pois analisa panoramas sob diferentes perspectivas para ganhar afinidade com o tema. Quanto à abordagem adotada, a investigação é bibliográfica, baseada em referências teóricas publicadas em livros e artigos científicos. Quanto aos procedimentos metodológicos, delimitação do tema e definição da teoria de apoio à análise dos conteúdos constantes sobre transformações lineares, inicialmente o estudo concentrou-se em Chaquiam (2012) e, em seguida, apoiou-se nos trabalhos de Dias (2019) e Dias e Chaquiam (2020) para delimitar a temática e definir a Teoria dos Registros de Representações Semiótica de Duval (2003) como basilar na análise registros e representações desse objeto matemático.

Logo, o presente trabalho se estrutura a partir das contribuições dos registros e representações para a aprendizagem das transformações lineares, amparado nos resultados das análises dos livros de La Penha e Carakushansky, a partir da identificação de quais registros são utilizados, quais são os privilegiados e quais são, porventura, os negligenciados. Espera-se contribuir com reflexões sobre o papel dos recursos didáticos na formação inicial e continuada de professores de Matemática, bem como na superação das dificuldades enfrentadas nos processos de ensino e de aprendizagem de álgebra linear, especificamente no que tange as transformações lineares. Diante do proposto, inicia-se pelo aporte teórico, apresentando os fundamentos que sustentam a análise e situam a pesquisa.

1. APORTE TEÓRICO

Nesta seção apresentamos os conceitos base da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2003), com o objetivo de utilizá-la na análise do capítulo que versa sobre

transformações lineares do livro *Introdução à Álgebra Linear* (1977), de Guilherme de La Penha e Mina Seinfeld de Carakushansky.

O modo como o sujeito se aproxima de um objeto de estudo influencia diretamente na maneira como ele o compreende. Em disciplinas como a biologia, física ou química, por exemplo, essa aproximação ocorre muitas vezes por meio da observação direta de fenômenos, substâncias ou estruturas, com o auxílio de instrumentos como microscópios ou telescópios. Na matemática, a realidade é bastante distinta, visto que os objetos matemáticos, como números, entes geométricos, vetores ou transformações lineares, muitas das vezes estão no mundo das ideias, não podem ser vistos, atingidos ou manuseados diretamente, o que temos são representações simbólicas que buscamos interpretar, como destaca D'Amore *et al.* (2015).

À vista disso, faz-se necessário um sistema capaz de dar corpo e forma a esses objetos invisíveis. Esse sistema é construído por meio de signos, registros e representações. É nesse contexto que se insere a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), desenvolvida por Duval (2003). Essa teoria, de inspiração semiótica, mostra como a aprendizagem em Matemática depende, em grande parte, da forma como os objetos são representados e compreendidos. Em relação aos conteúdos de álgebra linear, por exemplo, essa ideia se evidencia ao pensarmos em objetos como vetores, matrizes ou transformações lineares, visto que esse último pode ser representado por meio de uma aplicação algébrica, por um gráfico no plano ou espaço, ou ainda por meio de tabelas numéricas.

Diante do exposto, para que se constitua uma compreensão mais ampla e consistente sobre um objeto é essencial que seja exposto a diversos tipos de registros e representações e, mais do que isso, que consiga transitar entre elas. Ademais, esse movimento entre representações, dentro do mesmo registro ou entre registros distintos, é denominado de transformação de registros, sendo está dividida em tratamento e conversão, fato considerado durante a análise dos conteúdos relacionados às transformações lineares recortadas do livro *Introdução à Álgebra Linear* (1977).

O tratamento diz respeito às modificações feitas dentro de um mesmo registro, por exemplo, como resolver uma equação algébrica utilizando diferentes métodos operacionais. A conversão, por outro lado, ocorre quando se muda de um registro para outro, como ao representar geometricamente uma transformação descrita por uma matriz ou por uma expressão algébrica. Essa conversão, segundo Duval (2003), é a atividade mais desafiadora do ponto de vista cognitivo, pois exige a capacidade de reconhecer e compreender o mesmo objeto representado de distintas formas e, além disso, articular os diversos significados que nem sempre são tão evidentes.

De outro lado, Pinheiro (2015) chama a atenção para um ponto delicado no ensino de matemática: a valorização excessiva do tratamento. Muitas vezes, o foco durante o processo de ensino se concentra nas técnicas e procedimentos, deixando de lado o esforço em desenvolver a compreensão por meio da conversão entre registros. Essa prática pode levar a confundir os objetos matemáticos com suas representações, fato que pode dificultar a construção de um conhecimento conceitual mais sólido e profundo sobre um objeto.

Nesse contexto, adotou-se a metodologia constante em Dias (2019) e Dias e Chaquiam (2020), fundamentada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, com o propósito de analisar livros técnicos de Álgebra Linear. A adoção dessa abordagem metodológica visa investigar a forma como os conteúdos relativos às transformações lineares são apresentados, identificando os registros semióticos empregados e examinando de que maneira essas escolhas podem favorecer a compreensão e a construção dos conceitos abordados. Concluída a exposição do referencial teórico, apresenta-se, na sequência, os autores Guilherme de La Penha e Mina Carakushansky, cujas obras constituem a base do material objeto desta investigação.

2. SOBRE OS AUTORES GUILHERME DE LA PENHA E MINA CARAKUSHANSKY

Apresentam-se, nesta seção, os traços biográficos dos autores Guilherme de La Penha e Mina Seinfeld de Carakushansky, bem como suas obras relacionadas à álgebra linear, especificamente os três livros de Álgebra Linear, no intuito de elucidar o leitor sobre os motivos que nos levaram a escolhê-los. Ressaltamos que os dados apresentados dos dois autores foram tirados de Chaquiam (2012) e Dias (2019), respectivamente.

Guilherme Maurício Souza Marcos de La Penha, mais conhecido como Guilherme de La Penha, nasceu em Belém do Pará, em 9 de março de 1942. Sua trajetória foi marcada pela excelência acadêmica e profissional, e seu pensamento sobre ciência, tecnologia, formação de cientistas e educadores manteve coerência com seus escritos e sua prática conforme apontado por Chaquiam (2012). Esse mesmo autor o caracteriza como um intelectual múltiplo e transdisciplinar, cuja atuação articula, de forma contínua, pesquisa de ponta em matemática aplicada, gestão científica de alto nível e compromisso com a formação e atuação de professores e pesquisadores (Chaquiam, 2012).

