

Revista de História da Educação Matemática

HISTEMAT

ISSN: 2447-6447

Submetido: 31/03/2026

Aprovado: 06/07/2026



<https://doi.org/10.62246/HISTEMAT.2447-6447.2026.12.829>



NÚMEROS REALES A TRAVÉS DE LOS LENTES DE LA HISTORIA DEL CURRÍCULO ESCOLAR COLOMBIANO

NÚMEROS REAIS ATRAVÉS DAS LENTES DA HISTÓRIA DO CURRÍCULO ESCOLAR COLOMBIANO

Edgar Alberto Guacaneme-Suárez¹

Universidad Pedagógica Nacional

guacaneme@pedagogica.edu.co



Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-3131-1579>

Lyda Constanza Mora-Mendieta²

Universidad Pedagógica Nacional

lmendieta@pedagogica.edu.co



Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-5317-2397>

César Guillermo Rendón-Mayorga³

Universidad Pedagógica Nacional

cgrendonm@upn.edu.co



Orcid: <https://orcid.org/0000-0001-9765-493X>

¹ Doctor en Educación, énfasis en Educación Matemática. Universidad del Valle (UV). Profesor Universidad Pedagógica Nacional (UPN), Bogotá, D.C., Colombia. Calle 72 N.º 11-86. Of. B306. Porciúncula. Bogotá, D.C., Colombia. CEP:110221. E-mail: guacaneme@pedagogica.edu.co.

² Magister en Docencia de la Matemática. Universidad Pedagógica Nacional (UPN). Profesora Universidad Pedagógica Nacional (UPN), Bogotá, D.C., Colombia. Calle 72 N.º 11-86. Of. B109. Porciúncula. Bogotá, D.C., Colombia. CEP:110221. E-mail: lmendieta@pedagogica.edu.co.

³ Máster Universitario en Estadística Aplicada. Universidad de Granada (UGR). Profesor Universidad Pedagógica Nacional (UPN), Bogotá, D.C., Colombia. Calle 72 N.º 11-86. Of. B109. Porciúncula. Bogotá, D.C., Colombia. CEP:110221. E-mail: cgrendonm@upn.edu.co

RESUMEN

Con el interés de decantar una base para el conocimiento curricular del profesor de matemáticas sobre el sistema numérico de los números reales se realizó un estudio del desarrollo histórico de este en propuestas oficiales del currículo colombiano de matemáticas en los últimos 75 años. Los resultados del estudio se organizan y presentan en cuatro hitos. A través de estos se reconoce un crecimiento en el tratamiento curricular del sistema numérico en cuestión expresado en su evolución de ser un tema de las matemáticas escolares en un curso, a convertirse en objeto de estudio de sendas unidades temáticas en dos cursos. Adicionalmente, se advierte una evolución del tratamiento curricular al llevar planteamientos generales sobre su lugar en el desarrollo del pensamiento matemático a niveles de concreción en enunciados que se asumen como herramientas para la actividad docente.

Palabras clave: Historia del currículo en matemáticas. Sistema de los números reales. Colombia.

RESUMO

Com o objetivo de decantar uma base para o conhecimento curricular do professor de matemática sobre o sistema numérico de números reais, foi realizado um estudo do desenvolvimento histórico deste nas propostas oficiais do currículo de matemática colombiano nos últimos 75 anos. Os resultados do estudo são organizados e apresentados em quatro marcos. Através destes, reconhece-se um crescimento no tratamento curricular do sistema numérico em questão, expresso na sua evolução de um tópico de matemática escolar num ano, para se tornar objeto de estudo de duas unidades temáticas em dois anos. Além disso, observa-se uma evolução do tratamento curricular ao se aproximar de abordagens gerais sobre seu lugar no desenvolvimento do pensamento matemático a níveis de concretização em enunciados que se assumem como ferramentas para a atividade docente.

Palavras-chave: História do currículo de matemática. Sistema de números reais. Colômbia.

INTRODUCCIÓN

El grupo de investigación *Research on Mathematics Teacher Education* (RE-MATE) actualmente desarrolla el proyecto titulado «Valoración de aprendizajes sobre números reales logrados a través de la implementación de una tarea diseñada para la formación inicial de profesores de matemáticas - VAR $\mathbb{R}$ ». En este contexto investigativo se vio necesario construir un marco de referencia sobre el conocimiento del profesor de matemáticas en relación con el sistema de los números reales (en adelante, $\mathbb{R}$) y, dentro de este marco, elaborar uno específicamente sobre el conocimiento curricular. Dado que para RE-MATE la dimensión histórica del conocimiento es consustancial a este, se consideró necesario establecer una perspectiva histórica del tratamiento de $\mathbb{R}$ en el currículo de matemáticas en Colombia. Para ello, se establecieron algunos hitos en la historia curricular en los últimos setenta y cinco años; hitos determinados por, o concretados en, los programas de matemáticas oficialmente propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (en adelante, MEN).

Bajo este enfoque se debe precisar y entender que el presente documento no corresponde a una investigación, aunque sí a un estudio realizado como parte de ella.

1. REFERENCIAL TEÓRICO

El *Knowledge of curriculum* [conocimiento del currículo] se ha establecido como parte del modelo del conocimiento del profesor de matemáticas denominado *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) [conocimiento matemático para la enseñanza], sin embargo, su definición en el modelo es un tanto difusa. Si bien en uno de los documentos clásicos sobre el modelo (Hill *et al.*, 2008) se incluye el conocimiento del currículo como uno de los seis componentes del MKT, no hay allí descripción alguna de aquel. En otro de tales documentos (Ball *et al.*, 2008), se destaca el *curricular knowledge* [conocimiento curricular] como una de las categorías propuestas previamente por Lee Shulman (1986) que alude tanto al conocimiento de los programas diseñados para la enseñanza, de los materiales didácticos y de las indicaciones para el uso de materiales curriculares, como al conocimiento curricular lateral (*i.e.*, el conocimiento del currículo de otras áreas disciplinares que se enseñan en un año o grado específico) y al conocimiento curricular vertical (*i.e.*, el conocimiento de lo que se ha enseñado y se enseñará en los años o grados escolares anteriores y posteriores). Hill *et al.* (2008) sostienen

que dentro del *Pedagogical Content Knowledge* [conocimiento pedagógico del contenido] han incluido provisionalmente el conocimiento curricular, pero que no están seguros si este puede formar parte de otra categoría (el conocimiento del contenido y la enseñanza), si puede abarcar varias categorías o ser una categoría por derecho propio; también manifiestan que, dentro del *Subject Matter Knowledge* [conocimiento de la disciplina], incluyen el *Horizon Content Knowledge* [conocimiento del horizonte del contenido] para asignarle un lugar a la conciencia sobre cómo se relacionan los temas matemáticos a lo largo del currículo.

