HISTEMAT – Revista de História da Educação Matemática
Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISBN 2447-6447

ESTUDIO SOCIOEPISTEMOLÓGICO DEL TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD EM LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Rodolfo Fallas Soto[1]
Ricardo Cantoral Uriza[2]

RESUMEN

Desde el enfoque socioepistemológico, se muestran aportaciones tomadas de la historia que influyeron en la construcción del teorema de existencia y unicidad de soluciones de la ecuación diferencial y' = f(x, y). Se analizan las obras originales, primarias y secundarias, que ayudaron a la problematización de este conocimiento y determinar su génesis, ofreciendo una reconstrucción de su significado desde su uso, dando importancia a las prácticas que ayudaron en la construcción de este conocimiento que definieron la evolución de las ideas alrededor de la solución de la ecuación para convertirse en el teorema que hoy conocemos.

Palavras-chave: Socioepistemología. Existência. Unicidade. Ecuaciones diferenciales.

ABSTRACT

According to socioepistemological approach, this contribution aims to show the historical influences that contributed to construct the existence and uniqueness theorem for the solutions of the ordinary differential equation y'=f(x, y). Primary and secondary, originals works are analyzed, these made a contribution to the genesis and problematization of this knowledge. A main topic is the reconstruction of meaning from the use, emphasizing the practices that define the evolution of the ideas, about the equation's solution, that helped to develop the current theorem.

Keywords: Socioepistemology. Existence. Uniqueness. Differential equations.

INTRODUÇÃO

En este escrito se reporta los resultados de una investigación sobre el teorema de existencia y unicidad para las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Seguimos un enfoque teórico desde la Socioepistemología que no se limita a la reproducción cronológica de las aportaciones de connotados matemáticos, ni tampoco se circunscribe a la reinterpretación "presentista" de dicho teorema, sino que enfrenta desde

[1] Estudiante de doctorado del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México, E-mail: rfallass@cinvestav.mx
[2] Investigador del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México, E-mail: rcantor@cinvestav.mx

una vista sistémica una posible reconstrucción de su significado a la luz de las prácticas usadas en su desarrollo.

El objetivo final, será mostrar los elementos y una interpretación de la construcción que tuvo las nociones matemáticas relacionadas con este teorema, modificando la manera de cómo se usa actualmente este conocimiento al ofrecer un cambio de la relación con el conocimiento de quien lo estudie, todo ello se basa en la investigación de Fallas–Soto (2015).

Esta noción de "cambio de relación al conocimiento" habla de construir una nueva interpretación del objeto (del teorema en este caso), nace de realizar una problematización del saber, desde el enfoque socioepistemológico, donde se encuentran los significados de dicho conocimiento al momento de ser puesto en uso. Entonces la *problematización* desde este enfoque, consiste en realizar un doble estudio cuyos elementos, *historizar y dialectizar*, son la base para estudiar la evolución del teorema en su paso por la historia y de este modo, sirve también para explicitar y analizar el cómo sus nociones matemáticas asociadas, intervenían entre ellas para fundamentar el teorema hasta el punto en que le conocemos actualmente. Esto es, se adentra en el estudio de la construcción que vivió el teorema de existencia y unicidad en las ecuaciones diferenciales ordinarias, hasta su consolidación en la obra didáctica. Resulta sin embargo ilustrativo, que no todo lo que ocurrió en dicha historia, quedó plasmado en los libros de texto universitarios.

La hipótesis de partida radica, en que detrás de los argumentos que fundamentan al teorema con todos sus detalles, hay un "hilo conductor" que debe organizar las condiciones para la existencia y la unicidad de su solución. Este eje corresponde a la práctica socialmente compartida de *predicción*, que se describirá a lo largo del escrito y será retomada en las conclusiones. Se probará dicha hipótesis mediante el empleo de un recurso metodológico denominado *descentración del objeto*, esto es, se comienza con el estudio de las *prácticas* que ayudaron a construir al objeto como resultado de realizar la problematización que sugiere la Socioepistemología.

Otra conclusión relevante para este trabajo, es que existe una ruptura entre la didáctica actual y la didáctica de antaño, es decir, cómo se originó y comunicó el problema en otras épocas. Puesto que en el tratamiento escolar el teorema se reduce a una comprobación de hipótesis, que con frecuencia se vuelve trivial o por el contrario, se dificulta su prueba; generando una pérdida de significado para quién aprende y la esencia o el papel de la existencia y unicidad en la solución se desdibuja. La pregunta ¿qué significa que exista y sea única la solución de la ecuación?, abrió la puerta de esta investigación.