Seus estudos começaram no Instituto Suíço Brasileiro e, posteriormente, no Colégio Marista Nossa Senhora de Nazaré e Escola de Agrimensura do Pará. Em seguida, ingressou no curso de Engenharia Mecânica na Universidade Federal do Pará (UFPA), transferindo-se logo

depois para a Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-RIO), onde concluiu o curso em 1964. Durante a graduação, participou de programas de formação científica no Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) (Chaquiam, 2012). Sua formação acadêmica inclui dois mestrados (PUC-Rio e Universidade de Cambridge), doutorado na Universidade de Houston e pós-doutorado na Carnegie Mellon University, todos na área de Matemática Aplicada e Mecânica dos Sólidos.

Posteriormente, após seu retorno ao Brasil, proporcionou-nos uma ampla produção bibliográfica que compreende obras voltadas à álgebra vetorial, geometria analítica, matrizes, educação matemática, história da matemática, história da ciência e, principalmente, em álgebra linear, sendo esse último em parceria com Mina Carakushansky. Em álgebra linear, conforme revelado pelos próprios autores, buscaram integrar a abstração formal com aplicações práticas:

A motivação principal foi o desejo de dar um tratamento conceitual moderno ao assunto, enfatizando-se a interação em Álgebra Linear das influências geométricas e algébricas e, concomitantemente, dando igual atenção a uma abordagem que visa as aplicações e os métodos de cálculo, responsáveis por uma grande parte do interesse e da importância do assunto. (Carakushansky; La Penha, 1977, p. 7).

O comentário apresentado levou-nos a reflexão sobre as interações entre os aspectos algébricos e geométricos, sobretudo porque, durante a graduação, na disciplina Álgebra Linear, foram apresentadas apenas representações algébricas. Nesse sentido, investigar o papel dessas representações nos livros destes autores mostrou-se uma questão pertinente para aqueles que desejam enveredar nessa área da matemática e se apropriar dessas inter-relações.

Outrossim, La Penha atuou na estruturação da Secretaria de Ciência e Tecnologia do Pará (SECTAM-PARÁ), da Secretaria de Cultura do Estado (SECULT-PARÁ), dirigiu o Museu Paraense Emílio Goeldi (MPEG) e, ao falecer em 6 de fevereiro de 1996, quando exercia o cargo de Diretor de Programas Espaciais da Agência Espacial Brasileira.

Com as lentes voltadas à Mina Seinfeld de Carakushansky, nos apoiamos em Dias (2019) para delinear traços biográficos dessa autora que nasceu em 14 de setembro de 1944, em Dorohoi, na Romênia. Formada em Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), instituição na qual ingressou em 1975. Posteriormente concluiu o mestrado em Administração pela Califórnia American University (EUA). Graduou-se também no curso de Altos Estudos Estratégicos pela antiga Escola de Guerra do Rio de Janeiro, onde foi a primeira mulher a ocupar o cargo de Dirigente de Grupo.

Sua atuação como professora e pesquisadora no IM-UFRJ foi acompanhada de uma produção voltada ao ensino de cálculo e álgebra linear, além de temas relacionados à prevenção e políticas sobre drogas. Segundo Dias e Chaquiam (2020), ela atuou como docente na UFRJ,

integrou o Grupo Interdisciplinar de Estudos em Vitimologia, foi cedida à Polícia Militar do RJ em 1991 e, em 1994, traduziu o livro *Policiamento Comunitário: como começar*. Dentre suas principais obras estão *Felicidade é uma Decisão* e *Drogas-Projeta seu filho*, além dos livros em coautoria *Drogas-el error de despenalizar-legalizar* (2012), *Drogas y Derechos Humanos* (2013) e *Drogas? Atenção!* (2016).

Conforme Dias e Chaquiam (2020), Mina Carakushansky recebeu honrarias, dentre elas o título de Comendadora da Polícia Militar do Rio de Janeiro e a Medalha Pedro Ernesto, além de homenagens em cidades da América Latina. Atualmente, é presidente da ONG Brasileiros Humanotários em Ação (BRAHA) e atua como membro de organizações internacionais, como a World Federation Against Drugs e a Rede Interamericana de Prevenção às drogas (RIPRED).

Ademais, Mina Carakushansky atuou como coautora em diversas obras produzidas por Guilherme de La Penha. Com o propósito de organizar essas publicações, foram selecionados três títulos que abordam conteúdos relacionados à Álgebra Linear, apresentados no Quadro 1. Embora Guilherme de La Penha seja indicado como autor principal, duas dessas obras contam com a coautoria de Mina Carakushansky, evidenciando a relevância da colaboração entre ambos para a produção e a disseminação do conhecimento científico.

Quadro 1 – Livros de Álgebra Linear de Guilherme de La Penha e Mina Carakushansky.

Ano	Título da Obra	Autores
1974	Álgebra Linear I e II	Mina Seinfeld de Carakushansky Guilherme de La Penha
1975	Sinopse de Álgebra Linear	Guilherme de La Penha
1977	Introdução à Álgebra Linear	Mina Seinfeld de Carakushansky Guilherme de La Penha

Fonte: Elaborado pelos autores, 2025.

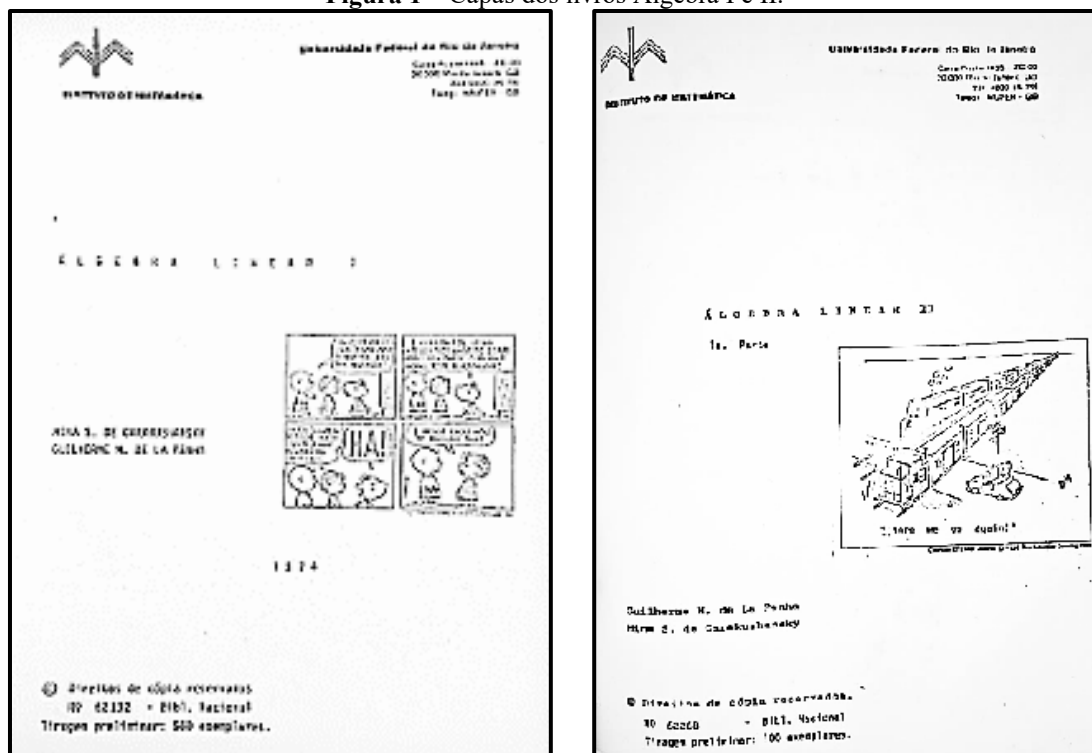
O impacto dessas e outras obras foram além da esfera didática, conforme destaca Dias e Chaquiam (2020). Os livros de La Penha e Caraskushansky foram responsáveis pela formação de diversos estudantes e professores, desempenhando papel central na institucionalização da Álgebra Linear nos currículos universitários brasileiros entre as décadas de 1970 e 1990.

