

Revista de História da Educação Matemática

HISTEMAT

ISSN: 2447-6447

Submetido: 31/03/2026

Aprovado: 25/06/2026

 <https://doi.org/10.62246/HISTEMAT.2447-6447.2026.12.820>



HISTORIA DE UN ÁNGULO NATURAL: el radián entre la teoría, enseñanza y práctica

HISTÓRIA DE UM ÂNGULO NATURAL: o radiano entre teoria, ensino e prática

Alberto Camacho Ríos¹

Tecnológico Nacional de México (TecNM Chihuahua II)

alberto.cr@chihuahua2.tecnm.mx

 Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-0685-4723>

Diana del Carmen Torres-Corrales²

Instituto Tecnológico de Sonora (ITSON)

diana.torres@itson.edu.mx

 Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-0057-5336>

Jesús Eduardo Hinojos-Ramos³

Instituto Tecnológico de Sonora (ITSON)

jesus.hinojos@itson.edu.mx

 Orcid: <https://orcid.org/0000-0003-3276-0322>

¹ Doctor en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (Cinvestav IPN). Profesor-investigador del Tecnológico Nacional de México, campus Chihuahua II, Chihuahua, México. Avenida de las Industrias 11101, Complejo Industrial Chihuahua, CP 31130. E-mail institucional: alberto.cr@chihuahua2.tecnm.mx.

² Doctora en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (Cinvestav IPN). Profesora auxiliar del Instituto Tecnológico de Sonora (ITSON) y profesora de asignatura en modalidad virtual de la Universidad Autónoma de Querétaro (UAQ), México. Antonio Caso S/N, Colonia Villa ITSON. CP 85130, Unidad Obregón, Campus Náinari. E-mail institucional: diana.torres@itson.edu.mx.

³ Doctor en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (Cinvestav IPN). Profesora auxiliar del Instituto Tecnológico de Sonora (ITSON) y profesor de asignatura en modalidad virtual de la Universidad Autónoma de Querétaro (UAQ), México. Antonio Caso S/N, Colonia Villa ITSON. CP 85130, Unidad Obregón, Campus Náinari. E-mail institucional: jesus.hinojos@itson.edu.mx.

RESUMEN

El presente trabajo analiza la evolución histórica del radián desde finales del siglo XVII hasta mediados del siglo XX, enfatizando su papel como herramienta operativa antes de consolidarse como definición en 1873 con James Thomson. A partir del estudio de fuentes científicas y didácticas, se muestra cómo Isaac Newton empleó implícitamente el radián en los *Principia* para resolver la conocida ecuación de Kepler, utilizando aproximaciones como $\text{sen}(x) \approx x$, válidas únicamente en radianes. Posteriormente, autores como Lacroix y Lefebure de Fourcy validaron el uso de arcos pequeños y series de potencias para aproximar valores trigonométricos, estableciendo la noción de radián en *partes del radio*. En el siglo XIX, el radián se consolidó en la práctica de la astronomía, la geodesia y la topografía: Chauvenet lo aplicó en la corrección de observaciones astronómicas; Díaz Covarrubias lo empleó para resolver problemas de coherencia de unidades en geodesia. El estudio concluye que, por alrededor de cuatro siglos, el radián circuló como un conocimiento tácito y utilitario en las ciencias aplicadas y en la enseñanza de la trigonometría, antes de utilizar la forma que hoy reconocemos. En términos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), se ponen de manifiesto los efectos transpositivos del radián, cuyo tránsito entre instituciones científicas y educativas transformó su estatus de herramienta práctica a definición conceptual.

Palabras clave: Trigonometría. Cálculo. Astronomía. Transposición Didáctica. Enseñanza de las Matemáticas.

RESUMO

Este artigo analisa a evolução histórica do radiano desde o final do século XVII até meados do século XX, enfatizando seu papel como ferramenta operacional antes de sua definição formal ter sido estabelecida em 1873 por James Thomson. Com base em um estudo de fontes científicas e educacionais, mostra como Isaac Newton empregou implícitamente o radiano no *Principia* para resolver a equação de Kepler, usando aproximações como $\text{sen}(x) \approx x$, válidas apenas em radianos. Posteriormente, autores como Lacroix e Lefebure de Fourcy validaram o uso de pequenos arcos e séries de potências para aproximar valores trigonométricos, estabelecendo a noção de radiano em *partes do raio*. No século XIX, o radiano se consolidou na prática da astronomia, geodesia e topografia: Chauvenet o aplicou na correção de observações astronômicas; Díaz Covarrubias utilizou-o para resolver problemas de consistência de unidades em geodesia. O estudo conclui que, durante aproximadamente quatro séculos, o radiano circulou como conhecimento tácito e utilitário nas ciências aplicadas e no ensino da trigonometria, antes de adquirir a forma abstrata e formal que reconhecemos hoje. Em termos da Teoria Antropológica da Didática (TAD), os efeitos transpositivos do radiano são evidentes, com sua circulação entre instituições científicas e educacionais transformando seu status de ferramenta prática em definição conceitual.

Palavras-chave: Trigonometria. Cálculo. Astronomia. Transposição Didática. Ensino da Matemática.

INTRODUCCIÓN

La historia de las matemáticas y su enseñanza ha estado marcada por procesos de construcción, transmisión y resignificación de conceptos, cuya evolución no solo responde a necesidades internas de la matemática como disciplina, sino también a los contextos culturales, sociales y científicos en los que dichos conceptos se desarrollan. En este marco, resulta fundamental analizar la forma en que ciertos conceptos matemáticos han transitado entre distintos ámbitos institucionales —como la ciencia aplicada, la enseñanza y la práctica profesional— transformando su disposición epistemológica, de uso y didáctica.

El presente trabajo se centra en el estudio histórico y didáctico del radián, unidad de medida angular cuya utilidad moderna se atribuye a James Thomson (1822-1892) en 1873 (Thomson, 1910; Cooper, 1992), pero que ya circulaba de manera institucional en obras científicas y didácticas desde al menos el siglo XVII (Figura 1). Lejos de emerger de manera súbita como una definición incierta, el radián tuvo una trayectoria previa caracterizada por su uso instrumental en la astronomía, la geodesia y la trigonometría, donde se aplicaron aproximaciones como $\text{sen } x \approx x$ y desarrollos en series de potencias válidos únicamente en radianes.

Figura 1 — Representación gráfica de la definición de un radián



Fuente: elaboración propia con ChatGPT versión 4

A partir de fuentes históricas de conocimiento (entre ellas, los *Principia* y *De Analysis* de Isaac Newton (1686, 1711), los tratados matemáticos de S.F Lacroix (1799 y 1807) y Lefébure de Fourcy (1836 y 1881), así como manuales de enseñanza de los siglos XIX y XX) se explora cómo el radián se constituyó primero como un conocimiento tácito, empleado de manera operativa para resolver problemas prácticos, antes de consolidarse como una definición en el marco de la matemática moderna.