El curso de esta investigación dio inicio al momento de buscar un significado a la existencia y unicidad de la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Se concluyó al brindar un significado alternativo para la solución de la ecuación diferencial a partir del uso que tuvo en otras épocas, este uso está asociado a la necesidad de entender tanto la existencia, como la unicidad y sobre todo la estabilidad como elementos característicos de la solución y de su naturaleza.

PROBLEMÁTICA

Esta investigación inicia por las interrogantes o por los vacíos que quedaban en el tratamiento escolar al presentar de "forma canónica" al teorema de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales de primer orden. Dicho teorema presenta un significado en la matemática escolar en la comprobación de hipótesis o en la semi demostración. Sin embargo, con esta investigación se pretende dotar de significado a partir del uso de las hipótesis y las nociones matemáticas que presenta el teorema. Este uso se estudia desde la construcción que tuvo el teorema y como lo abordaron matemáticos de la época.

El teorema de existencia y unicidad en las ecuaciones diferenciales ordinarias se presenta en las aulas de la siguiente manera, se define una región en el plano y se agrega un condicional del tipo si A∧B→C, es decir: Sea R una región rectangular del plano xy, definida por $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, que contiene el punto (x_0, y_0). Si $f(x,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en R, entonces existe un rectángulo I centrado en x_0, y una función única $y(x)$ definida en I, que satisface el problema de valor inicial expresado por la ecuación $y' = f(x,y)$ (Zill, 1997).

Al plantearse el teorema de esta forma en los libros de texto, se forma un discurso dominante que se repite semestre a semestre, en lo que la Socioepistemología denomina el discurso matemático escolar (dME), que es visto como un sistema de razón que legitima cierta forma de tratamiento escolar. Lo anterior plantea una posible hipótesis didáctica, resulta factible suponer que el no entendimiento de este teorema se deba a su presentación escolar en las aulas, normadas por el dME. Ahora bien, cabe un cuestionamiento posterior, ¿se podría iniciar el tratamiento escolar del teorema mediante un acercamiento distinto?

Esta investigación mostró que esto sería posible después de realizar una problematización del saber basada en la construcción social del conocimiento, un enfoque que busca dotar significados a partir del uso que se le dé en escenarios diversos, se requiere de la construcción del teorema y de las prácticas que dan esencia y significado a la existencia y unicidad de la solución.

La hipótesis de investigación estuvo ligada al problema del significado en matemáticas, pues la forma en cómo se presenta el teorema de existencia y unicidad no parece deducirse del mundo de las prácticas o propiamente de los usos, ni tampoco de la *matemátización de la naturaleza* como ocurrió con otros temas, sino llegan a nuestros días por otras fuentes de significado. Por lo tanto, el problema, ¿cuáles son los principios que dan significado a las nociones de existencia y unicidad como características específicas de la naturaleza de la solución? Como hipótesis del trabajo, se asume que detrás de los argumentos presentados en las principales fuentes estudiadas, existe todo un mundo de prácticas que condujeron a la construcción del teorema. Se puede afirmar que hay un hilo conductor que organiza las condiciones para la existencia y la unicidad. Este eje correspondiente con la práctica de la predicción vertebró al teorema. Sin embargo, los libros de texto actualmente lo obvian, esto es parte de una de las conclusiones de este trabajo y que se anticipa en este momento. Si bien se sabe que la ecuación diferencial es un modelo predictivo, al modelar fenómenos físicos, no es trivial afirmar que lo mismo ocurre para las condiciones necesarias para la existencia y unicidad, las que también forman parte de un modelo predictivo. Este hallazgo es la mayor aportación teórica de esta investigación, se verá esto en las siguientes secciones.