Dessa forma, a seleção dessas obras fundamenta-se em sua relevância histórica, acadêmica e didática, bem como na possibilidade de analisá-las à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, permitindo investigar de que maneira diferentes formas de representação são mobilizadas no ensino de álgebra linear. Após a compreensão das trajetórias acadêmicas de seus autores, torna-se pertinente apresentar uma descrição das obras, evidenciando seus principais elementos constitutivos e ressaltando sua contribuição para o ensino de Álgebra Linear..

3. DESCRIÇÃO DAS OBRAS SELECIONADAS

Nesta seção, são apresentados os livros de Álgebra Linear I e II (1974), Sinopse de Álgebra Linear (1975) e Introdução à Álgebra Linear (1977), de Guilherme de La Penha, com vista a descrever os conteúdos referentes às transformações lineares.

Figura 1 – Capas dos livros Álgebra I e II.



Fonte: Acervo do professor Miguel Chaquiam (2025)

O livro Álgebra Linear I, de Guilherme de La Penha e Mina Carakushansky, publicado em 1974 pela UFRJ, está organizado em cinco capítulos, a saber: Noções de Conjuntos e Vetores, Sistemas de Equações Lineares, Espaços Vetoriais, Transformações Lineares e Introdução à Programação Linear. Antes do primeiro capítulo, os autores propõem um “Capítulo 0”, no qual são apresentadas propriedades básicas de conjuntos e operações com vetores, além de uma introdução ao conceito de espaço vetorial. O conteúdo introduz sistemas de equações lineares e matrizes, abordando procedimentos algébricos e a estrutura matricial.

O segundo capítulo aprofunda espaços vetoriais, destacando subespaços, dependência e independência linear, base, dimensão e isomorfismo. O terceiro trata de transformações lineares, abordando representações matriciais, imagem e núcleo, posto e introdução aos espaços duais. Por fim, o último capítulo trata de forma introdutória noções de programação linear, com uso da teoria dos conjuntos convexos e expando problemas de otimização, o que amplia as conexões entre álgebra linear e aplicações práticas.

O volume Álgebra Linear II, também datado de 1974, funciona como uma continuação direta do primeiro livro e é composto por três capítulos, sendo eles: determinantes, autovalores, autovetores e espaços com produto interno. O capítulo cinco traz um estudo que abrange determinantes desde o ponto de vista algébrico até suas interpretações geométricas, incluindo temas como matrizes adjunta, regra de Cramer e determinantes de Vandermonde. No capítulo seis, os autores abordam os autovalores, autovetores, polinômios característicos, diagonalização e introdução à forma de Jordan.

O capítulo final trata dos espaços com produto interno, abordando ortogonalidade, projeções, matrizes ortogonais e movimentos rígidos, além de introduzir os polinômios de Legendre. Ademais, inclui dois apêndices com explicações sobre as notações Σ e Π , além de um esquema visual elaborado por La Penha, intitulado, Genealogia das estruturas algébricas usuais, que organiza de forma gráfica os principais conceitos estudados.

A seguir, apresentamos a obra Sinopse de Álgebra Linear (1975), que complementa e amplia os conceitos introduzidos anteriormente.

Figura 2 – Capa e Sumário do livro Sinopse de Álgebra Linear.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO TEXTOS DE MÉTODOS MATEMÁTICOS Nº 7 SINOPSE DE ÁLGEBRA LINEAR II (notas de aula) por Guilherme M. de La Penha Rio de Janeiro - GR 1975	ÍNDICE <table> <tr> <th></th><th>PÁG.</th></tr> <tr> <td>Notação</td><td>0</td></tr> <tr> <td>§1. Corpos</td><td>1</td></tr> <tr> <td>§2. Espaço Vetorial</td><td>2</td></tr> <tr> <td>§3. Dependência Linear. Base</td><td>18</td></tr> <tr> <td>§4. Construção de Bases. Dimensão</td><td>24</td></tr> <tr> <td>§5a. Aplicações Lineares. Isomorfismos I</td><td>32</td></tr> <tr> <td>§5b. Aplicações Lineares. Isomorfismos II</td><td>37</td></tr> <tr> <td>§6. Subespaços</td><td>45</td></tr> <tr> <td>§7. Estrutura das Aplicações Lineares</td><td>53</td></tr> <tr> <td>§8. Inversa</td><td>58</td></tr> <tr> <td>§9. Espaço Quociente</td><td>59</td></tr> <tr> <td>§10. Invariância, Redutibilidade, Projeções</td><td>66</td></tr> <tr> <td>§11. Valores e Valores Característicos</td><td>75</td></tr> <tr> <td>Apêndice ao §11: Corpos Algebricamente Fechados</td><td>91</td></tr> <tr> <td>§12. Complexificação</td><td>96</td></tr> <tr> <td>§13. Formas Bilineares</td><td>100</td></tr> <tr> <td>§14. Dualidade</td><td>104</td></tr> <tr> <td>§15. Matrizes</td><td>118</td></tr> <tr> <td>§16. Formas Canônicas de Transformações Lineares</td><td>126</td></tr> <tr> <td>§17. Formas Matriciais Canônicas. Forma de Jordan</td><td>142</td></tr> <tr> <td>Apêndice A - Operações Algébricas</td><td>148</td></tr> <tr> <td>Apêndice B - Genealogia das Estruturas Algébricas Usuais</td><td>169</td></tr> <tr> <td>Bibliografia</td><td>150</td></tr> </table>		PÁG.	Notação	0	§1. Corpos	1	§2. Espaço Vetorial	2	§3. Dependência Linear. Base	18	§4. Construção de Bases. Dimensão	24	§5a. Aplicações Lineares. Isomorfismos I	32	§5b. Aplicações Lineares. Isomorfismos II	37	§6. Subespaços	45	§7. Estrutura das Aplicações Lineares	53	§8. Inversa	58	§9. Espaço Quociente	59	§10. Invariância, Redutibilidade, Projeções	66	§11. Valores e Valores Característicos	75	Apêndice ao §11: Corpos Algebricamente Fechados	91	§12. Complexificação	96	§13. Formas Bilineares	100	§14. Dualidade	104	§15. Matrizes	118	§16. Formas Canônicas de Transformações Lineares	126	§17. Formas Matriciais Canônicas. Forma de Jordan	142	Apêndice A - Operações Algébricas	148	Apêndice B - Genealogia das Estruturas Algébricas Usuais	169	Bibliografia	150
	PÁG.																																																
Notação	0																																																
§1. Corpos	1																																																
§2. Espaço Vetorial	2																																																
§3. Dependência Linear. Base	18																																																
§4. Construção de Bases. Dimensão	24																																																
§5a. Aplicações Lineares. Isomorfismos I	32																																																
§5b. Aplicações Lineares. Isomorfismos II	37																																																
§6. Subespaços	45																																																
§7. Estrutura das Aplicações Lineares	53																																																
§8. Inversa	58																																																
§9. Espaço Quociente	59																																																
§10. Invariância, Redutibilidade, Projeções	66																																																
§11. Valores e Valores Característicos	75																																																
Apêndice ao §11: Corpos Algebricamente Fechados	91																																																
§12. Complexificação	96																																																
§13. Formas Bilineares	100																																																
§14. Dualidade	104																																																
§15. Matrizes	118																																																
§16. Formas Canônicas de Transformações Lineares	126																																																
§17. Formas Matriciais Canônicas. Forma de Jordan	142																																																
Apêndice A - Operações Algébricas	148																																																
Apêndice B - Genealogia das Estruturas Algébricas Usuais	169																																																
Bibliografia	150																																																