Esta conceptualización sobre el conocimiento curricular no incorpora una precisión temporal, desde la cual se asuma el carácter histórico, sociopolítico y personal/institucional del currículo en matemáticas, aspectos que el grupo RE-MATE valora de manera especial. El carácter histórico reivindica al currículo en matemáticas como una construcción viva y, por tanto, moviéndose en la dialéctica permanencia/cambio. La comprensión del currículo en matemáticas como una apuesta de un Estado o de una comunidad le asigna una incidencia no neutral a las matemáticas en la vida social y le estipula una naturaleza sociopolítica. Por su parte, el hecho de que los profesores de matemáticas hayan tenido experiencias formativas en y a través de un currículo de matemáticas en un contexto personal/institucional/social le impone a este tal carácter.

Desde esta óptica es válido afirmar que el conocimiento curricular refiere al conocimiento del currículo en matemáticas, es decir, de la apuesta sociopolítico y educativa expresada en los programas de estudio diseñados y propuestos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en el contexto de un país o nación, y de las indicaciones para el uso de los materiales y herramientas curriculares; el conocimiento de tal currículo debe atender, al menos, a su carácter histórico, sociopolítico y personal/institucional.

Bajo las anteriores consideraciones debe ser claro que lo que se presenta a continuación, específicamente en el apartado «4. Análisis y resultados» no pretende describir el conocimiento curricular respecto de $\mathbb{R}$, pero sí la dinámica del currículo en matemáticas prescrito sobre $\mathbb{R}$ en los programas de estudio en algunos momentos específicos, enfatizando en la dialéctica permanencia/cambio.

2. METODOLOGÍA

Para el desarrollo del estudio se ha establecido una ventana de observación de aproximadamente 75 años, ello atendiendo fundamentalmente a la disponibilidad de los programas curriculares oficiales. En el lapso considerado se destacan cuatro hitos singulares, a saber: las matemáticas escolares a mediados del siglo XX, la época de la enseñanza de la matemática moderna, la reforma curricular concretada en la propuesta de programa curricular para las matemáticas y los derroteros curriculares que determinan la enseñanza actual de las matemáticas en los niveles de educación básica y media colombiana.

Para cada uno de estos hitos se procurarán sendas descripciones acerca de en qué grado de escolaridad se aborda $\mathbb{R}$, cómo se introduce y desarrolla su estudio. En el análisis interesa destacar el enfoque pedagógico y la perspectiva epistémica en cada hito y decantar los aspectos de la dialéctica permanencia/cambio que se dan entre hitos o al interior de alguno de estos.

3. ANÁLISIS DE RESULTADOS

3.1 $\mathbb{R}$ en los Programas de Matemáticas de mediados del siglo XX

El primer documento oficial considerado en el lapso comprendido entre 1950 y 1974 data del año 1952. Este corresponde a los «Programas de Matemáticas» para los grados de Educación Secundaria, adoptados a través de una resolución ministerial (Colombia, 1952). Para ese momento, la escolaridad estaba organizada en cinco años de Educación Primaria y seis años de Educación Secundaria. En estos programas para la Educación Secundaria, y más específicamente para lo que entonces se llamaba «Bachillerato» (11 a 18 años aprox.) se proponía estudiar temas de las áreas consignadas y distribuidas por grados escolares, como aparece en el Cuadro 1.

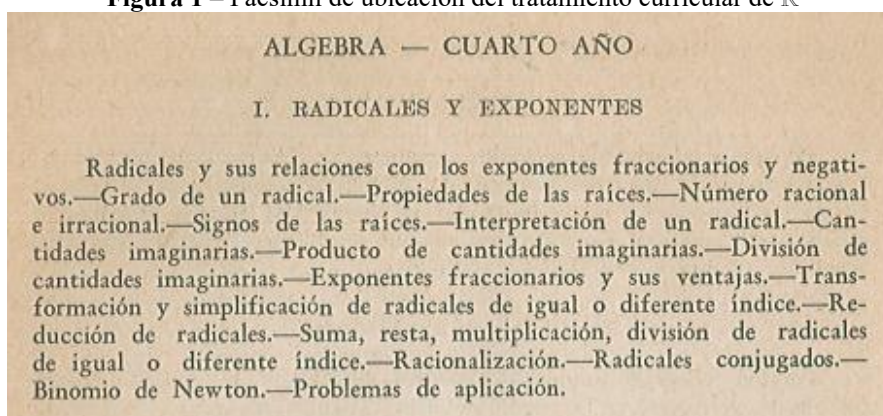
Cuadro 1 – Temáticas matemáticas a estudiar en cada grado del Bachillerato

Año	Área temática
Primer año	Aritmética
Segundo año	Aritmética
Tercer año	Contabilidad Álgebra
Cuarto año	Álgebra Geometría plana
Quinto año	Trigonometría Geometría del espacio Física
Sexto año	Física

Fuente: Construcción propia a partir de lo consignado en Colombia (1952)

Al hacer el rastreo en el listado de temas que componían los Programas, se identifica que en el cuarto año (hoy en día grado 9.º) se presenta al número racional e irracional como uno de los temas en el marco del primer capítulo titulado «I. Radicales y exponentes» (ver Figura 1). En el ámbito de lo aritmético, previamente, para el Primer año se propuso estudiar los números enteros (léase hoy, números naturales) y sus operaciones, los números quebrados (léase hoy, números racionales positivos) y sus operaciones, y las fracciones decimales y sus operaciones. Para el Tercer año, en el ámbito del álgebra, se propuso el estudio de las «Cantidades positivas y negativas, su representación gráfica y aplicación...» (Colombia, 1952, p. 9), así como el estudio de operaciones con números positivos y negativos. En los temas dispuestos para los otros años no se evidenciaron posibles conexiones, incluso implícitas, con los números racionales e irracionales.