En el contexto de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), los documentos citados se interpretan como *instituciones* portadoras de conocimientos matemáticos que se manifiestan en distintos niveles epistemológicos y se transforman al ser transferidos de un área de la ciencia a otra. Este tránsito permite identificar los cambios que el concepto de radián

adquiere al pasar de una institución a otra, reconocidos en la TAD como *efectos transpositivos* (Castela, 2009; Castela & Romo-Vázquez, 2011), que acompañaron su evolución de herramienta de uso práctico a objeto de enseñanza, poniendo de relieve las tensiones entre tradición, innovación y resistencia epistemológica. Tales tensiones se hacen visibles en entornos institucionales donde las actividades matemáticas transitan de lo empírico hacia lo formal (Bosch & Chevallard, 1999), constituyéndose en *praxeologías matemáticas*, de contenido $[T, \tau, \theta, \Theta]$, (T : tareas, τ : técnicas, θ : tecnologías y Θ : teorías) en el sentido de Chevallard (2007).

El análisis que aquí se presenta busca, en consecuencia, aportar una reflexión crítica a la historia y didáctica de las matemáticas sobre cómo un concepto aparentemente *neutro* y *trivial* encarna procesos de construcción social y cultural más amplios, al mismo tiempo que se constituye como un ejemplo paradigmático de la forma en que los saberes científicos se integran, transforman y subsisten en la enseñanza de la matemática, a través de la pregunta: ¿qué aporta la historia del radián a la enseñanza actual de la trigonometría?

El artículo se organiza de la siguiente manera: en primer lugar, se presentan los antecedentes históricos que permiten rastrear el uso implícito del radián en la obra de Isaac Newton (1643-1727) y en otros autores de los siglos XVII al XVIII. Posteriormente, se analiza la manera en que manuales y tratados de trigonometría plana y esférica incorporaron, con diversas resistencias, la noción de radián en el marco de la enseñanza de la matemática escolar. A continuación, se discute el uso poco conocido de la unidad en el siglo XIX, así como sus implicaciones en la práctica de disciplinas como la astronomía, la topografía y la geodesia. Además, se plantean las conclusiones del estudio, destacando el papel del radián como un objeto de enseñanza que ilustra con claridad efectos de transposición didáctica (Chevallard, 2007), experimentados al confrontar sus usos actuales con aquellos propios de su génesis histórica (Torres-Corrales & Montiel, 2020).

1. EL RADIÁN EN LA OBRA DE NEWTON

Isaac Newton utilizó implícitamente el concepto que hoy llamamos radián en la obra latina *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, publicada por primera vez en 1686. Aunque no usó el término *radián* ni lo definió formalmente, es claro que recurrió a esta idea para resolver varios problemas de astronomía.

En el Libro I (Sección 6, Proposición 31, Problema XXIII, Escolio), Newton (1686) se enfrenta al siguiente problema que llamaremos *ecuación de Kepler*, el cual es revelado en una carta a Henry Oldenburg el 13 de junio de 1676: “dada una órbita elíptica y un tiempo

transcurrido, encontrar la posición del planeta sobre la elipse”, lo cual en la matemática actual se escribe como:

$$M = E - e \cdot \text{sen}(E)$$

Donde se conocen:

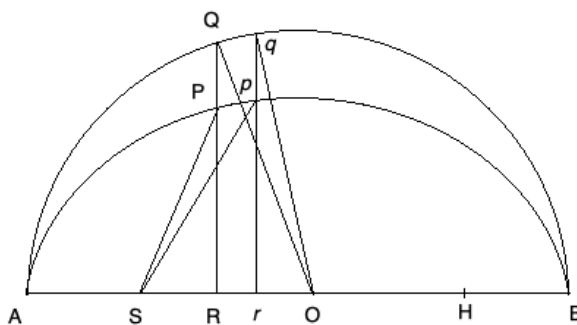
- M : anomalía media (ángulo proporcional al tiempo)
- e : excentricidad (achatamiento de la elipse)

Y se busca el ángulo:

- $E = p$: anomalía excéntrica (ver Figura 2)

Dicho problema no se resuelve de manera determinística, solo aproximando la variable E . No obstante, puesto que E es un ángulo sexagesimal, en la expresión anterior se presenta un problema de coherencia de unidades. En este contexto, Newton introdujo un ángulo de 57.29578° , es decir, el ángulo que subtiende un arco cuya longitud es igual al radio, magnitud que corresponde naturalmente al radián actual, aunque esto último no lo menciona. Supuso que dicha magnitud angular había sido recorrida por el planeta sobre la elipse APB, barriendo el área AOQ; de este modo, fijó la posición inicial en $P = M = 57.29578^\circ$, asegurando un desplazamiento inicial E_0 de un radián y situando al planeta sobre el círculo trigonométrico AQB. Esta construcción geométrica garantiza la traslación del valor angular al sistema circular.

Figura 2 — Movimiento del cuerpo P sobre la elipse APB



Fuente: elaboración propia con Paintbrush, con base en Newton (1686, p. 112)

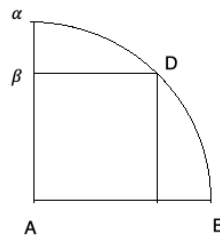
En este escenario, el planeta oscila en un entorno infinitesimal entre la elipse y el círculo en la búsqueda de su posición final, la cual corresponde a la raíz $E = p$. Para determinar dicha posición, Newton anticipó lo que hoy se reconoce como método de Newton–Raphson, mediante el cual se encapsula la posición real del planeta en p a través de las iteraciones sucesivas $E, G, I, \dots$, descritas en el *Escolio* (Newton, 1686, pp. 111–113). Este método se emplea en un contexto geométrico y aritmético notablemente elemental, en el que ya se vislumbran las coyunturas fundamentales del cálculo diferencial tal como se entiende en su formulación moderna (Ypma, 1995, pp. 544–545). Debemos destacar que el uso de infinitamente pequeños no corresponde a una invención de Newton, puesto que Fermat en su obra *Linearum curvarum Cum lineis rectis*,

comparatione dissertatio geométrica los utilizó para la rectificación de parábolas semi-cúbicas (Hinojos-Ramos et al, 2023).

Este uso deliberado del *ángulo radián* en la resolución del problema, es especialmente interesante porque Newton no lo define, simplemente lo usa. Lo considera como algo conocido, como una herramienta más de su repertorio geométrico-algebraico (Dunlop, 2012, Newton, 1671, 2001). Esto sugiere que, para Newton, el radián era un conocimiento plenamente instituido desde tiempo atrás.

En el *De Analysi*, una de sus obras escrita en 1669 y publicada en 1711, Newton establece explícitamente la determinación del arco $z = \alpha D$ (Figura 3) de un círculo en función del seno y del seno en función del arco mediante desarrollos en series infinitas.