Fonte: Acervo do professor Miguel Chaquiam (2025)

A obra intitulada Sinopse de Álgebra Linear, também pela UFRJ, em 1975, sob a autoria de Luiz Medeiros, Guilherme de La Penha e Gustavo Menzala, condensa de forma didática os conteúdos ministrados por La Penha aos estudantes de mestrado do Instituto de Matemática da UFRJ IM-UFRJ) e da Coordenação dos Programas e Pesquisas em Engenharia (COPPE), entre

1970 e 1973. Estruturada em 17 partes, aborda desde fundamentos de notação e espaços vetoriais até valores e vetores característicos, projeções, formas canônicas e a forma de Jordan.

Uma característica marcante da obra é sua proposta de concisão. La Penha, em sua apresentação “Ao leitor”, justifica a ausência de exercícios e exemplos mais detalhados, afirmando que se tratava de uma escolha necessária para manter o texto compacto e ajustado às 36 horas de aula de um período letivo. Algumas demonstrações foram propositalmente deixadas de lado, assumindo a função de exercício ao leitor. Em termos de conteúdo, a obra sacrifica o estudo dos espaços com produto interno para priorizar o conceito de dualidade, o que revela uma escolha metodológica orientada por uma visão algébrica do conteúdo.

Sob o ponto de vista pedagógico, o livro se apresenta como um texto mais voltado para leitores com uma formação prévia na disciplina. Por isso, a obra pode não ser ideal para quem está tendo o primeiro contato com a álgebra linear. Outrossim, o livro contempla apêndices finais onde é apresentada uma genealogia das estruturas algébricas, oferecendo-se ao leitor uma síntese estrutural das conexões entre os conceitos fundamentais da álgebra, enriquecendo ainda mais o valor didático e teórico da obra. Por fim, apresentamos a obra Introdução à Álgebra Linear (1977), de autoria de Guilherme de La Penha e Mina Carakushansky, obra que consolida os conceitos tratados nas publicações anteriores e aprofunda a abordagem e o tratamento das transformações lineares.

Figura 3 – Capa e Sumário do livro Introdução à Álgebra Linear

	SUMÁRIO PREFÁCIO 18 CAPÍTULO I – ÁLGEBRA VETORIAL E GEOMETRIA EM $\mathbb{R}^2$ E $\mathbb{R}^3$ 1. Vetores Geométricos 1 2. Vetores de Coordenadas 14 3. Retas e Planos 29 4. Geometria Euclidiana no Plano e no Espaço 46 CAPÍTULO II – SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES E MATRIZES 1. Sistema de Equações Lineares 65 2. Álgebra de Matrizes 80 3. Matrizes e Sistemas de Equações Lineares 120 4. Apêndice: Fluxogramas 133 CAPÍTULO III – ESPAÇOS VETORIAIS 1. Conceitos Básicos 138 2. Dependência Linear 154 3. Independência Linear 161 4. Bases 168 5. Espaços Vetoriais Isomorfos 182 CAPÍTULO IV – TRANSFORMAÇÕES LINEARES 1. Conceitos Básicos 187 2. Espaço Imagem de uma Transformação Linear 211 3. Núcleo de uma Transformação Linear 218 4. Operações com Transformações Lineares 229 5. Posto de uma Matriz 235 CAPÍTULO V – DETERMINANTES 1. Introdução como uma Função Volume 239 2. Função Determinante 245 3. Transposta e Produto 257 4. Cofatores e Menores 271 5. Regra de Cramer 278 SOLUÇÕES 285 ÍNDICE ANALÍTICO 307
--	--

Fonte: Acervo do professor Miguel Chaquiam (2025)

Essa obra foi publicada pela editora McGraw-Hill do Brasil em 1977, e traz em seu bojo a experiência de Guilherme de La Penha no ensino e na coordenação das disciplinas de Álgebra I e II, adicionado as contribuições de Mina Carakushansky, fatos que levaram essa publicação ao reconhecimento da além das fronteiras brasileiras, sendo traduzida para o espanhol e adotada em universidades da América Latina, a exemplo da Colômbia, sob o título *Introducción al Álgebra Linear*.

No prefácio, os autores apresentam os objetivos centrais do livro e os pressupostos adotados em sua organização. Como a álgebra linear representava uma novidade nesse período para muitos alunos, o texto buscou enfatizar os cálculos e as interpretações geométricas nos espaços $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, de modo a facilitar a compreensão dos conceitos abstratos. Os autores mantêm o apelo geométrico do conteúdo para suavizar a abstração. Tratam determinantes de forma concisa, focando em conceitos que favoreçam generalizações.