Figura 1 – Facsímil de ubicación del tratamiento curricular de R



Fuente: Colombia (1952, p. 11)

Por su ubicación en el capítulo, se puede suponer que los números reales (rationales e irracionales) se consideran como los valores o raíces de algunos radicales. Sin embargo, el

contenido de los Programas no permite reconocer la manera en que se proponía el trabajo con estos.

En la misma dirección se encuentra la primera mención a los números reales en la propuesta curricular de 1963 expresada en los «Programas Analíticos de Matemáticas y Física para el primero y segundo ciclos de educación media» (Colombia, 1963). Específicamente, para el Curso III, en una de las unidades relativas al álgebra, se plantean como objetivos el estudio de los números reales a partir de la distinción entre radicales reales e imaginarios, así como la distinción entre radicales racionales e irracionales para el caso de los radicales reales (ver Figura 2).

Figura 2. Facsímil de la primera mención a $\mathbb{R}$ en la propuesta de 1963

7. **Determinar mediante ejemplos los radicales y sus clases: radicales reales y su división en racionales e irracionales. Los imaginarios como raíces de índice par de cantidades negativas.**
8. **Deducir del análisis anterior los conceptos de números racionales, reales e imaginarios y realizar ejercicios suficientes para distinguirlos. Idea de número complejo como adición de uno real y uno imaginario.**

Fuente: Colombia (1963, p. 103)

Así, es posible colegir que el tratamiento de los números reales, tanto racionales como irracionales, continúa recibiendo un tratamiento similar al apreciado en la propuesta curricular de 1952. Sin embargo, una mención adicional a los números reales se encuentra en los contenidos del Curso V de la propuesta de 1963. En este curso se propone estudiar inicialmente asuntos relativos a trigonometría; para ello, se hace una alusión a los números reales como cocientes entre segmentos orientados sobre una recta o entre ángulos orientados en un haz de rectas (ver Figura 3)

Figura 3. Mención a en los contenidos del Curso V

LOS NUMEROS REALES

Los números reales como cocientes entre segmentos orientados sobre una recta o como cocientes entre ángulos orientados sobre un haz de rectas.

Fuente: Colombia (1963, p. 167)

Se reconoce entonces un tratamiento geométrico de los números reales, que difiere del carácter aritmético de las anteriores aproximaciones y que permite reconocer a los números reales como una razón entre magnitudes orientadas.

3.2 $\mathbb{R}$ en la enseñanza de las matemáticas modernas

La enseñanza de la matemática moderna en Colombia tiene como antecedentes fundamentales las dos primeras versiones de la «Conferencia Interamericana de Educación Matemática» llevadas a cabo en 1961 en Bogotá y en 1966 en Lima. A través de estas se persuadió a las autoridades políticas y académicas a adoptar la propuesta y se establecieron recomendaciones para ello, respectivamente. Por su ubicación temporal en relación con la primera Conferencia, es poco probable que el Decreto 045 de 1962 (Colombia, 1962) acogiera de inmediato lo presentado en esta. No obstante, este presenta una configuración general (Cursos I y II: Aritmética y nociones de Geometría. Cursos III y IV: Álgebra y Geometría. Curso V: Trigonometría y elementos de Geometría Analítica. Curso VI: Iniciativa al análisis matemático) que revela un posible cambio importante frente a los programas de una década anterior; este cambio refiere a la exclusión de la Contabilidad y la Física y a la inclusión de una aproximación inicial al Análisis Matemático. Es probable que, para atender el nuevo contenido, $\mathbb{R}$ haya tenido que aparecer a través de un tratamiento diferente al reportado antes para el programa de 1952; sin embargo, en ausencia de los programas asociados al Decreto 045 de 1962, ni de los que se supone aparecieron en 1964, no es posible hacer inferencias razonables sobre su tratamiento.

En la década siguiente se generó una acción que formalizaría un nuevo programa de matemáticas. En efecto, el Decreto 080 de 1974 (Colombia, 1974) y la Resolución 277 de 1975 (Colombia, 1975) ofrecieron un marco normativo para adoptar unos «Programas de matemáticas» (MEN, 1975) para la educación media (cursos I a VI del Bachillerato). Los números reales aparecen inicialmente allí en la Unidad N.º 4 del «Curso III Álgebra y Geometría» (correspondiente hoy al grado 8.º). En esta se proponen cuatro objetivos específicos y cinco contenidos, como se observa a continuación:

Unidad N° 4 – Números Reales

4.1 Objetivos Específicos.

- 4.1.1. Redescubrir el origen de este importante conjunto
- 4.1.2. Identificar y aplicar las distintas propiedades de las operaciones definidas en este conjunto
- 4.1.3. Operar con propiedad y exactitud con números reales
- 4.1.4. Interpretar geométricamente números reales

4.2 Contenido:

- 4.2.1. El conjunto de los números irracionales. Interpretación geométrica de las raíces cuadradas
- 4.2.2. La Recta Real
- 4.2.3. Situación Aditiva en $\mathbb{R}$. Propiedades de la Adición en $\mathbb{R}$
- 4.2.3. Situación Multiplicativa en $\mathbb{R}$. Propiedades de la Multiplicación en $\mathbb{R}$
- 4.2.4. Situación Potenciativa en $\mathbb{R}$ (MEN, 1975, p. 7)

También hay una alusión a los reales en la «Unidad N.º 2» del «Curso V Geometría Analítica y Trigonometría» (correspondiente hoy al grado 10.º). En esta se relacionan tres objetivos específicos y cinco contenidos, como se muestra a continuación:

Unidad N° 2 – Estructuras Algebraicas

2.1. Objetivos Específicos.

- 2.1.1. Identificar correctamente la estructura de un conjunto, dados sus elementos y una ley de composición
- 2.1.2. Resolver ejercicios referentes a cada una de las estructuras aquí estudiadas
- 2.1.3. Leer, escribir e interpretar correctamente enunciados sobre estructuras algebraicas.