Figura 3 — Ilustración geométrica de un cuarto de círculo



Fuente: elaboración propia con Paintbrush, construida con base en Newton (1711)

Muestra explícitamente el arco de círculo en términos del seno mediante una serie infinita obtenida a partir del desarrollo binomial:

$$z = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 - \dots$$

A esta expresión determina su *fluente*, es decir, desarrolla un proceso de integración para llegar al arco.

$$z = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} - \frac{5x^7}{112} + \dots 1)$$

Asimismo, reconoce que dicha serie, ordenada según las potencias del seno, puede *invertirse* formalmente para obtener la expresión del seno en función del arco, para ello, propone la inversa de la serie como $x = z + az^3 + bz^5 + cz^7 + \dots$. Sustituye enseguida este valor en 1) y determina los coeficientes a , b , c , etc., quedando la inversa:

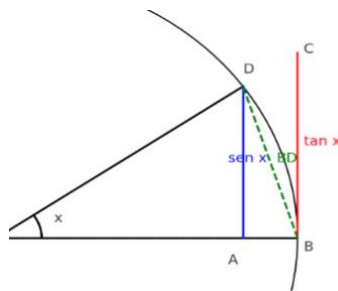
$$x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \dots 2)$$

La inversa es reconocible como la serie del seno. En el caso donde z es infinitamente pequeño, diríamos que $x = z$, o bien seno del ángulo igual al arco z .

Este procedimiento, fundado en el uso del teorema del binomio y la manipulación de series de potencias, constituye uno de los primeros tratamientos analíticos sistemáticos de la relación entre arco y seno, y anticipa la noción moderna del radián sin formularlo explícitamente.

Lo anterior le permitió establecer la aproximación $\sin(x) \approx x$, principalmente en los *Principia*, en cuyo uso se encuentra implícito el radián en argumentos geométricos. Siguiendo el parafraseo del Lema VII, Blaszczyk (2025) diseñó el tramo de círculo de radio unitario OB que se muestra en la figura 4, sobre la cual, según el autor, desde la perspectiva newtoniana toman sentido la proporción $\frac{CD}{CB}$, así como $\frac{\text{arc}(DB)}{DB}$, donde CB es la perpendicular al eje x en B que corresponde a la recta tangente a la curva en ese extremo del radio OB, con DB la cuerda que subtiende al arco (Figura 4).

Figura 4 — Ilustración geométrica modificada



Fuente: elaboración propia con ChatGPT versión 4, con base en Blaszczyk (2025)

Desde lo infinitesimal —y siguiendo a Newton—, el autor considera que estas proporciones forman una *razón de igualdad*. Reproduciendo la parte inicial del Lema VII:

Si en un círculo se consideran un arco, su cuerda y la tangente trazada en uno de sus extremos, entonces, cuando el arco se hace indefinidamente pequeño, la razón última entre el arco, la cuerda y la tangente es la razón de igualdad (Newton, 1686, pp. 31)

Lo que significa que las rectas DB, CB y el arco DB son iguales, $DB = CB$, de modo que $\frac{CD}{CB} = 1$. Además, puesto que en el sector circular BOD el radio $OB = OD = 1$, entonces $\text{arc}(DB) = (1)(x) = x$.

De la Figura 4 se desprenden las siguientes desigualdades entre las áreas comprendidas:

$$\text{Área del } \triangle BOD < \text{Área del sector circular BOD} < \text{Área del } \triangle BOD$$

A través de esta comparación, Blaszczyk (2025) establece relaciones entre seno, arco y tangente en cantidades infinitesimales (pp. 55-57). Lo infinitesimal está presente de facto, aunque no tematizado, en el Lema VII Newton opera con él sin otorgarle un estatuto ontológico explícito. El lema legitima directamente aproximaciones como:

$$\text{sen}(x) \approx x \approx \tan(x)$$

Sin embargo, el Lema VII no se restringe solo al caso trigonométrico, Newton afirma que: “Las últimas razones de las cantidades evanescentes son razones de igualdad” (Blaszczyk, 2025, pp. 56). Aquí ocurre un salto conceptual, el argumento deja de ser local (arco–cuerda–tangente) y se convierte en un principio axiomático sobre el comportamiento límite de

magnitudes variables, adquiriendo un valor metodológico universal dentro de la geometría natural (Koyré, 1965). La igualdad ya no es solo un recurso heurístico de cálculo, como en *De Analysis*, sino un resultado límite, independiente del ejemplo geométrico particular. Con las últimas razones, el objetivo de Newton era no dar espacio a lo infinitesimal inseguro.

Hoy diríamos que, aplicando el límite cuando $x \rightarrow 0$, resulta:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

En el Lema VII de los *Principia*, lo infinitesimal emerge como una herramienta geométrica eficaz, ligada a la identificación local entre arco, cuerda y tangente. En esta transición se articulan la noción de radián, los desarrollos en series de potencias y relaciones trigonométricas coherentes sobre el círculo, conduciendo a la aproximación $\sin(x) \approx x$. Lejos de ser concebido originalmente como una *geometría infinitesimal* espontánea, a la que haremos referencia a lo largo del escrito, esta metodología sería posteriormente retomada, reinterpretada y refinada a lo largo de varios siglos, al margen de la ley inmutable que Newton intentaba establecer con el proceso al límite.

2. EL RADIÁN COMO CONOCIMIENTO PARA LA ENSEÑANZA EN LOS MANUALES DE PRINCIPIOS DEL SIGLO XIX

Un discípulo de Newton, Roger Cotes (1686-1716), fue pionero en utilizar la geometría infinitesimal desarrollada por el primero para determinar el seno de un radián usando *fluxiones*; aproximando el proceso en serie de potencias (Cotes, 1738, pp. 95):

$$\sin(1) = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{20} - \frac{1}{5040} + \dots \approx 0.84147098$$

Cotes anticipó en más de 150 años la concepción del radián como unidad natural de medida angular en cálculo y análisis matemático, sentando bases tanto para la teoría de series como para la formalización posterior de la derivada trigonométrica y su aplicación en astronomía y física. 120 años después de la propuesta de Newton, en el *Traité Élémentaire de Trigonométrie Rectiligne et Spérique et Application de L'Algèbre à la Géométrie*, escrito en 1807, para su uso principalmente en las escuelas francesas posrevolucionarias, Lacroix (1765-1843) explicaba que, en las particiones a una circunferencia cuya medida es designada ordinariamente por 2π , el seno de AB o $\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 1$:

El arco $AB = \frac{1}{2}\pi$, tomando por unidad el radio, AM será de $0.^q 5$, se tiene luego $\sin 0.^q 5 = \cos 0.^q 5 = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0.707106781186$. Si enseguida $a' = 0.^q 5$, se tendrá $\sin \frac{1}{2}a' = \sin 0.^q 25 = 0.38268343239$. Continuando con la partición de cada arco en dos partes iguales, no llegaremos sobre ninguna de las partes de los cuadrantes; y tendremos solamente arcos cada vez más pequeños; los cuales por esta razón se aproximan sin cesar a ser iguales a sus senos. En la catorceava partición, por ejemplo, llegamos a un arco que es $\frac{1}{16384}$ del cuadrante donde el seno

es 0.0000095873799, menor por consecuencia que 0.00001; la pequeñez de este arco es tal, que no diferirá de su seno hasta la doceava cifra decimal (Lacroix, 1807, pp. 16-17)