O livro é organizado em cinco capítulos: o primeiro trata da álgebra vetorial e da geometria em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, incluindo vetores, retas, planos e elementos da geometria euclidiana; o segundo aborda os sistemas de equações lineares e matrizes, discutindo suas propriedades e aplicações; o terceiro apresenta espaços vetoriais, dependência e independência linear, bases e isomorfismos; o quarto dedica-se às transformações lineares, enfatizando imagem, núcleo, operações e posto; o quinto capítulo estuda os determinantes, desde sua interpretação como volume até cofatores, menores, transposta, produto e a regra de Cramer. Diante do exposto, optou-se por focar na obra em questão por ser, nas palavras de La Penha e Mina Carakushansky, acessível ao leitor, considerando que o público-alvo são alunos em transição do ensino médio para o ensino superior, fatos que nos levaram a análise apresentada a seguir.

4. TRANSFORMAÇÕES LINEARES EM INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA LINEAR, 1977

Nesta seção apresentamos as transformações lineares conforme consta em *Introdução à Álgebra Linear* (1977), ressaltando as representações algébrica, geométrica, matricial e numérica. Nessa obra as transformações lineares são iniciadas com a apresentação da definição formal, fundamentada em duas condições, TL_1 e TL_2 :

Sejam v e w espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Uma aplicação $T: v \rightarrow w$ é dita uma *transformação linear* de v em w , se satisfizer as condições:

(TL_1) $T(V_1 + V_2) = T(V_1) + T(V_2)$, $\forall V_1$ e $V_2 \in v$ (T “preserva” a adição).

(TL_2) $T(\alpha V) = \alpha(TV)$, $\forall V \in v$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ (T “preserva” a multiplicação por escalar).
(Carakushansky; La Penha, 1977, p. 187).

Observa-se nessa definição que o tratamento dado foi algébrico e na sequência, ressalta que os vetores $V_1 + V_2$ e αV pertencem ao espaço vetorial v , enquanto que $T(V_1 + V_2)$ e $\alpha(TV)$ pertencem ao espaço vetorial w . Embora isso esteja na definição, muitos leitores não percebem que as duas primeiras operações ocorrem no espaço v e as duas últimas no espaço w . Os dois primeiros exemplos são bastante simples, visto que envolve a transformação *identidade* e a transformação *nula*, com as respectivas provas de que são transformações lineares. Entende-se que a opção de iniciar por essas duas transformações deve-se ao fato de que o leitor possua alguma familiaridade a respeito da função *identidade* e função identicamente *nula*, temas abordados desde o ensino médio. Esses autores apresentam explicitamente exemplos de aplicações de $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}^2$, como $T[x_1, x_2] = [x_1, 5x_2]$, e demonstram passo a passo a verificação das condições (TL₁) e (TL₂), expostas a seguir:

$$\begin{aligned}
 \text{(TL}_1\text{)} \quad T([x_1, x_2] + [y_1, y_2]) &= [x_1 + y_1, x_2 + y_2] \\
 &= [(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2), 5(x_2 + y_2)] && \text{(Pela definição de } T\text{)} \\
 &= [(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), 5x_2 + 5y_2] && \text{(Por propriedade de } \mathbb{R}\text{)} \\
 &= [x_1 + x_2, 5x_2] + [y_1, y_2, 5y_2] && \text{(Pela definição de soma em } \mathbb{R}^2\text{)} \\
 &= T[x_1, x_2] + T[y_1, y_2] && \text{(Pela definição de } T\text{)} \\
 \text{(TL}_2\text{)} \quad T(\alpha[x_1, x_2]) &= T[\alpha x_1, \alpha x_2] && \text{(Pela definição de multiplicação escalar em } \mathbb{R}^2\text{)} \\
 &= [\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha 5x_2] && \text{(Pela definição em } T\text{)} \\
 &= [\alpha(x_1 + \alpha x_2), \alpha 5x_2] && \text{(Por propriedade de } \mathbb{R}\text{)} \\
 &= \alpha[x_1 + \alpha x_2, 5x_2] && \text{(Pela definição de multiplicação escalar em } \mathbb{R}^2\text{)} \\
 &= \alpha T[x_1 + x_2] && \text{(Pela definição de } T\text{)}
 \end{aligned}$$

Esses procedimentos auxiliam tanto na manipulação quanto na compreensão inicial das propriedades. Os autores também apresentam exemplos em $\mathbb{R}^n$. Nesse ponto, o registro passa a ser matricial, em que a transformação linear é representada por meio da multiplicação de uma matriz $A_{m \times n}$ e o vetor $u_{n \times 1}$ também na forma matricial, resultando em um vetor $v_{m \times 1}$, também representado na forma matricial, ou seja, dada uma matriz $A_{m \times n}$ e um vetor $u = [x_1, \dots, x_n]^t$, a multiplicação $A \cdot u$ gera um novo vetor $v = [y_1, \dots, y_m]^t$. Seguidamente, os autores apresentam exemplo para caracterizar a transformação $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por meio da representação matricial, cabendo ao leitor provar que essa transformação dada é uma transformação linear.

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \\ 2x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

Na sequência, concluem que ela também pode ser representada algebricamente por $T[x_1, x_2, x_3] = [2x_1 - x_2 + 3x_3, 2x_2 + x_3]$. Evidencia-se de forma clara a passagem do registro

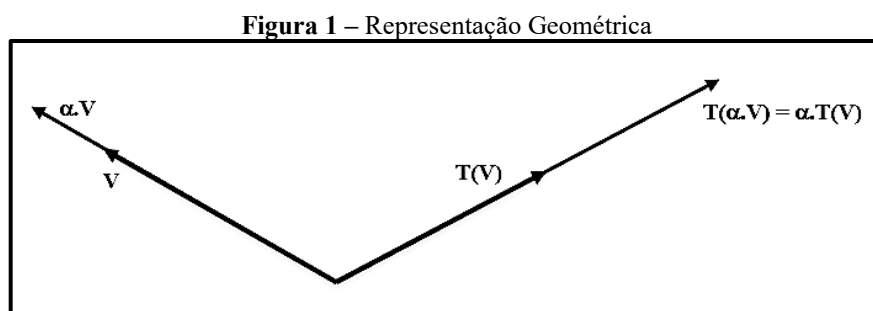
matricial para o algébrico, fato que nos permite calcular explicitamente a imagem de um vetor sob a transformação. Ademais, fica evidente que toda matriz pode representar uma transformação. Seguidamente, expande o conceito de transformação linear ao espaço vetorial das matrizes de ordem $m \times n$, cujos elementos são números reais, ou seja, nesse caso as matrizes são vetores no citado espaço vetorial das matrizes. A exemplo, consideram a transformação $T[A] = A^t$, que representa a transposta de uma matriz $A_{m \times n}$ é uma matriz de ordem $n \times m$, ou seja, T é uma aplicação de $M_{m \times n}$ em $M_{n \times m}$. Para mostrar que a transformação é uma transformação linear, deve-se considerar que as matrizes A e B são de ordem $m \times n$, e o escalar α real, assim:

$$\begin{aligned} T(A + B) &= (A + B)^t && \text{(Pela definição de } T) \\ &= A^t + B^t && \text{(Propriedade de transposta)} \\ &= T(A) + T(B) && \text{(Pela definição de } T) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T(\alpha A) &= (\alpha A)^t && \text{(Pela definição de } T) \\ &= \alpha \cdot A^t && \text{(Propriedade de transposta)} \\ &= \alpha \cdot T(A) && \text{(Pela definição de } T) \end{aligned}$$