2.2. Contenido:

- 2.2.1. Concepto de estructura algebraica
- 2.2.2. Repaso de la estructura de grupo. Ejemplos.
- 2.2.3. Estructura de Anillo. Anillo de los enteros $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.
- 2.2.4. Estructuras de cuerpo. **El cuerpo de los reales** $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. El cuerpo de los racionales $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$
- 2.2.5. Ecuaciones que tienen solución en cada estructura (MEN, 1975, p. 11; el resaltado no está en el original)

A partir de lo anterior se puede resaltar que $\mathbb{R}$ aparece como una unidad temática específica del Curso III (actual grado octavo) y un caso de estructura algebraica en el Curso V (actual grado décimo), lo cual dista de la alusión a los números racionales e irracionales comentada para el programa de matemáticas de 1952 (Colombia, 1952). En cuanto a su tratamiento se identifica un interés por su interpretación, relacionada con las raíces cuadradas, su representación en la recta y las operaciones (adición, multiplicación y potenciación) y sus propiedades, así como su caracterización como estructura algebraica, específicamente como cuerpo. Precisamente estas condiciones ilustran bien el tratamiento escolar de $\mathbb{R}$ en el marco de la matemática moderna.

3.3 $\mathbb{R}$ en la Propuesta de Renovación Curricular de 1990 y 1991

En la segunda mitad de la década de los setenta y durante la de los ochenta, el MEN desarrolló un interesante proceso de diseño curricular para las matemáticas que pudiera mediar entre la enseñanza de las matemáticas modernas, ampliamente criticada por aquella época, y el movimiento *Back to basics*. Como resultado tangible de este proceso el MEN publicó capítulos para cada grado de la educación básica primaria y libros para cada uno de los cuatro grados de la básica secundaria; estos contenían una audaz propuesta de renovación curricular para las matemáticas en Colombia.

En los libros para grado octavo (MEN, 1990) y noveno (MEN, 1991) aparecen sendos tratamientos relacionados con los números reales. En efecto, la Unidad I de la propuesta para grado octavo se titula «Números Reales», mientras que la Unidad II de la propuesta para grado

noveno se titula «Sistemas con Números Reales». A continuación de manera sintética se describe el tratamiento de $\mathbb{R}$ en cada una de las unidades.

La Unidad I «Números Reales» (MEN, 1990, pp. 33-74) de la propuesta para grado octavo está configurada por tres secciones. En la «Introducción» se plantea que el sistema que se trabajará en esta unidad es el conjunto numérico de los reales, pero que ello incluye una construcción de estos; tal construcción acude al enfoque de operadores (ampliadores y reductores de longitudes). Además, a través de casos específicos de conmensurabilidad e inconmensurabilidad se hace evidente la necesidad de construir un conjunto más amplio que el de los racionales, con lo cual las relaciones entre longitudes sirven de sistema concreto para la construcción de sistemas conceptuales con números reales; estos, a su vez, se tratan por medio de un álgebra, entendida como un sistema simbólico. En la sección «Objetivos generales» y de manera coherente con lo planteado antes, se plantean seis propósitos que aluden a: analizar razones para construir los reales; construir los reales como operadores de longitudes; adquirir conocimientos introductorios a los reales, al álgebra de funciones y a los métodos de demostración; extender operaciones y relaciones; asignarle un lugar a las aproximaciones y fracciones decimales para trabajar con los reales; y desarrollar la mente. En la sección «Objetivos específicos, contenidos y sugerencias metodológicas», de aproximadamente 40 páginas, se proponen veinticinco objetivos específicos agrupados en trece grupos. Para cada uno de estos grupos se presentan los «Contenidos básicos» y las «Sugerencias metodológicas».

Previamente al contenido de esta unidad se han presentado unas «Recomendaciones generales», unos «Objetivos generales» y los «Contenidos» para las matemáticas de grado octavo. En esta última sección para los «Sistemas con números reales» se han determinado como contenidos:

- Operadores racionales: ampliadores y reductores de longitudes
- Conmensurabilidad e inconmensurabilidad de longitudes
- Operadores ampliadores y reductores que no son racionales (irracionales)
- Representación de operadores racionales e irracionales en la recta numérica
- Operador reflector
- El conjunto de los números reales: sistemas simbólicos
- Relación de orden aditivo en $\mathbb{R}$
- Operaciones en $\mathbb{R}$, $+$, $-$, $\times$, $\div$, potenciación, radicación y logaritmicación
- Propiedades de las operaciones en $\mathbb{R}$
- Formulación y resolución de problemas
- Formulación, interpretación y aplicación de algoritmos (MEN, 1990, p. 32)

Por su parte, la Unidad II «Sistemas con números reales» (MEN, 1991, pp. 77-110) de la propuesta para grado noveno está igualmente configurada por tres secciones. En la «Introducción» se presenta esta unidad como continuación de la Unidad I para grado octavo, ya referida. El propósito que se enuncia para la Unidad II del grado noveno, refiere a ofrecer oportunidades para el desarrollo de procesos y habilidades de pensamiento y, más específicamente, el desarrollo del álgebra mental, el álgebra verbal y el álgebra simbólica, así como el trabajo con el álgebra de números reales y el álgebra de funciones. En esta también, a partir de las relaciones de conmensurabilidad y de inconmensurabilidad, se construyen otros operadores reales. Se avanza, también, en el manejo de operadores unarios y de operaciones binarias, y se hace un trabajo relacionado con la formulación, análisis y solución de problemas y con la determinación de elementos de estructuras algebraicas y de orden. En la sección «Objetivos generales» se presentan siete enunciados coherentes con lo enunciado en la «Introducción» referida. En la sección «Objetivos específicos, contenidos básicos y sugerencias metodológicas», con poco más de 30 páginas, se presentan diez objetivos específicos agrupados en tres grupos. Acá también para cada uno de estos grupos se exponen los «Contenidos básicos» y las «Sugerencias metodológicas».