En síntesis, el objetivo de la investigación consistió en *significar los constructos presentes en el teorema local de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales ordinarias, a partir del estudio sobre su construcción social, todo mediante el conocimiento puesto en uso en obras matemáticas clásicas que definieron el rumbo de la evolución de estas ideas.*

ANTECEDENTES

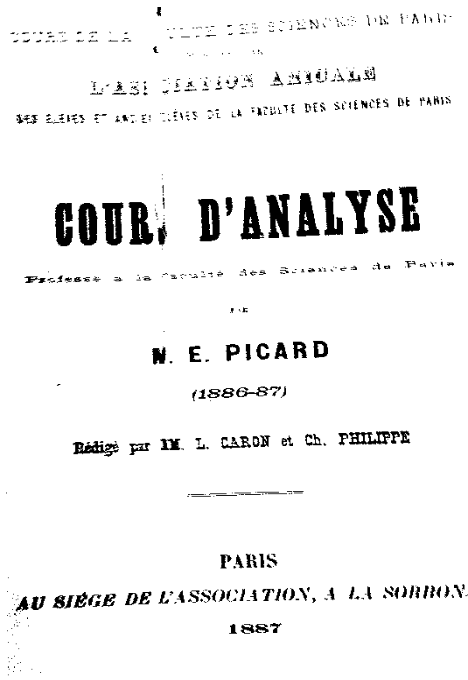
La primera acción consistente en la búsqueda bibliográfica de trabajos relacionados al teorema de existencia y unicidad dio inicio con fuentes secundarias, con el fin de determinar una línea histórica que marcara la evolución que tuvo la construcción del teorema de existencia y unicidad. Con esta guía, se buscó, posteriormente, entre un cúmulo de literatura escrita en diversas lenguas, aquellas obras primarias y fuentes secundarias que se ocuparan del tema de interés.

De acuerdo con los análisis históricos sobre las ecuaciones diferenciales, (Molero et al., 2012) consideran cinco etapas constitutivas para esta rama de las Matemáticas. Mencionan que alrededor del año 1820 es cuando A. Cauchy (1789-1857) muestra el enunciado y estudia el teorema de existencia, lo que dota de un nuevo rigor a las ecuaciones diferenciales. Más adelante, hacia 1880, E. Picard (1856-1941) aborda el teorema de existencia. Además (Molero et al., 2012) mencionan que G. Peano (1858-1932) trató la existencia local de soluciones e introdujo las inecuaciones diferenciales dando el argumento fundamental de que el ínfimo de las súper – soluciones y el supremo de las sub – soluciones son soluciones, sin embargo esté método no es válido para sistemas de ecuaciones diferenciales. Por último, mencionan que R. Lipschitz (1832-1903) fue el primero en abordar los criterios de unicidad, C. Jordan (1838-1922) los simplificó, mientras que el método de O. Perrón, de 1926, unificó y mejoró los métodos anteriores.

Por otro lado (Nápoles & Negrón, 2002) acercándose al problema de existencia de la solución, comienzan mencionando el estudio de la obra de L. Euler (1707-1783) con el método de "las quebradas", el cual se utiliza hoy en día como método numérico para aproximar la solución, esto mismo lo continúa Cauchy, demostrando tan importante teorema presentado por vez primera en sus conferencias dadas en 1820 – 1830 bajo el título "*Exposition d'une méthode à l'aide de laquelle on peut intégrer par approximation un grand nombre d'equations diffeéerentielles au premier ordre*", método con invaluable valor doble, el histórico y el metodológico. Además, que es un método constructivo que, asumiendo la convergencia de la solución, se asegura su existencia. Como veremos más adelante, este fue el mayor argumento de Cauchy para justificar la existencia de la solución.

Después de esto, se inicia con la búsqueda de la obra de Picard, ya que en los libros de textos actuales se estudian las *Aproximaciones Sucesivas de Picard* que sirve de argumento para demostrar que la solución existe. En la obra de Picard que data de 1886 llamada "*Cours D' Analyse*" el autor en la lección 39 que abarca la teoría de las ecuaciones diferenciales, más específicamente en la página 293, hace referencia de lo importante que son los trabajos realizados por Cauchy, Moigno y Lipschitz, con respecto al estudio de la existencia y unicidad, tal como se muestra en las siguientes ilustraciones.