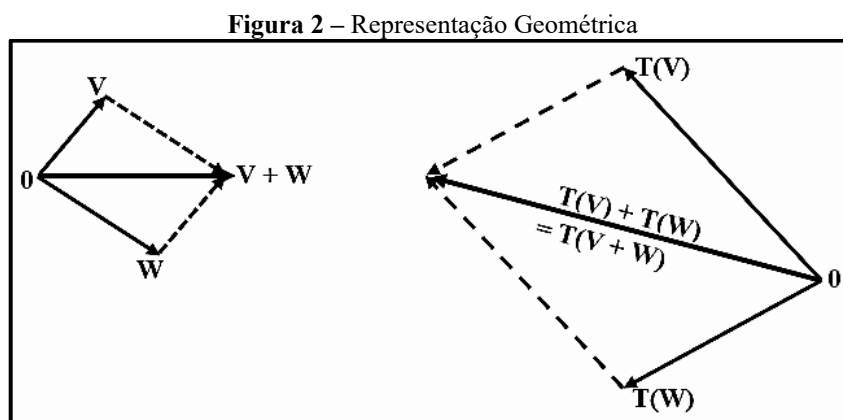
Logo, La Penha e Carakushansky, partem de exemplos simples em $\mathbb{R}^2$, passam à generalização para $\mathbb{R}^n$ por meio de matrizes e depois retomam casos particulares como de $\mathbb{R}^3$ para $\mathbb{R}^2$, embora mais complexos que os iniciais, permanecem acessíveis ao leitor. Em relação ao tratamento geométrico, destaca-se a análise da propriedade $T(\alpha V) = \alpha(TV)$, isto é, a transformação linear preserva direção e proporcionalidade, reforçando a intuição de linearidade por meio de representações gráficas. Exemplos de simetria e reflexão articulam o formalismo algébrico à geometria do plano, conforme a Figura 1.



Fonte: Reproduzido a partir de Carakushansky; La Penha, 1977, p. 190.

Em seguida, os autores apresentam a segunda propriedade deste mesmo exemplo: $T(V + W) = T(V) + T(W)$. Nesta perspectiva, considera dois vetores V e W , partido da origem, e mostra que a transformação da soma dos dois vetores coincide com a soma das imagens de

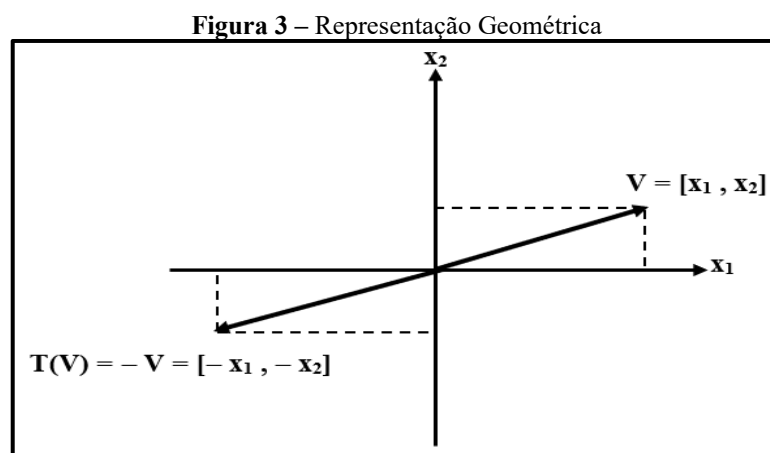
cada um. Geometricamente, isso significa que o paralelogramo formado por V e W no plano é preservado após a aplicação, reforçando o caráter linear da transformação, conforme Figura 2.



Fonte: Reproduzido a partir de Carakushansky; La Penha, 1977, p. 191.

A partir da Figura 1 é possível observar que os vetores V e αV , assim como os vetores $T(V)$ e $\alpha T(V)$, possuem mesma direção e sentido. Ademais, evidencia que a transformação aplicada ao vetor αV resulta o vetor $T(\alpha V)$, que coincide com o vetor $\alpha(TV)$, em outras palavras pode ser representada por $T(\alpha V) = \alpha(TV)$. A partir da aplicação da regra do paralelogramo é visível na Figura 2 que a transformação aplicada na soma dos vetores V e W , $T(V + W)$, coincide com a soma das transformações dos vetor V com o vetor W , ou seja, com a soma dos vetores $T(V)$ e $T(W)$, $T(V) + T(W)$, representado por $T(V + W) = T(V) + T(W)$.

Desse modo, mostram que as figuras geométricas reforçam visualmente a ação da transformação. Para ilustrar esses conceitos, os autores recorrem a exemplos práticos no espaço $\mathbb{R}^2$. Um dos casos apresentados é o da simetria em relação à origem, dada por $T(V) = -V$. Nesse exemplo, se um vetor v aponta para uma direção, sua imagem $-V$ aponta para a direção oposta. Trata-se de uma reflexão central: o vetor e sua imagem em ficam lados opostos do plano, de modo simétrico em relação à origem, conforme ilustrado na Figura 3.

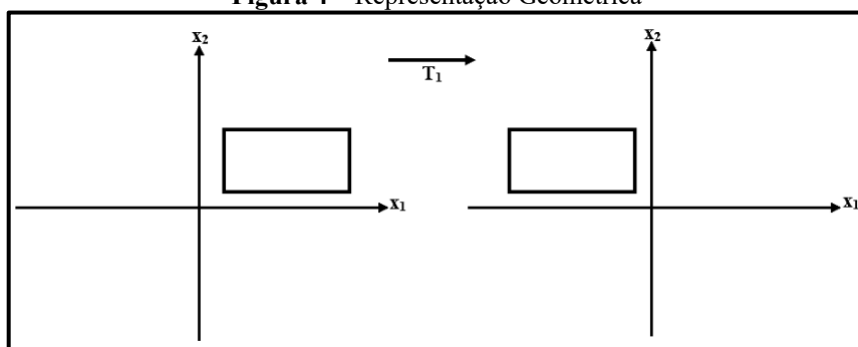


Fonte: Reproduzido a partir de Carakushansky; La Penha, 1977, p. 191.