En la sección general de la propuesta curricular para grado noveno se han presentado los «Contenidos»; en estos bajo el título «Sistemas con números reales» aparece el siguiente listado:

- Otros operadores reales
- Diversos empleos de los símbolos en álgebra
- Operadores unarios
- Composición de operadores como función básica del análisis
- Estructuras de algunos sistemas con números reales
- Procesos de formulación, análisis, crítica y solución de problemas (MEN, 1991, p. 38)

Como se puede apreciar, el tratamiento que se hace del sistema con los números reales a través de estas dos unidades en los grados octavo y noveno es amplio y profundo, sobre todo al compararlo con el que se hace en los programas de 1975 (MEN, 1975). El desarrollo que se plantea en cerca de 70 páginas dista enormemente en extensión y profundidad de lo planteado en aquellos programas. Sobresale el intento por construir números reales, particularmente irracionales, y explorar la razón de ser de estos. Además, se reconoce un tratamiento riguroso y altamente conceptual de la expresión de $\mathbb{R}$ en los sistemas concreto, conceptual y simbólico. Se destaca, también, el tratamiento de las operaciones y relaciones en $\mathbb{R}$ y su conexión con

estructuras algebraicas y de orden, así como la identificación de problemas para los cuales $\mathbb{R}$ no es suficiente.

3.4 $\mathbb{R}$ en la educación matemática de un nuevo país

En 1991 Colombia finaliza la construcción de una nueva Constitución Política a través de la cual se expresa una nueva idea de país y un país nuevo. Bajo el reconocimiento de la diversidad, en sus diferentes expresiones, como condición de país se establece que la educación no puede ser homogénea ni debe pretender homogeneizar a la población; en razón a ello, se establece que el MEN, más que programas curriculares, debe proponer unos indicadores de logro y unos lineamientos curriculares. En esta dirección en 1996 se publica una resolución de indicadores de logros y en 1998 unos lineamientos curriculares para el área de matemáticas. Posteriormente, los gobiernos de turno promovieron la creación y adopción de estándares curriculares para las matemáticas. Cerca de una década después, en un intento de concretar estos para cada uno de los grados se dieron a conocer los derechos básicos de aprendizaje en relación con las matemáticas escolares. A continuación, se presenta información acerca del tratamiento de $\mathbb{R}$ en estos diferentes documentos.

3.4.1 $\mathbb{R}$ en la Resolución 2343 de 1996

En 1996 el MEN expide la Resolución 2343 (Colombia, 1996) que establece lineamientos generales de procesos curriculares e indicadores de logros curriculares. Estos últimos se caracterizan como:

indicios, señales, rasgos o conjuntos de rasgos, datos de información perceptibles que al ser confrontados con lo esperado e interpretados de acuerdo con una fundamentación teórica, puede considerarse como evidencias significativas de la evolución, estado y nivel que en un momento determinado presenta el desarrollo humano. (Colombia, 1996, p. 8).

En esta Resolución los indicadores se presentan para grupos de grados y no para cada grado específico; la agrupación contempla cinco grupos, a saber: grados del nivel preescolar; grados 1.º, 2.º y 3.º de educación básica; grados 4.º, 5.º y 6.º de educación básica; grados 7.º, 8.º y 9.º de educación básica; y grados 10.º y 11.º de educación media.

En cuanto a los indicadores del conjunto de grados de 7.º, 8.º y 9.º, las alusiones a los números reales son escuetas. El primer indicador para matemáticas reporta que un estudiante, al término de estos grados, “establece y usa relaciones entre distintos tipos de números” (Colombia, 1996, p. 42); sin embargo, no se explicita a cuáles números se hace referencia. En aras de rastrear más sutilmente, otro de los indicadores señala el reconocimiento de propiedades del inverso aditivo y del multiplicativo, lo cual sugiere un trabajo asociado a números enteros (con la idea de inverso aditivo) y de números racionales (con la idea de inverso multiplicativo);

pero, además, esto alude probablemente al estudio de propiedades algebraicas, lo que podría indicar el estudio de algunos sistemas numéricos particulares.

En el conjunto de grados de la educación media (10.º y 11.º), los números reales se hacen más ostensibles, en particular con los dos primeros indicadores: “Da razones del porqué de los números reales y explica por qué unos son racionales y otros irracionales” y “Utiliza el sentido de las operaciones y de las relaciones en sistemas de números reales” (Colombia, 1996, p. 50). Ahora bien, aunque hay menciones explícitas a los números reales, su tratamiento puede resultar ambiguo. Por ejemplo, expresiones como “da razones del porqué de los números reales” (p. 50) pueden aludir a que los estudiantes reconozcan la incompletitud de los números racionales, que conozcan motivaciones históricas para el avance en la construcción de los números reales (v. g., el concepto de irracionalidad o la necesidad de formalizar el cálculo) u otros elementos dependiendo del enfoque que se quiera dar (v. g., histórico, fenomenológico). En el mismo sentido, el segundo indicador tampoco precisa, por ejemplo, a cuáles relaciones del sistema de los números reales se hace referencia.