En el contexto de la trigonometría de Lacroix, la notación $0.^q 5$ se refiere a *partes del cuadrante* (primer cuadrante en el que se coloca el círculo unitario), la cual es tomada como unidad de medida. Así que $0.^q 5$ significa 5 décimas partes del cuadrante (cuarto de círculo):

$$\frac{5}{10} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} = 45^0$$

Lacroix está explicando cómo, al dividir sucesivamente un arco de cuadrante ($\frac{\pi}{2}$ o 90°) en partes iguales, los valores de los senos de los ángulos resultantes se aproximan progresivamente al valor del arco mismo —lo que Newton describe como $\sin(x) \approx x$ — “... los cuales por esta razón se aproximan sin cesar a ser iguales a sus senos”. Esto último lo justifica en la Proposición 153 de su obra de geometría: “Si dos magnitudes invariables A y B son tales que podamos probar que su diferencia $A-B$ sea menor que una tercera magnitud δ , por pequeña que pueda ser esta última, esas dos magnitudes son iguales entre ellas” (Lacroix, 1799, pp. 100-101).

Al dividir el cuadrante en 14 partes sucesivas, el arco más pequeño considerado es $\frac{1}{16384}$ del cuadrante, y su seno difiere del arco en menos de una diezmilésima. La catorceava partición a la que llega Lacroix en el cuadrante corresponde a un ángulo de $19.78''$. Los valores numéricos obtenidos en cada partición muestran cómo el seno del ángulo se aproxima gradualmente al valor del arco.

Para determinar el valor de los senos de cualquier arco, Lacroix sugiere hacerlo por medio de *series convergentes*, es decir series de potencias para las diferentes expresiones trigonométricas.

Las particiones del cuarto de círculo realizadas por Lacroix no tienen como propósito establecer una definición formal del radián, sino que responden a la necesidad de utilizar los senos de ángulos muy pequeños como base para la construcción de tablas trigonométricas, en un contexto histórico en el que estas aún no se encontraban estandarizadas.

Entre las obras de trigonometría que asumen la postura de Lacroix se encuentran los *Éléments de trigonométrie* de Lefebure de Fourcy (1836), las *Leçons de trigonométrie* publicadas en 1881, del mismo autor, así como la *Trigonométrie rectiligne et sphérique* de Bourdon (1854).

En su obra de trigonometría, Lefebure de Fourcy (1787-1869), —astrónomo y matemático haitiano de nacionalidad francesa, alumno y profesor de la Escuela Politécnica; discípulo de Laplace, quien dirigió su tesis de doctorado— hace la siguiente afirmación para establecer el valor de la magnitud de un arco de $10''$:

Cuando el radio es tomado por la unidad, la media circunferencia es luego igual π ; y como hay

648,000 segundos en 180° , tendremos, en partes del radio

$$\text{arc}(10'') = \frac{\pi}{64800} = 0.000048481368110$$

O bien un arco muy pequeño casi igual a su seno, el número visto líneas arriba se puede ver como un valor muy próximo del seno de $10''$ (Lefebure de Fourcy, 1836, pp. 37, traducción de los autores)

De esta definición destacan dos cuestiones importantes: la frase *partes del radio*, no significa la acción de realizar una partición al radio, que tiene por valor la unidad, dado que en realidad la partición se hizo inicialmente a media circunferencia. De hecho, esa frase es una alusión más profunda que se debe entender como *en radianes* (Bourdon, 1854; Díaz Covarrubias, 1896; Camacho et al, 2024). Además, permanece la proximidad entre el *arc* y *sen*, cuya finalidad es la de establecer los valores trigonométricos de las funciones seno y coseno para el diseño de tablas trigonométricas.

La proximidad infinitesimal entre el arco y el seno del ángulo que lo subtiende permite establecer relaciones de equivalencia para valores sexagesimales muy pequeños —del orden de 1° , $1'$ y $1''$ —, como las siguientes:

$$\frac{\pi}{180^\circ} \approx \text{sen}(1^\circ); \frac{\pi}{10800'} \approx \text{sen}(1'); \frac{\pi}{648000''} \approx \text{sen}(1'')$$

Para cualquier ángulo α expresado en grados, minutos o segundos —sexagesimales— se mantiene la misma precisión al emplear indistintamente cualquiera de las expresiones —del lado izquierdo o derecho— para su conversión a radianes:

$$\alpha \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \approx \alpha \cdot \text{sen}(1^\circ); \alpha \cdot \frac{\pi}{10800'} \approx \alpha \cdot \text{sen}(1'); \alpha \cdot \frac{\pi}{648000''} \approx \alpha \cdot \text{sen}(1'')$$

En la práctica de la ingeniería de los siglos XVII al XX, la expresión del lado derecho, $\alpha \cdot \text{sen}(1^\circ)$, —para el caso donde el ángulo es dado en grados— se utilizaba con frecuencia por comodidad operativa, en detrimento de la conversión explícita $\alpha \cdot \frac{\pi}{180^\circ}$.

Supongamos ahora que, desde el enfoque newtoniano difundido por Lacroix, Lefebure de Fourcy, Bourdon y otros autores, se desea expresar en radianes los valores angulares que intervienen en la ecuación de Kepler $f(E) = E - e \cdot \text{sen}(E) - M = 0$ —dispuesta como función de variable E — utilizando: $\text{sen}(1^\circ)$, $\text{sen}(1')$ y sen , según el sistema sexagesimal adoptado. En este caso se hace patente un problema de coherencia dimensional, ya que no es lícito suponer directamente una solución del tipo:

$$f(E_0 = 57.29578^\circ) = (57.29578^\circ) - e \cdot \text{sen}(57.29578^\circ) - M = 0,$$

debido a que $E_0 = 57.29578^\circ$ es un número dado en el sistema sexagesimal, que hace necesario cambiar su valor angular a radianes.