Logo em seguida, os autores apresentam a reflexão em relação ao eixo x por meio de duas matrizes, $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, para demonstrar como um retângulo pode ser modificado no plano cartesiano após a aplicação da transformação, por exemplo, tomando $u = (x, y) \in \mathbb{R}$, temos: $[T_1]u = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} = [-x, y] = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$. Logo, $T_1(x, y) = (-x, y)$.

Nesta perspectiva, ao aplicar a transformação no retângulo, sua posição dentro do plano é modificada, evidenciando geometricamente o efeito da reflexão, ilustrada na Figura 4, reflexão que ocorre em torno do eixo da ordenadas, com a mudança retângulo do primeiro para o segundo quadrante.

Figura 4 – Representação Geométrica

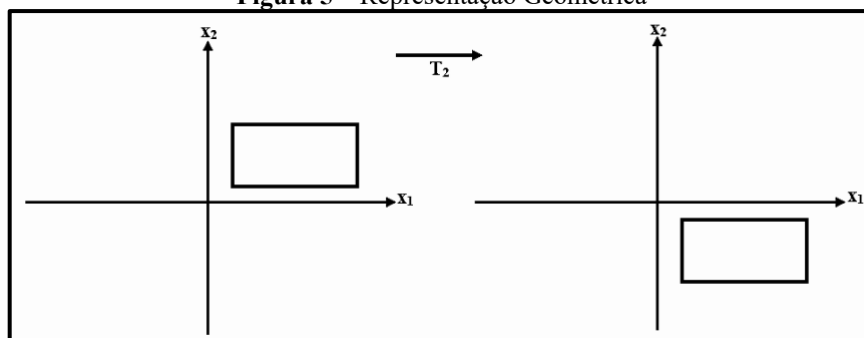


Fonte: Reproduzido a partir de Carakushansky; La Penha, 1977, p. 193.

Neste caso, o leitor deve iniciar com a aplicação da segunda matriz, pois ela completa as demais, conforme registrado na figura 5. Nesta matriz é possível perceber a modificação do retângulo refletido em torno do eixo das abscissas, ou seja:

$$[T_2]u = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = [x, -y] = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}. \text{ Logo, } T_2(x, y) = (x, -y).$$

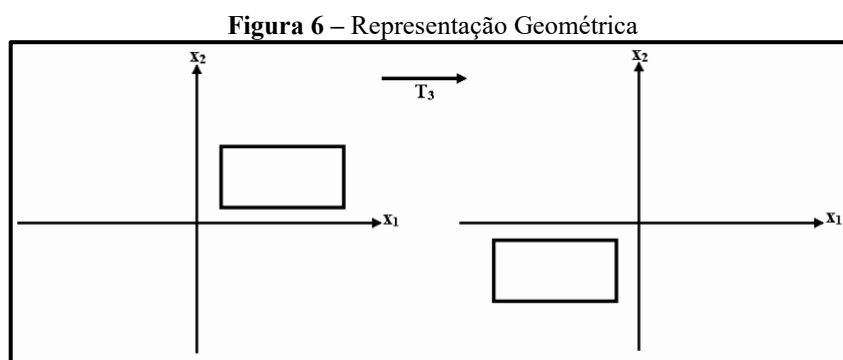
Figura 5 – Representação Geométrica



Fonte: Reproduzido a partir de Carakushansky; La Penha, 1977, p. 193.

Para consolidar e ampliar o entendimento da transformação linear representada geometricamente, os autores apresentam uma terceira matriz. Conforme observada na figura 6, essa modificação também ocorre. Dada a matriz $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, temos:

$$[T_3]u = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix} = [-y, -x] = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}. \text{ Logo, } T_3(x,y) = (-y, -x).$$



Fonte: Reproduzido a partir de Carakushansky; La Penha, 1977, p. 194

O movimento do retângulo na Figura 6 pode ser entendido de duas formas, a primeira, como dois movimentos de reflexão, ou seja, a partir do primeiro quadrante faz uma reflexão em torno do eixo das abscissas e, em seguida, uma reflexão em torno do eixo das ordenadas, numa composição de movimentos. A segunda, não tratada pelos autores, seria uma reflexão em torno da reta bissetriz dos quadrantes pares. A partir desses exemplos é possível perceber que os fazem uso da representação matricial, abordam a forma algébrica, ilustram geometricamente e, posteriormente, evidenciam a transformação em cada uma dessas representações.

Em seguida, desenvolvem a discussão sobre transformações lineares a partir da base canônica i, j, k , considerando o vetor $v = [x, y, z] = x[1, 0, 0] + y[0, 1, 0] + z[0, 0, 1]$. Dessa forma, eles mostram outra representação, que consiste em um pré-requisito: a decomposição de um vetor em função da base canônica. A partir disso, aplica-se T . O que T faz? Trata-se de uma transformação que atua sobre os vetores da base e os transforma em novos elementos. Os autores apresentam os cálculos e, assim, fornecem uma nova abordagem. É deixado ao leitor uma questão numérica de $T: \mathbb{R}^3 \text{ em } \mathbb{R}^3$, em que a representação algébrica não é dada de imediato.

O procedimento inicia-se pela ação de T sobre a base canônica (i, j, k) , pois, ao reconhecer que atuação ocorre nos vetores básicos, torna-se possível determinar a transformação de qualquer vetor decomposto nessa base. Assim, um vetor $u = (x, y, z)$, escrito como combinação linear $x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$, tem sua imagem calculada a partir das transformações apresentadas para cada vetor da base. Prosseguindo dessa forma, tem-se que $T(u) = T(x, y, z) = T[x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)]$, que após aplicação das devidas propriedades resulta em $T(u) = xT(1, 0, 0) + yT(0, 1, 0) + zT(0, 0, 1)$. Visto que está disponibilizado no texto as imagens da base canônica, ou seja, $T(1, 0, 0) = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$;

$T(0, 1, 0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$; $T(0, 0, 1) = (1, -1, 0)$. Substituindo na expressão, obtém-se:
 $T(u) = x\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 0\right) + y\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) + z(1, -1, 0)$. Assim, $T(u) = \left(\frac{5x}{2} - \frac{y}{2} + z, \frac{3x}{2} + \frac{y}{2} - z, 0\right)$.

Mais adiante, os autores apresentam contraexemplos que também preservam a mesma ideia e, em seguida, propõem “atividades propostas” relacionadas às transformações lineares, envolvendo diferentes representações, algébrica, gráfica e numérica, para evidenciar a ação da transformação por matrizes, imagens geométricas e aplicações em pontos. Essas abordagens permitem ao estudante compreender o conceito tanto em sua estrutura formal quanto em sua interpretação visual e prática.

As análises mostram que cada representação contribui de forma complementar para as diferentes formas de registros e representações de transformações lineares. A representação algébrica evidencia as propriedades de linearidade e fortalece o raciocínio lógico e a compreensão formal da álgebra linear. Ao perceber graficamente a preservação de paralelismos, direções e proporções, o estudante relaciona o formalismo algébrico a uma percepção visual concreta e numérica. Essa articulação entre registros pode favorecer a compreensão do conceito tanto no plano abstrato quanto no intuitivo.