3.4.2 $\mathbb{R}$ en los Lineamientos

En 1998 se expidieron los «Lineamientos Curriculares de Matemáticas» (en adelante, LCM) (MEN, 1998). Si los indicadores de logro establecidos en la Resolución 2343 de 1996 podían llegar a presentarse descontextualizados y demasiado generales, los LCM dan un piso teórico a propuestas como de los indicadores a partir de consideraciones epistemológicas de las matemáticas, en relación con las matemáticas escolares. Además, establecen una estructura de procesos, conocimientos básicos (que son cinco y recuperan lo trazado en el enfoque por sistemas de la Renovación Curricular) y contextos que dialogan entre sí para la enseñanza de las matemáticas escolares. En este sentido, los LCM reconocen la autonomía curricular de las instituciones educativas y, a la vez, ofrecen un panorama amplio para la configuración de planes de estudio de matemáticas escolares. Así, los LCM se posicionan como orientaciones para profesores y diseñadores de currículos. Bajo este contexto, es posible rastrear la presencia de los números reales y de conceptos asociados a lo largo de los LCM.

Aunque uno de los conocimientos básicos es el denominado «pensamiento numérico y sistemas numéricos», en este se aborda fundamentalmente el sistema de los números naturales y hay alguna breve mención a los números racionales. Es decir, a pesar de lo abarcador del nombre del pensamiento, los números reales no hacen presencia en él. No es sino hasta el llamado «pensamiento métrico y sistemas de medidas» que se habla de la imposibilidad de capturar lo continuo a partir de acciones repetidas de forma discreta, específicamente:

Aunque las magnitudes que nos ocupan son de naturaleza continua, en los primeros ensayos tendientes a encontrar una estimación de sus medidas, la repetición reiterada de patrones susceptibles de ser contados mediante los números naturales parece ocultar el carácter continuo de dichas magnitudes. Podríamos decir que, en este caso, hay un esfuerzo por capturar lo continuo (magnitudes) con lo discreto (números naturales). (MEN, 1998, p. 44)

Este asunto, aunque no involucra de manera directa a los números reales, sí es una evidencia de la necesidad de considerar los números racionales, lo cual se puede considerar un camino hacia la construcción de los primeros.

Así mismo, en el «pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos» se presenta un listado de núcleos conceptuales relacionados con el proceso de variación, entre los que se encuentra el “continuo numérico, reales, en su interior los procesos infinitos, su tendencia, aproximaciones sucesivas, divisibilidad” (MEN, 1998, p. 49) siendo este un reconocimiento explícito no solo al conjunto de los números reales, sino también a la idea de continuidad, característica particular de este conjunto. Precisamente, en el mismo pensamiento se menciona que la idea del continuo numérico debe trabajarse a partir de escenarios numéricos y geométricos en los que cobre relevancia la necesidad de considerar la representación decimal de los números; es decir, se asume la importancia de estudiar la representación decimal como una alternativa a la fraccionaria, lo que da pie a pensar en los números irracionales como aquellos que no pueden ser representados como fracciones, entendidas estas con la idea convencional.

Finalmente, se hace una mención general a la continuidad de una función en el contexto del cálculo, con el fin de ejemplificar un teorema que relaciona la derivabilidad con la continuidad. Aquí, aunque no se nombran directamente a los números reales, se puede reconocer esta idea de continuidad como una del cálculo que opera fundamentalmente sobre el dominio de los números reales.

3.4.3 $\mathbb{R}$ en los Estándares curriculares

Como una forma de dar más orientaciones a los profesores sobre las formas en que los LCM podrían concretarse en las aulas, en 2006 se publican los «Estándares Básicos de Competencias Matemáticas» (en adelante, EBCM) (MEN, 2006). En los EBCM los números reales se relacionan en la descripción del «pensamiento numérico y los sistemas numéricos» (PNSN) y en la del «pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos» (PVSA). En la sección del PNSN se hace referencia al sentido numérico (aunque no se hace explícita la expresión) y cómo este se enriquece si se relaciona con el pensamiento métrico (vinculando con lo declarado en los LCM), particularmente en las relaciones «números naturales-conteo de cantidades discretas» y «números racionales y números reales-medida de magnitudes y

cantidades continuas». En lo referido al PVSAA, se configuran los números reales como prerrequisito para el abordaje de las funciones de variable real.

También se alude a que en la historia de la enseñanza de la aritmética escolar se han incluido, con el paso de los años, extensiones sucesivas de los sistemas numéricos (v.g., N, Q^+, Z, Q, R, C) y que estos, junto con sus sistemas de numeración (v.g., las notaciones algebraicas para los números irracionales y los números reales), representan gran carga cognitiva para los profesores y los estudiantes, así como dificultades didácticas para los maestros, por la complejidad epistemológica de los conceptos involucrados.

De otro lado, en este documento se refiere un poco al origen de los números reales en la historia de las matemáticas y a la vez se hacen visibles objetos matemáticos que se vinculan directamente con los números reales como la irracionalidad, el infinito, la conmensurabilidad, la completitud y la continuidad, así como algunos asuntos que resultan de interés en la comprensión de los números y, en especial, de los números reales, como los son sus representaciones. Así, se reconoce en ese documento, la importancia de las representaciones y la complejidad de los distintos sistemas numéricos en el desarrollo del pensamiento numérico de los estudiantes de la educación básica y media, por lo que su tratamiento debe ser progresivo y paciente.

De manera explícita, se incluyen seis estándares del PNSN que se refieren a los números reales o a propiedades de estos, ubicados en el ciclo 8.º - 9.º y en el último ciclo de la escolaridad colombiana, 10.º - 11.º, los cuales se precisan en el Cuadro 2.

Cuadro 2 – Estándares básicos de competencias matemáticas relacionados con los números reales

Estándares 8.º - 9.º (Al terminar noveno grado...)
• Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos. • Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos.
Estándares 10.º - 11.º (Al terminar undécimo grado...)
• Analizo representaciones decimales de los números reales para diferenciar entre racionales e irracionales. • Reconozco la densidad e incompletitud de los números racionales a través de métodos numéricos, geométricos y algebraicos. • Comparo y contrasto las propiedades de los números (naturales, enteros, racionales y reales) y las de sus relaciones y operaciones para construir, manejar y utilizar apropiadamente los distintos sistemas numéricos. • Establezco relaciones y diferencias entre diferentes notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada.