Dado que E_0 es dado en grados, la operación correcta consiste en escribir:

$$f(E_0) = (57.29578^\circ) \cdot \text{sen}(1^\circ) - e \cdot \text{sen}(57.29578^\circ \cdot \text{sen}(1^\circ)) - M \cdot \text{sen}(1^\circ) = 0$$

Lo que equivale a llevar el ángulo de 57.29578° al valor de un radián. En consecuencia, la ecuación se reduce formalmente a:

$$f(E_0) = 1\text{rad} - e \cdot \text{sen}(1\text{rad}) - M \cdot \text{sen}(1^0) = 0$$

Esta última, forma parte de la primera aproximación, E_1 , de la solución buscada, descrita por la regla de Newton-Raphson en su estructura actual, como:

$$E_{n+1} = E_n - \frac{f(E_n)}{f'(E_n)} \leftrightarrow E_{n+1} = E_n - \frac{E_n - e \cdot \text{sen} E_n - M}{1 - e \cdot \cos E_n}$$

3. EL RADIÓN COMO CONOCIMIENTO UTILITARIO EN LOS LIBROS DE TRIGONOMETRÍA PRÁCTICA DEL SIGLO XIX

Hemos visto que, a lo largo del siglo XIX, en diversos manuales franceses destinados a la enseñanza de la trigonometría, el tránsito operativo de los grados sexagesimales a radianes se planteaba de manera distinta a la formulación moderna. Dicho procedimiento consistía en multiplicar un valor angular α , expresado en grados sexagesimales, por el seno de 1° , $1'$ o $1''$ según corresponda, en lugar de emplear la expresión actualmente reconocida $A = \alpha \cdot \frac{\pi}{180^\circ}$. Esta forma de proceder era común en lo que se denominaba *trigonometría práctica*, la cual derivó en la *trigonometría esférica*, una rama orientada a la resolución de problemas reales de medición en la astronomía (Van Brummelen, 2013), así como en la *geometría práctica*, rudimentos de topografía aplicada a las ciencias de la Tierra, (Camacho, 2011), que fueron el soporte para dar definición a la topografía actual, sin dejar de mencionar la *geodesia*, desarrollada a principios del siglo XIX por Gauss (Camacho, 2021), en contraste con la trigonometría pura o teórica, que buscaba la exactitud matemática.

La trigonometría práctica se caracterizó por ofrecer métodos simplificados y adaptados a los cálculos manuales, con aplicaciones en la observación astronómica, agrimensura, geodesia, náutica e ingeniería. Aún hoy, esta vertiente atraviesa cada una de dichas disciplinas, pues su propósito esencial sigue siendo la resolución de triángulos en contextos donde los ángulos y distancias corresponden a magnitudes reales. En tales casos, la precisión alcanzada es de carácter aproximado, pero con un elevado nivel de confianza, determinada en gran medida por las limitaciones propias de la geometría infinitesimal y los instrumentos de observación.

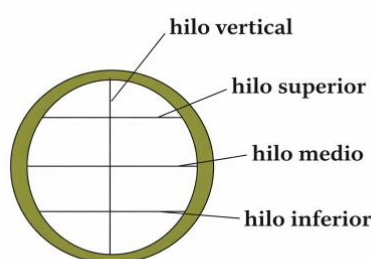
Se presentan enseguida dos casos particulares -entre una buena cantidad que se encuentran en diferentes obras de ciencias de los siglos XVII al XX- en los cuales es de por medio la utilidad de la geometría infinitesimal impuesta por Newton, en la que el radián se encuentra en la forma operativa comentada. Con estos se pretende no dejar duda del estado de paradigma al que se llevó dicho modelo en las áreas de las ciencias citadas.

3.1 Chauvenet: un problema relacionado con la astronomía

Una de las obras atravesada por la trigonometría esférica es el *A Manual of Spherical and Practical Astronomy* del profesor de matemáticas y astronomía, el norteamericano, William Chauvenet (1820-1870), publicada en Londres 1863. La obra es ocupada de problemas relacionados con la astronomía en cuya resolución Chauvenet utiliza los argumentos que hemos exhibido de aproximar el seno del ángulo con el arco en la forma desarrollada por Newton en la determinación del radián.

Chauvenet (1850) presenta el ejemplo de un problema desarrollado entre las páginas 146 a 153. El problema tiene que ver con los *hilos* que se disponen de manera simétrica con respecto al hilo central (Figura 5) -en la cruz filar del enfoque de los instrumentos de observación: teodolitos, telescopios y sextantes- los cuales no siempre son equidistantes. Esto último hacía necesario que el observador determinara esas pequeñas distancias, puesto que “ello causa graves errores” (pp. 147), principalmente, para la determinación del paso entre los hilos de la declinación de los astros.

Figura 5 — Enfoque de un teodolito que cuenta con los cuatro hilos: superior, medio, inferior y vertical



Fuente: elaboración propia con ChatGPT versión 4

Considera i como el intervalo angular de cualquiera de los hilos respecto del hilo central. I es el tiempo requerido por una estrella, cuya declinación es δ , para atravesar dicho intervalo. Del sistema de coordenadas ecuatoriales deduce que:

$$\text{sen}(i) = \text{sen}(I) \cdot \cos(\delta)$$

Puesto que los ángulos involucrados, i e I , son muy pequeños, por la serie de potencias del seno, estima: $\text{sen}(i) \approx i$, y $\text{sen}(I) \approx I$. De modo que la expresión anterior, resulta:

$$i = I \cdot \cos(\delta)$$

O bien:

$$i = \frac{I}{\cos(\delta)} = I \cdot \sec(\delta)$$

A partir de la aproximación, $\text{sen}(I) \approx I$, Chauvenet estableció la constante k en la forma $k = \frac{I}{\text{sen}(I)}$, que en esencia corresponde al valor que lleva a convertir ángulos sexagesimales a radianes, no obstante, multiplicó esta última por $\text{sen}(15'')$, en lugar de $\text{sen}(1'')$.⁴ De modo que

⁴ Históricamente, en la astronomía práctica del siglo XIX se adoptaba la conversión 15 segundos de arco $\leftrightarrow$ 1 segundo de tiempo debido a la rotación terrestre: 360° en 24 h 15'' de arco por cada 1s de tiempo.

la constante de conversión quedó como $k = \frac{I}{\text{sen}(I)} \text{sen}(15'')$. Chauvenet estima que la constante k está dada en la base *ar. co. log*(k) = 9.99912, parte de que:

$$\text{co.log}(k) = 9.99912$$

$$\log(k) = 10 - 9.99912 = 0.00088$$

$$k = 10^{0.00088} = 1.0023$$

Resolvamos el problema utilizando herramientas actuales.

1) Convertimos I en radianes (para la evaluación de $\text{sen}(I)$)

$$I_{\text{rad}} = (1517.6)\text{sen}(1'') \approx 0.0073575324245 \text{ rad.}$$

2) Calcular $\text{sen}(I)$ y $\text{sen}(15'')$

$$\text{sen}(I) \approx \text{sen}(0.007357466),$$

$$\text{sen}(15'') = 0.000072722052$$

3) Calcular $\cos(\delta) = \cos(88.55^\circ) = 0.02530457286$

4) Calcular $i = \frac{I \cos(\delta)}{k}$

Usando $I = 1517.6$ (segundos de arco) y k según se obtuvo de *ar. co. log*(k) = 9.99912 $k \approx 1.002028329$.

$$i = \frac{1517.6 \times 0.02530457286}{1.00202833} \approx 38.324 \text{ (segundos de arco)}$$

Observe que el valor de k divide la expresión para determinar i , esa postura corresponde a la operación inversa de convertir ese valor calculado en radianes a segundos sexagesimales.