A representação matricial reforça essa compreensão ao mostrar por meio da multiplicação matriz-vetor e como cada elemento da matriz interfere nas componentes da imagem do vetor transformado. Essa representação também facilita a passagem entre os registros algébrico e geométrico, reforçando o caráter estrutural e visual da linearidade.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os argumentos que respondem à questão norteadora – Que representações de transformações lineares constam no livro *Introdução à Álgebra Linear* (1977), de Guilherme de La Penha e Mina Carakushansky, segundo a Teoria dos Registros de Representações Semiótica de Duval (2003), podem contribuir positivamente para percepção desse objeto matemático?, são apresentados a seguir, acompanhados das considerações gerais a respeito da investigação realizada. A análise mostrou que a questão foi respondida e objetivos contemplados, visto que foi possível identificar e caracterizar os registros e representações na obra, fato que corrobora positivamente em relação a apresentação das transformações lineares, principalmente no que tange a articulação entre as representações desse objeto matemático.

De outro lado, a análise também evidenciou que transformações lineares apresentadas por meio de registros algébricos, geométricos e numéricos, articulados com formas matriciais, em diferentes níveis de formalização, podem contribuir para seu entendimento. EM consonância com a seção 4, essa variedade está alinhada à TRRS e reforça a importância de realizar tratamentos e conversões entre registros de modo a favorecer a compreensão do objeto matemático.

A análise dos conteúdos relacionados às transformações lineares possibilitou a ampliação e compreensão do ponto de vista conceitual e contribuiu no sentido de relacionar aspectos entre diferentes registros e representações. Simultaneamente, o contato com a TRRS permitiu refletir sobre as práticas de ensino, reforçando a importância de manipular e articular entre diferentes tipos de representações, alcançando assim o aprendizado.

A obra Introdução à Álgebra Linear evidencia a relevância do tratamento e da conversão entre registros para a compreensão do objeto matemático. Dessa forma, o estudo auxilia na formação de profissionais mais atentos às demandas cognitivas dos conteúdos abstratos e à escolha de materiais didáticos que favoreçam a compreensão.

O artigo pode contribuir à formação inicial de professores ao destacar a importância das diferentes registros e representações das transformações lineares no processo de ensino da Álgebra Linear, não obstante, essas ideias podem ser transladadas para o ensino de outros conteúdos matemáticos.

De outro lado, a realização deste estudo ampliou e consolidou os conteúdos matemáticos abordados, especificamente, as transformações lineares em álgebra linear. Ademais, a formação pedagógica é favorecida quando se observa a importância de se fazer uso de diversos registros e representações no processo de ensino de objetos matemáticos. A proposta de articular transformações lineares e essa perspectiva teórica, Duval (2003), evidenciou que as dificuldades não estão no conteúdo, necessariamente, mas habilidade de efetuar e articular essas mudanças na apresentação dos conteúdos matemáticos.

Poucos foram os obstáculos no decorrer da pesquisa, visto que o livro Introdução à Álgebra Linear é de fácil acesso. Como desdobramentos, este estudo reforça a possibilidade de ampliar as análises em relação aos registros e representações de conteúdos da álgebra linear por meio da TRRS, tendo-se em vista favorecer a compreensão dos alunos. Além disso, o trabalho possibilita ao leitor conhecer as obras dos autores e se apropriar da TRRS.

Por fim, considera-se que a análise das obras de Guilherme de La Penha e Mina Carakushansky possibilitou conhecer um pouco mais a visão e posicionamento desses autores quanto a apresentação e o ensino de álgebra linear, em especial sobre os objetos matemáticos

supracitados, assim como o fazer desses professores nesse período investigado e, dessa forma, contribuir à constituição de acervos documentais ao patrimônio educacional brasileiro.

REFERÊNCIAS

- Assis, A. M. M. *Formação do conceito de transformação linear de acordo com os pressupostos de Davydov*. Revista Educação Matemática e Pesquisa, São Paulo, v.21, n.3, pp. 438-463, 2019.
- Bauer, M. W; Gaskell, G. (2008). *Pesquisa qualitativa com texto, imagem e som: Um manual prático*. (7ª ed.). Petrópolis, Brasil: Vozes.
- Carakushansky, M. S & La Penha, G. M. S. M. (1974). *Álgebra Linear I e II* (1ª ed.). Rio de Janeiro, Brasil: UFRJ.
- Carakushansky, M. S & La Penha, G. M. S. M. (1977). *Introdução à Álgebra Linear*. (1ª ed.). Rio de Janeiro, Brasil: McGraw-Hill.
- Cardoso, V. C. (2014). *Ensino e aprendizagem de álgebra linear: Uma discussão acerca de aulas tradicionais, reversas e de vídeos digitais*. [Tese de Doutorado em Ciências e Ensino de Matemática, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, Brasil].
- Chaquiam, M. (2012). *Guilherme de La Penha: Uma história do seu itinerário intelectual em três dimensões*. [Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, Brasil].
- Creswell, J. W. (2007). *Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto*. Tradução de Luciana de Oliveira da Rocha. (2ª ed.). Porto Alegre, Brasil: Artmed.
- Da Silva, R. S.; Basso, M. V. A. *Independência Linear e Transformações Lineares: A organização de conceitos e saberes por alunos de administração, economia e engenharia*. Anais Conferência: 6º Salão de Ensino da UFRGS. Rio Grande do Sul: EdUFRGS, 2010.
- D'Amore, B; Pinilla, M. I. F. & Iori, M. (2015). Primeiros elementos da semiótica: sua presença e sua importância do processo de ensino-aprendizagem da matemática. Tradução: Maria Cristina Bonomi. (1ª ed.). São Paulo, Brasil: Editora Livraria da Física.
- Dias, R. M. da C. & Chaquiam, M. (2020). *A álgebra linear no Brasil da década de 1970: Um estudo esteado em livros didáticos*. Histemat–Revista de História da Educação Matemática, 6(1), p. 196-219.
- Dias, R. M. da C. (2019). *Sobre os livros de álgebra linear do Cientista Paraense Guilherme de La Penha*. [Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Federal do Pará, Belém, Brasil].
- Duval, R. (2003). *Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática*. In: Machado, S. D. A. Aprendizagem em Matemática: Registros e representações semióticas. Campinas: Papirus, p. 11-33.
- Furtado, A. L. C.; Cabral, M. A. P. *Aprendizagem de conceitos da álgebra linear*. In: Conferência Interamericana de Educação Matemática, XIII. 2011, Recife. Anais do XIII CIEM. Recife, 2011.