Fuente: MEN (2006, pp. 86, 88)

3.4.4 R en los Derechos Básicos

En los «Derechos básicos de aprendizaje de las matemáticas» (en adelante, DBA) (MEN, 2016), que de alguna manera puntualizan lo que se halla en EBCM (MEN, 2006), no se hace alguna alusión conceptual o discursiva sobre los pensamientos y sistemas o sobre otros aspectos del currículo escolar. Se presentan los DBA como un conjunto de «aprendizajes estructurantes» que incluyen conocimientos y habilidades para el desarrollo de las personas en áreas particulares, en este caso, en matemáticas; estos se organizan por grados individuales y, en relación con los números reales, se hallan nueve DBA, desde 8.º hasta 11.º grado (ver en el Cuadro 3).

Cuadro 3 – Derechos básicos de aprendizaje de las matemáticas relacionados con los números reales

Grado	DBA
8.º	1. Reconoce la existencia de los números irracionales como números no racionales y los describe de acuerdo con sus características y propiedades. 2. Construye representaciones, argumentos y ejemplos de propiedades de los números racionales y no racionales.
9.º	1. Utiliza los números reales (sus operaciones, relaciones y propiedades) para resolver problemas con expresiones polinómicas. 2. Propone y desarrolla expresiones algebraicas en el conjunto de los números reales y utiliza las propiedades de la igualdad y de orden para determinar el conjunto solución de relaciones entre tales expresiones. 3. Utiliza los números reales, sus operaciones, relaciones y representaciones para analizar procesos infinitos y resolver problemas.
10.º	1. Utiliza las propiedades de los números reales para justificar procedimientos y diferentes representaciones de subconjuntos de ellos. 2. Utiliza las propiedades algebraicas de equivalencia y de orden de los números reales para comprender y crear estrategias que permitan compararlos y comparar subconjuntos de ellos (por ejemplo, intervalos).
11.º	1. Utiliza las propiedades de los números (naturales, enteros, racionales y reales) y sus relaciones y operaciones para construir y comparar los distintos sistemas numéricos. 2. Justifica la validez de las propiedades de orden de los números reales y las utiliza para resolver problemas analíticos que se modelen con inecuaciones.

Fuente: Elaboración propia adaptada de MEN (2016, pp. 59, 66-67, 74, 81)

Como se observa, los DBA precisan asuntos concretos, particulares, enfocados en habilidades/acciones que el profesor pueda observar en sus estudiantes a través de su rol docente, grado a grado, relacionadas con la identificación y el uso de los números reales. No

obstante lo anterior, también se pueden reconocer algunos énfasis temáticos/conceptuales, tal es el caso del lugar asignado a la representación geométrica y a la decimal; incluso en esta última se hace alusión a «la exactitud vs. la aproximación» de algunos números reales a través de expresiones decimales. Asimismo, se puede advertir que se mantiene la alusión a los tres aspectos propios del sistema numérico (sus objetos, sus operaciones y relaciones) y a las propiedades asociadas a estos, así como a su abordaje como la unión disjunta entre números racionales y números irracionales. También se mantiene el lugar tanto de las propiedades de las operaciones (algebraicas) como de las de la relación de orden entre números reales, así como la densidad y la importancia de diferenciar, a través de distintas propiedades, diversos sistemas numéricos.

CONCLUSIONES

El recorrido histórico presentado evidencia el carácter vivo del currículo y, particularmente, de $\mathbb{R}$ como objeto de las matemáticas escolares en Colombia. Este tránsito desvela transformaciones en el contenido no siempre transparentes para sectores de las comunidades de práctica docente o de las comunidades académicas de educadores matemáticos.

En este escenario, se logran reconocer aspectos inéditos del tratamiento escolar de $\mathbb{R}$. Uno de estos refiere al crecimiento curricular de $\mathbb{R}$ durante la segunda mitad del siglo xx. De una alusión como tema de una unidad temática para grado 9.º en un programa de 1952 (Colombia, 1952), en un tránsito de aproximadamente un par de décadas en el marco del movimiento de enseñanza de la matemática moderna, se llega a su tratamiento como una unidad temática del grado 8.º y un ejemplo de estructura algebraica en el grado 9.º (MEN, 1975). Luego, mediado por un proceso de análisis crítico y posibilidades de innovación curricular, se plantean para $\mathbb{R}$ procesos constructivos que conllevan a un abundante y detallado tratamiento escolar en sendas unidades temáticas en los grados 8.º y 9.º (MEN, 1990; 1991). Posteriormente, en el marco de profundas transformaciones sociopolíticas que impactaron el ámbito educativo, antes de finalizar el siglo se retoman algunos tratamientos de $\mathbb{R}$ en los documentos que, a modo de derroteros curriculares (ya no planes de estudio), se van poniendo en consideración de la comunidad educativa, para orientar la actividad educativa escolar en matemáticas (Colombia, 1996; MEN, 1998). Bajo este contexto de cambio curricular se adoptan luego disposiciones que buscan favorecer tanto la evaluación de la calidad educativa, como la

gestión docente en las aulas e instituciones educativas; se desarrolla entonces un proceso de tránsito de la generalidad a la especificidad y concreción curricular que en los planteamientos curriculares del MEN (2006, 2016) tiene expresiones singulares. Así, en cierto sentido, $\mathbb{R}$ logra concretar su lugar en el desarrollo del pensamiento/sentido numérico y se decanta un marco de evidencias de aprendizaje que orientan el quehacer docente para favorecer aspectos específicos del aprendizaje de las matemáticas a través del estudio de $\mathbb{R}$.

Las transformaciones en el contenido de las matemáticas escolares, además del crecimiento curricular, también aluden a transformaciones de orden epistémico y didáctico en el tratamiento de $\mathbb{R}$. Los números irracionales, entendidos como «complemento de los números racionales», pasaron de emerger exclusivamente en el estudio de los radicales (Colombia, 1952; 1963) a ser abordados a partir de las características, representaciones y propiedades que los diferencian de los racionales (MEN, 2006; 2016). Por su parte, el estudio del sistema de los reales como un ejemplo de estructura algebraica de cuerpo apareció explícitamente en 1975; perspectiva que, de forma indirecta, permanece en la actualidad mediante la insistencia en reconocer y utilizar propiedades algebraicas y de orden para comparar este sistema con otros.