3.2 Díaz Covarrubias: resolución de un problema de la geodesia

En su *Tratado Elemental de Topografía, Geodesia y Astronomía Práctica* (1896), el geógrafo mexicano Francisco Díaz Covarrubias (1833-1889) analizó la diferencia entre el arco ab y la tangente AB al considerar la Tierra como un casquete esférico con plano tangente (Figura 6). El propósito de esta deducción fue establecer los límites de extensión en las operaciones topográficas y geodésicas.⁵ La distancia fue formulada como:

$$d = (A'B' - a'b') \cdot R$$

donde R es el radio terrestre, utilizado en 6,366,738 metros.

Dado el ángulo central c , se obtiene $a'b' = c$, $A'B' = 2R \cdot \tan\left(\frac{1}{2}c\right)$, de modo que la ecuación anterior resulta:

$$d = \left(2 \tan\left(\frac{1}{2}c\right) - c\right) \cdot R$$

Para resolver el problema de homogeneidad entre arco y tangente, Díaz Covarrubias desarrolló la tangente en serie de potencias y aproximó esta última como $\tan\left(\frac{1}{2}c\right) = \frac{1}{2}c +$

⁵ La definición de este problema, según se expone, la hemos tomado de Camacho et al (2024, p. 225-227).

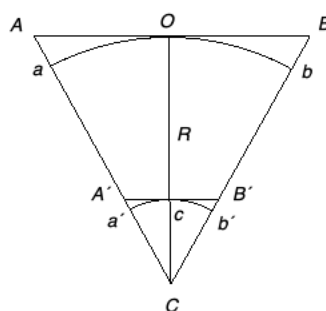
$\frac{1}{6}c^3 + \dots$, o bien $\tan\left(\frac{1}{2}c\right) \approx \frac{1}{2}c$, quedando:

$$d = \frac{1}{12}R \cdot c^3$$

Al expresar c en el sistema sexagesimal, propuso su conversión a radianes mediante el producto $c \cdot \sin(1')$, afirmando que el ángulo se encontraba en *partes del radio*, quedando la última expresión como:

$$d = \frac{1}{12}R \cdot (c \cdot \sin(1'))^3$$

Figura 6 — Casquete esférico y plano tangente engendrados por el movimiento del arco ab



Fuente: imagen tomada de Camacho et al (2024, pp. 226)

Para $c = 45'$, se obtiene $AB = 83,341.6$ metros y $ab = 83,340.4$ metros, con una diferencia de apenas 1.2 metros (1.1905 metros según el cálculo actual). Este resultado ilustra la precisión alcanzada en la resolución de problemas de coherencia de unidades y el papel del radián en la práctica geodésica.

Desde una perspectiva matemática contemporánea, las expresiones analíticas empleadas por Díaz Covarrubias y Chauvenet pueden interpretarse como igualdades exactas entre funciones trigonométricas, siempre que el ángulo central se exprese en radianes. De este modo, el razonamiento histórico basado en ángulos pequeños se ve reemplazado por una formulación funcional rigurosa, en la que, en el caso de Díaz Covarrubias, el radio terrestre aparece explícitamente y el radián opera como magnitud adimensional.

3.3 El radián en los manuales para la enseñanza entre los siglos XIX y XX

En los manuales destinados a la enseñanza, el uso del radián en relación con valores angulares pequeños se aplicó casi exclusivamente a las conversiones requeridas en la astronomía y en las ciencias de la tierra, disciplinas que solían incluirse en estas obras. En cambio, dentro de la trigonometría orientada a la enseñanza, la tendencia predominante fue recurrir a ángulos muy pequeños —como $\sin$ — para la elaboración y perfeccionamiento de tablas trigonométricas. Esta práctica se consolidó en numerosos manuales publicados en la segunda mitad del siglo XIX, posteriores a los de Lacroix y Lefebure de Fourcy, como por ejemplo los de Giquel (1860) y Bowser (1892), que siguieron los mismos patrones y

lineamientos, reflejando así el paradigma dominante tanto en el plano educativo como en el práctico.

Tal situación se prolongó hasta mediados del siglo XX, cuando la irrupción de la llamada *Matemática Moderna* —iniciada en Francia y posteriormente adoptada en Estados Unidos— transformó la enseñanza de la disciplina. Como consecuencia, la trigonometría práctica perdió su vínculo explícito con las ciencias auxiliares de la geodesia y ciencias de la observación, reduciéndose a un apéndice dependiente de la geometría euclidiana. Un ejemplo de esta tendencia se encuentra en la Geometría de Baldor (2004) —vigésima reimpresión, de la primera edición publicada en el año 1966—, obra que incluye capítulos de trigonometría, más como respuesta a los programas oficiales que como una apuesta didáctica propia. En la introducción de la obra de Baldor, el profesor Marcelo Santaló (Universidad Nacional Autónoma de México) señala:

La inclusión de la Trigonometría puede ser debido a la necesidad de ajustarse a la mayoría de los programas oficiales de la materia. En realidad, la Trigonometría tiende a desaparecer como disciplina independiente y así debe entenderlo el Prof. Baldor al incluirla como unos capítulos de la Geometría. La importancia de la Trigonometría en el siglo pasado, en América, era por la necesidad de su aplicación en la navegación, la agrimensura y la astronomía. En la actualidad, lo más importante de la Trigonometría es el estudio de las propiedades de las funciones trigonométricas y por esto su estudio, en nivel superior, ha pasado a formar parte de la Teoría de funciones. La parte elemental que incluye el Prof. Baldor en su texto, es un buen fundamento para los estudios posteriores (Baldor, 2004, pp. iii)

En esta obra, el radián aparece definido de manera aislada bajo la forma moderna que hoy se reconoce, pero no vuelve a utilizarse en ninguno de los temas tratados en el anexo de 103 páginas que componen la trigonometría, salvo en cuatro ejercicios de conversión entre ambos sistemas al final del tema.