Ilustración 01 – Portada de la obra de E. Picard llamado *Cours D' Analyse*


COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

L'ASSOCIATION AMICALE

DES ÉLÈVES ET ANCIENS ÉLÈVES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

COUR, D'ANALYSE

Professé à la Faculté des Sciences de Paris

PAR

M. E. PICARD

(1886-87)

Rédigé par MM. L. CARON et Ch. PHILIPPE

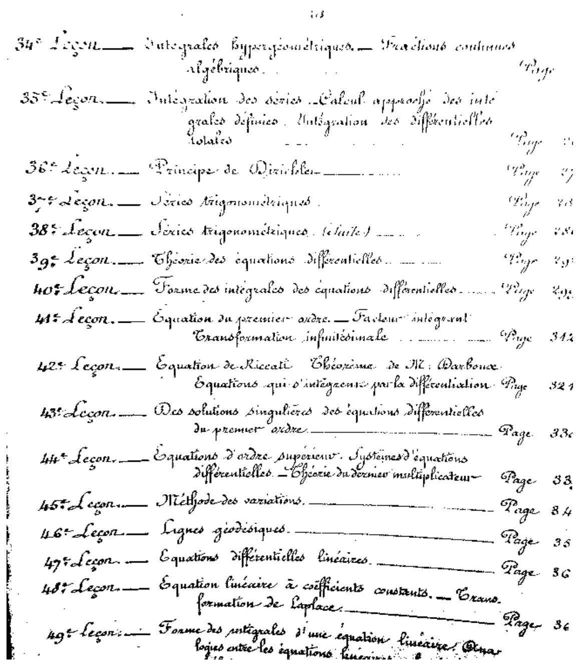
PARIS

AU SIÈGE DE L'ASSOCIATION, A LA SORBONNE

1887

Fonte: Picard, 1887.

Ilustración 02 – Parte del índice la obra *Cours D' Analyse*



Fonte: Picard, 1887.

Ilustración 03 – Fragmento de *Cours D' Analyse*.

zéro. C'est ce que Cauchy a établi par une analyse très longue que nous n'exposerons pas (Voir Leçons de calcul différentiel et intégral rédigées par M. Moigno, 1844). M. Lipschitz(1) a simplifié un peu l'analyse de Cauchy. Il résulte de ces recherches le théorème fondamental suivant :

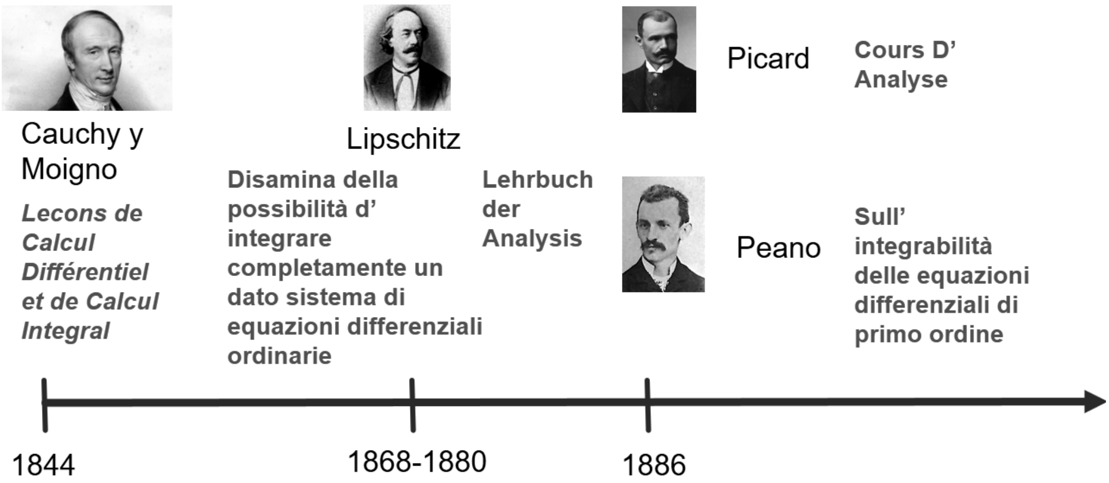
Fonte: Picard, 1887, p. 293.

A partir de estas investigaciones de corte histórico y lo referenciado en la obra de Picard es que se decide considerar las siguientes fuentes que serán clave para el estudio del teorema de existencia y unicidad de la solución; en estricto orden cronológico, las obras son:

- (Cauchy & Moigno, 1844), obra llamada "Lecons de Calcul Différentiel et de Calcul Integral" (Lecciones de cálculo diferencial y el cálculo integral).
- (Lipschitz, 1880), obra titulada "Lehrbuch der Analysis" (Lecciones de análisis)
- (Lipschitz, 1868) artículo con el título "Disamina della possibilità d' integrare completamente un dato sistema di equazioni differenziali ordinarie" (Examen sobre la posibilidad de integrar completamente un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias dado)
- (Peano, 1973) artículo retomado del original correspondiente al año 1885-1886, llamado: "Sull' integrabilità delle equazioni differenziali di primo ordine". (Sobre la integrabilidad de la ecuación diferencial de primer orden)
- (Picard, 1886) obra llamada "Cours D' Analyse" (Curso de análisis)