Asimismo, se advierte una tensión entre las miradas aritmética y geométrica de $\mathbb{R}$, pues se transita de una perspectiva aritmética asociada a radicales (Colombia, 1952; 1963) hacia una aritmético-geométrica que identifica a los reales con cocientes entre magnitudes orientadas (Colombia, 1963). Posteriormente, emerge un foco geométrico explícito con la interpretación de las raíces cuadradas (MEN, 1975), el cual se fortaleció mediante la consideración teórico-histórica de la (in)conmensurabilidad y el tratamiento de las longitudes como expresiones de los números reales (MEN, 1990). No obstante, esta relación geométrico-aritmética tiende a desvanecerse en las orientaciones curriculares más recientes (MEN, 2006; 2016), particularmente en los DBA (MEN, 2016) en donde es nula; evidencia de ello es que la recta real como representación por antonomasia de los reales solo tuvo protagonismo normativo hasta los documentos de 1990.

A esta pérdida se suma que ciertos atributos complejos de $\mathbb{R}$ se presentan de manera fragmentada o tardía. Propiedades críticas como la densidad y la incompletitud de los racionales solo se mencionan en las orientaciones de 2006, lo que abre el interrogante sobre si es posible –y de qué manera– que un estudiante colombiano al término del grado 11.º reconozca la incompletitud de los racionales. Paralelamente, la asociación directa de los irracionales con el tratamiento algebraico de ecuaciones polinómicas aparece rezagada hasta las orientaciones de 2016. Esta tendencia se repite en el énfasis reciente sobre las representaciones del objeto (MEN, 2006; 2016), el cual no profundiza en cuáles implementar más allá de las expresiones decimales,

y en la vinculación de los reales con procesos infinitos, confinada a las propuestas de los años noventa (MEN, 1990) y a enunciados específicos de los DBA (MEN, 2016).

Esta intrincada evolución curricular sitúa a la comunidad académica ante una problemática vigente. Frente a la complejidad intrínseca del sistema de los números reales, los intereses de los adolescentes actuales y los vaivenes en las orientaciones oficiales de los últimos 75 años –caracterizadas hoy por derroteros generales no actualizados formalmente desde hace dos décadas y unos DBA con niveles dispares de apropiación–, cobra total relevancia cuestionarse: ¿cuál es el conocimiento curricular sobre $\mathbb{R}$ que tienen los maestros de matemáticas que actualmente enseñan en la educación secundaria y media colombiana?, y ¿cómo este se materializa en la enseñanza de los números reales *in situ*?

Por otra parte, otro aspecto que caracteriza el carácter vivo del currículo refiere a que este no solo se expresa en las propuestas oficiales, sino también en los libros de texto. Estos, son parte fundamental del currículo propuesto y, por tanto, un análisis de este debería contemplar su estudio. Naturalmente, el análisis, desde una perspectiva histórica, de los libros de texto de matemáticas que han acompañado los diferentes hitos de desarrollo curricular de $\mathbb{R}$ ampliaría el ámbito de expresión del currículo propuesto y brindaría una visión complementaria y naturalmente enriquecedora a la presentada en este documento.

Finalmente, es necesario reconocer que la dinámica curricular tendría una mayor y mejor descripción si se dispone de un mayor acervo documental. En este sentido, y bajo la experiencia de estudio de la historia curricular de $\mathbb{R}$ base de este documento, se considera totalmente necesario mantener una dinámica que permita acopiar mayor documentación sobre el currículo de matemáticas propuesto en diferentes momentos de la historia colombiana de la educación.

AGRADECIMENTOS

Este estudio fue realizado con el apoyo de la Universidad Pedagógica Nacional, Subdirección de Gestión de Proyectos – CIUP, a través del financiamiento del proyecto de investigación «Valoración de aprendizajes sobre números reales logrados a través de la implementación de una tarea diseñada para la formación inicial de profesores de matemáticas - VAR» (DMA 710-25).

REFERENCIAS

- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. C. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Colombia. (1952). *Resolución 349 de 1952 “por la cual se fija un programa para bachillerato”*. Ministerio de Educación Nacional.
- Colombia. (1962). *Decreto 045 de 1962*. Presidencia de la República.
- Colombia. (1963). *Programas Analíticos de Matemáticas y Física para el primero y segundo ciclos de educación media*. Ministerio de Educación Nacional.
- Colombia. (1974). *Decreto 080 de 1974*. Presidencia de la República.
- Colombia. (1975). *Resolución 277 de 1975*. Ministerio de Educación Nacional.
- Colombia. (1996). *Resolución 2343 de 1996*. Ministerio de Educación Nacional.
- Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-Specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372-400. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.39.4.0372>
- Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (1975). *Programas de Matemáticas. Adoptados por Resolución 277 de Febrero 4 de 1975*. Ministerio de Educación Nacional.
- Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (1990). *Matemáticas. Marco general. Propuesta Programa Curricular. Octavo grado de Educación Básica*. Ministerio de Educación Nacional.
- Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (1991). *Matemáticas. Marco general. Propuesta Programa Curricular. Noveno grado de Educación Básica*. Ministerio de Educación Nacional.
- Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (1998). *Matemáticas. Lineamientos curriculares*. Ministerio de Educación Nacional.
- Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. En *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. (1st ed., pp. 46–94). MEN. Imprenta Nacional. <https://www.mineducacion.gov.co/1621/article-116042.html>
- Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje. Matemáticas. v.2*. <https://www.colombiaaprende.edu.co/recurso-coleccion/derechos-basicos-de-aprendizaje-en-todas-las-areas>
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14. <https://doi.org/10.3102/0013189X015002004>