4 RESULTADOS

En la segunda edición de la *Astronomía Esférica* del ingeniero español Miguel Langreo (1876-1940), publicada en 1960 y dedicada a la enseñanza de la astronomía aplicada a la ingeniería, el autor establece la siguiente expresión:

$$\text{sen}(h) - \text{sen}(x + h) \cdot \cos(p) - \cos(h - x) \cdot \text{sen}(p) \cdot \cos(H) = 0$$

La utiliza para determinar la latitud (ϕ) de un lugar a partir de observaciones astronómicas a la estrella polar, considerando que x se define como función de p . Lo interesante de esta formulación no radica únicamente en el resultado final, sino en la geometría infinitesimal empleada para derivarlo, la cual puede resumirse en la siguiente formulación:

Puesto que x se define como función de p ; y desarrollando por la fórmula de Maclaurin, según las potencias crecientes de p hasta la cuarta, y teniendo presente que al hacer $p = 0$ se anula x , quedará -considerando que para desarrollar en serie habrá que convertir p en radianes multiplicando por $\text{sen}1^\circ$, y después dividirlo por $\text{sen}1^\circ$ para expresarlo en segundos de arco- (Langreo, 1960, pp. 164)

Cuatro siglos después, la metodología infinitesimal descrita por Langreo (1960) coincide esencialmente con la empleada por Newton (1686, 1711) en los *Principia* y el *De Analysis* en la resolución de problemas astronómicos, aun cuando el concepto moderno de radián ya se encontraba plenamente definido. Ello evidencia la solidez y vigencia del procedimiento analítico e infinitesimal newtoniano, capaz de sostener su utilidad a lo largo del tiempo en la resolución de problemas vinculados a la astronomía práctica y otras ciencias de la tierra. No obstante, su utilidad dio impulso a la resolución de problemas de ingeniería más allá de la mitad del siglo XX (véase, por ejemplo, las obras de Breed & Hosmer (1953) y Granville et al (1954)).

En la física contemporánea, el radián se emplea como una magnitud adimensional, lo que equivale a haber normalizado implícitamente el radio sin eliminar su papel geométrico. Esta convención permite formular leyes físicas generales sin ambigüedad dimensional, mientras que el radio reaparece explícitamente únicamente cuando la geometría del fenómeno lo exige, como en la relación entre magnitudes lineales y angulares (Di Rocco, 2009). Desde esta perspectiva, el uso del radio terrestre por Díaz Covarrubias no contradice el modelo actual de $r = 6,366,738$ metros, sino que refleja una praxeología histórica en la que el radián opera aún como razón geométrica ligada a un objeto físico concreto. La diferencia entre ambos enfoques responde, por tanto, a un proceso de transposición institucional más que a una divergencia conceptual, reforzando la tesis de que el radián se constituye históricamente como una técnica de uso antes que como un objeto formal definido.

CONCLUSIONES

Los estudios en trigonometría realizados en Matemática Educativa indican que para la razón trigonométrica resulta natural trabajar con el ángulo en grados y para la función trigonométrica con el ángulo en radianes. De esta forma de enseñanza se espera que el estudiante identifique de forma natural la unidad de medida conveniente para el ángulo, sin embargo, un estudio de caso con jóvenes universitarios de primer año evidenció que, aun trabajando en el círculo con material físico manipulable, se presentan dificultades para identificar y definir al radián como relación multiplicativa entre el arco y el radio de un círculo (Torres-Corrales & Montiel, 2021).

Desde la perspectiva de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), el recorrido histórico reconstruido en este trabajo pone de manifiesto que el radián no emerge inicialmente como un objeto matemático definido sino asociado a una técnica (τ) operatoria eficaz, vinculada con actividades propias de la astronomía, la geodesia y la trigonometría práctica. En este sentido, su historia evidencia efectos transpositivos, en los cuales una herramienta local, implícita y funcional, circula entre distintas instituciones científicas, articulándolas, antes de ser estabilizada como objeto de enseñanza.

El análisis de las obras de Newton (en tanto Institución) permite precisar este proceso con mayor fineza epistemológica. En los *Principia*, particularmente en el Lema VII, lo infinitesimal surge como un recurso geométrico local, asociado a la identificación operativa entre arco, cuerda y tangente, donde la igualdad se establece en el marco de una razón última entendida de manera *práctica*. Ese mismo procedimiento es reformulado por Newton: lo infinitesimal no se introduce, sino que se reconstruye conceptualmente bajo la noción euclidiana de *razón última*, adquiriendo un alcance metodológico general y construyendo de esa manera una praxeología matemática, puesto que los Lemas se constituyen tecnologías (θ), en el sentido de la TAD. Esta transición no elimina el radián implícito, sino que lo consolida como condición de coherencia para el paso al límite y para el uso de desarrollos en serie. Lo mismo ocurre en la obra de Lacroix, este construye una praxeología matemática cuya técnica es el proceso de bisección del cuarto de círculo, justificada con la Proposición 152, que hace las veces de tecnología.

Los tratados de Bourdon, Lefebure de Fourcy, y otros autores del siglo XIX, muestran que estos procesos de transposición desarrollados por Newton fueron institucionalizados en la enseñanza y en la práctica científica sin necesidad de una definición explícita del radián. La noción de *partes del radio*, el uso sistemático de arcos pequeños y la recurrencia a la aproximación $\sin(x) \approx x$ constituyen evidencias de un saber tácito compartido, cuya legitimidad se sustenta en la eficacia de la geometría infinitesimal que se constituyó y no en su formalización conceptual.

Ante la pregunta que nos hacemos al inicio del artículo del radián: ¿qué aporta la historia del radián a la enseñanza actual de la trigonometría?, en la práctica docente, planteamos a 30 estudiantes de ingeniería sobresalientes (en equipos de cinco), la ecuación de Kepler además de otros problemas de física y química en un concurso de *Ciencias Básicas*. Inicialmente, se les recomendó usar el método de Newton-Raphson para la resolución, sin dar indicios acerca del uso del radián, con la intención de que este emergiera de forma natural, sin embargo, ninguno de los equipos acertó a utilizarlo para cambiar el ángulo inicial de 57.29578° , utilizando el ángulo en grados, de tal forma que no obtuvieron la solución del problema.

La experiencia didáctica descrita permite responder de manera empírica a la pregunta que orienta este trabajo, al plantear la ecuación de Kepler a estudiantes con alto desempeño académico sin indicar explícitamente el uso del radián, se puso de manifiesto que dicho concepto no opera para ellos como una técnica necesaria, sino como un objeto escolar descontextualizado. El hecho de que ninguno de los equipos identificó la necesidad de convertir el ángulo inicial de 57.29578° a radianes evidencia una ruptura entre el dominio formal de los métodos analíticos —en este caso, el método de Newton–Raphson— y la comprensión de las condiciones de coherencia dimensional que los hacen operativos. Desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico, este resultado señala un desajuste entre la técnica (τ) y la tecnología (θ) asociadas al radián, producto de una transposición institucional que ha privilegiado su definición sobre el sentido de su uso práctico. En este marco, la historia del radián aporta a la enseñanza de la trigonometría no un dato erudito, sino la posibilidad de reconstruir el concepto como una respuesta técnica a problemas reales de análisis, devolviéndole su función epistemológica original y haciendo visible su necesidad en contextos matemáticos y físicos concretos.

Por ello, el análisis de obras científicas y didácticas permite identificar nociones matemáticas que quedan al margen de la enseñanza escolar, y cuya incorporación al currículo daría una conceptualización más amplia a la matemática en cuestión. En este caso, similar a identificar la noción del radián como partes del radio, en este sentido, Montiel (2011) identificó en su estudio histórico que la noción de relación trigonométrica es una herramienta proporcional para estudiar y cuantificar la relación no proporcional ángulo-cuerda en el contexto del círculo, o ángulo-cateto (opuesto o adyacente) en el contexto del triángulo rectángulo. Esto conlleva a conceptualizar, por ejemplo, que el seno de 30° da como resultado 0.5 porque se forma un triángulo rectángulo cuyo cateto opuesto (cuerda) es la mitad de la hipotenusa (radio).