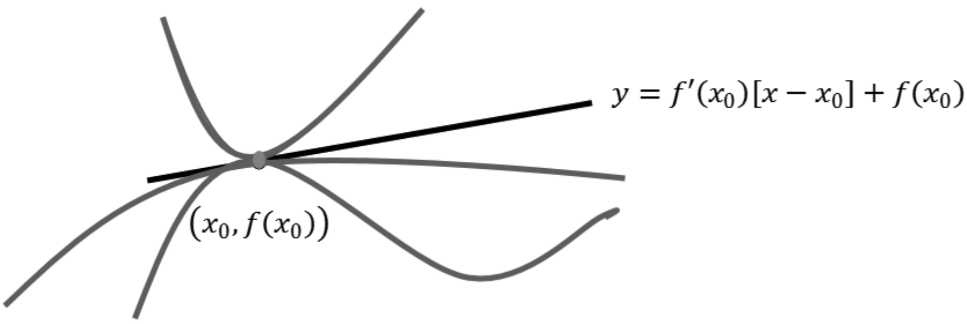
Esta documentación historiográfica, es la que permitió el desarrollo de la línea del tiempo alrededor del teorema de existencia y unicidad (Ilustración 04).

Ilustración 04 – Recorrido histórico de la construcción del teorema de existencia y unicidad



Por otro lado, un problema típico del Cálculo Diferencial, es determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto dado. Ahora, si se plantea el problema inverso, tendríamos lo siguiente: dado el punto $(x_0, f(x_0))$ y dada la recta con pendiente $f'(x_0)$ que es tangente a una curva que pasa por ese punto, entonces, determine "la" curva para la cual, la recta es tangente (Ilustración 05).

Ilustración 05 – Problema inverso de la recta tangente



Pareciera ser por simple inspección, que son infinitas soluciones, pero si acaso ¿es una única solución?, cómo saberlo si además se conocen las condiciones iniciales y de frontera de la ecuación diferencial ordinaria. Este problema, que aparece al inicio de las ecuaciones diferenciales, aportará fuertemente en la tarea de visualizar los constructos que llevan a cabo en otras épocas y que pueden ser reconstruidos desde sus obras.

EXPLICACIÓN METODOLÓGICA

Desde la teoría Socioepistemológica, la construcción social del conocimiento matemático, se encarga de incluir en dicha construcción al papel de los escenarios históricos, culturales e institucionales que se llevan a cabo durante la actividad humana al construir conocimiento (Cantoral, 2013). Esto se realiza, en esta investigación, siguiendo las siguientes etapas metodológicas.

Como metodología del trabajo, se realiza una reconstrucción racional del estudio de la existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales. En una primera etapa se buscan y se hace lectura de los trabajos matemáticos de la época, trabajos que ayudaron a la construcción de este conocimiento, tanto de las fuentes primarias que corresponden a las obras originales, así como las fuentes secundarias, en este caso los artículos. La segunda etapa, como parte de un análisis documental, corresponde la labor de reconstruir, desde esta interpretación, todos los elementos utilizados en las obras matemáticas para el estudio del teorema de existencia y unicidad, esto brinda aportes para la implementación y el desarrollo intencional de prácticas.

Para obtener las conclusiones del trabajo se finaliza al realizar una confrontación entre las obras matemáticas (también utilizadas para la enseñanza) presentes a finales del siglo XIX e inicios del XX, con los libros de texto que se tienen en el siglo XX y en la actualidad, libros que de cierta forma norman al dME. Tal y como menciona Cantoral (2013), es plantearse ese “ir y venir” entre la historia de las prácticas y la práctica educativa contemporánea. De esto se obtienen procesos y enunciaciones de las prácticas utilizadas, que se destacarán en el estudio de la descentración de los objetos matemáticos, utilizando las argumentaciones que aporten a la construcción social de este conocimiento.