Finalmente, una enseñanza del radián fundada en su historia permite desplazar el foco desde la definición hacia la necesidad operativa del concepto, haciendo visible que el radián no es una convención arbitraria, sino una condición de coherencia del análisis trigonométrico y diferencial.

REFERENCIAS

- Baldor, A. (2004). *Geometría plana y del espacio y trigonometría*. Compañía Cultural Editora de Textos Americanos.
- Błaszczyk, P. (2025). Reading Newton's Principia through Euclidean proportion and nonstandard analysis. *Foundations of Science*, 21, 55-95. <https://doi.org/10.1007/s10699-025-09997-w>

- Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(1), 77–124. <https://revue-rdm.com/1999/la-sensibilite-de-l-activite/>
- Bourdon, M. (1854). *Trigonométrie rectiligne et sphérique*. Mallet-Bachelier, Imprimeur-Libraire.
- Bowser, E. A. (1892). *An elementary treatise on plane and spherical trigonometry*. Heath & Co.
- Breed, C. B. & Hosmer, G. L. (1953). *The principles and practice of surveying*. John Wiley & Sons, Inc.
- Camacho, A. (2021). Aplicación del cálculo de las probabilidades a un problema de geometría práctica. Estudio praxeológico y socioepistemológico. *Revista de História da Educação Matemática*, 7, 1-22. <https://www.histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/379>
- Camacho, A., Sánchez, B. I., Blanco, R. & Cuevas, J. H. (2011). Geometrización de una porción del espacio real. *Educación Matemática*, 23(3), 123-145. <https://doi.org/10.24844/EM2303.05>
- Camacho-Ríos, A., Valenzuela-González, V., & Caldera-Franco, M. (2024). Efectos transpositivos entre praxeologías: Advenimiento del radián. *Revista Brasileira de História da Matemática*, 24(48), 212–232. Sociedade Brasileira de História da Matemática. <https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/458>
- Castela, C. (2009). La noción de praxeología: Un instrumento de la Teoría Antropológica de lo Didáctico posiblemente útil para la Socioepistemología. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa ALME-22* (pp. 1195–1205). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Castela, C. & Romo-Vázquez, A. (2011). Des mathématiques à l'Automatique: Étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 31(1), 79–130. <https://revue-rdm.com/2011/des-mathematiques-a-l-automatique/>
- Chauvenet, W. (1850). *A treatise on plane and spherical trigonometry*. J. B. Lippincott & Co.
- Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la Théorie Anthropologique du Didactique. En L. Ruíz-Higueras, A. Estepa, & F. J. García (Eds.), *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctica* (pp. 705-746). Universidad de Jaén. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=134
- Cooper, M. (1992). Who named the radian?. *The Mathematical Gazette*, 76(475), 100–101. <https://doi.org/10.2307/3620383>
- Cotes, R. (1738). *Harmonia mensurarum*. Typis Academicis.
- Di Rocco, H. (2009). Ángulos planos: ¿por qué el radián debe tener una medida igual a la unidad?. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, 26(1), 136-144. <https://doi.org/10.5007/2175-7941.2009v26n1p136>
- Díaz Covarrubias, F. (1896). *Tratado elemental de topografía, geodesia y astronomía práctica*. Oficina Tipográfica de la Secretaría de Fomento.
- Dunlop, K. (2012). The mathematical form of measurement and the argument for Proposition I in Newton's *Principia*. *Synthese*, 186, 191–229. <https://doi.org/10.1007/s11229-011-9983-8>
- Giquel, E. (1860). *Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique*. Costey Frères Libraires-Éditeurs.

- Granville, W. A., Smith, P. F. & Mikesh, E. J. (1954). *Plane and spherical trigonometry*. Ginn and Company.
- Hinojos-Ramos, J. E., Torres-Corrales, D. C. & Camacho-Ríos, A. (2023). The construction of the integral for the arc length of a curve based on van Heuraet and Fermat's works. *The British Journal for the History of Mathematics*, 38(1), 41-54. <https://doi.org/10.1080/26375451.2023.2168880>
- Koyré, A. (1965). Concept and experience in Newton's scientific thought. En A. Kouré (Ed.), *Newtonian studies* (pp. 25–52). Harvard University Press.
- Lacroix, S. F. (1799). *Éléments de géométrie à l'usage de l'École Centrale des Quatre Nations*. Chez Courcier, Imprimeur-Libraire.
- Lacroix, S. F. (1807). *Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique et application de l'algèbre à la géométrie*. Courcier, Imprimeur-Libraire.
- Langreo, M. (1960). *Lecciones de astronomía esférica: Teoría y uso del teodolito*. Editorial Dossat.
- Lefebure de Fourcy, L. E. (1836). *Éléments de trigonométrie*. Bachelier Libraire de l'École Polytechnique.
- Lefebure de Fourcy, L. E. (1881). *Leçons de trigonométrie*. Gauthier-Villars, Libraire de l'École Polytechnique.
- Montiel, G. (2011). *Construcción Social de Conocimiento Trigonométrico. Un estudio Socioepistemológico*. Díaz de Santos.
- Newton, I. (1686). *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Typis Josephi Streater, pro Societate Regia.
- Newton, I. (1711). *De Analysis per Aequationes Numero Terminorum Infinitas*. En W. Jones (ed.), *Analysis per Quantitates Series, Fluxiones, ac Differentias* (pp. 1–22). Londres. <https://www.newtonproject.ox.ac.uk/view/texts/normalized/NATP00204>
- Newton, I. (1671/2001). *Tratado de métodos de series y fluxiones* (I. Vargas, Trad.). Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM (Colección Mathema).
- Thomson, J. (1910). The term “radian” in trigonometry. *Nature*, 83, 217. <https://doi.org/10.1038/083217c0>
- Torres-Corrales, D. & Montiel, G. (2020). La desarticulación matemática en ingeniería. *Nóesis: Revista de Ciencias Sociales y Humanidades*, 29(58-1), 24-55. <https://doi.org/10.20983/noesis.2020.3.2>
- Torres-Corrales, D. & Montiel-Espinosa, G. (2021). Resignificación de la razón trigonométrica en estudiantes de primer año de Ingeniería. *Revista Educación Matemática* 33(3), 202- 232. <https://doi.org/10.24844/EM3303.08>
- Van Brummelen, G. (2013). *Heavenly mathematics: The forgotten art of spherical trigonometry*. Princeton University Press.
- Ypma, T. J. (1995). Historical development of the Newton–Raphson method. *Mathematics Faculty Publications*, 37(4), 531-551. https://cedar.wvu.edu/math_facpubs/93