DATOS

Se inicia con el estudio de la obra *Leçons de Calcul Différentiel et de Calcul Integral* (Cauchy & Moigno, 1844), los autores dedican dos lecciones para describir el problema de existencia de una solución. En la lección veintiséis realizan la exposición de uno de los métodos rigurosos que ayuda a demostrar la existencia de un valor y (función), que verifica una ecuación diferencial de primer orden y calcular dicho valor con una aproximación dada. Se trabaja con el cálculo infinitesimal y un procedimiento heredado de Euler para la aproximación de la solución dada las condiciones iniciales. En la lección veintisiete los autores profundizan con las hipótesis que se deben cumplir para que dicha solución exista. En esta sección mencionan que para la ecuación diferencial $y' = f(x,y)$ con las condiciones iniciales $x = x_0$ y $y = y_0$ debe cumplir la continuidad de $f(x,y)$ y $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ continuas alrededor del punto (x_0, y_0).

De la aportación de Lipschitz tenemos el perfeccionamiento del método utilizado por Cauchy y Moigno, ampliando las condiciones de continuidad dado por ellos. Lipschitz mostró que los resultados anteriores acerca del teorema de existencia de la solución se mantienen, al no asumir la existencia y continuidad de $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, en cambio para ello, ofrece otra hipótesis más débil que corresponde a la condición de Lipschitz. Además, generaliza su teorema para el estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales.

De su obra, *Lehrbuch der Analysis*, en el capítulo XI, (Lipschitz, 1880) inicia con la sección 82 y presenta el siguiente problema, al determinar la solución de la ecuación diferencial.

Luego en un artículo titulado *Disamina della possibilità d'integrare completamente un dato sistema di equazioni differenziali ordinarie* (Lipschitz, 1868) resume lo trabajado en su obra Lehrbuch der Analysis, en donde el autor presenta una generalización del método utilizado por Cauchy para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden, y posterior trabaja el caso particular de la EDO de primer orden. De este trabajo, rescatamos las ideas más importantes, logrando una demostración de la existencia y unicidad de la solución sin necesidad de la hipótesis de que $\frac{\partial f}{\partial y}$ sea continua y suponiendo la condición de Lipschitz.

En el presente trabajo del matemático Peano, titulado *Sull' Integrabilità delle Equazioni Differenziali di Primo Ordine* (Peano, 1973), demuestra el teorema de existencia de la solución de la ecuación diferencial de primer orden usando sólo la condición de continuidad. Está demostración es análoga a la que se realiza con sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden.

De la obra de Picard (1886), se desarrolla un poco de Teoría de ecuaciones diferenciales. Su obra llamada "Cours D'Analyse" lo realiza cuando él es profesor de la

Facultad de Ciencias de París. En esta obra Picard desarrolla la teoría de las ecuaciones diferenciales en la lección 39, luego de estudiar en las lecciones previas al Cálculo Diferencial, Integral y Vectorial. Hace mención de los matemáticos Cauchy y su alumno Moigno, así como de Lipschitz para profundizar en el teorema de existencia y unicidad al que llama Teorema de Cauchy.

RESULTADOS

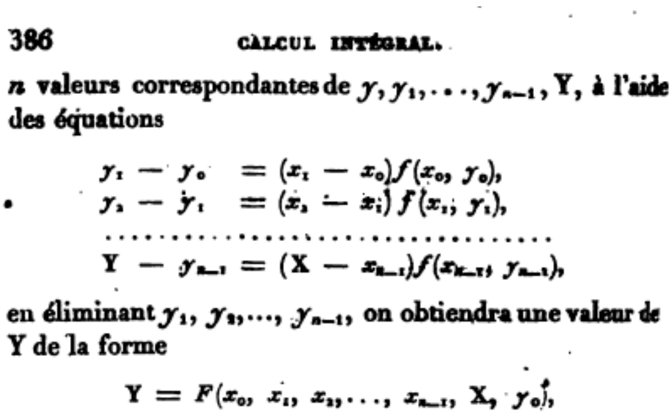
En este apartado analizamos los argumentos asociados a la existencia y unicidad que se pudieron documentar en el estudio de las obras matemáticas, ofreciendo la interpretación personal. Por una parte, tenemos el trabajo realizado por Cauchy y Moigno donde trabajan con dos hipótesis para la existencia. Por otro lado, el trabajo de Lipschitz que sustituye la hipótesis de la continuidad de la derivada parcial de la función $f(x,y)$ con respecto a la variable y, mediante otra condición, asegurando existencia y unicidad. Por último, en la obra de Peano quien trabaja solamente con la hipótesis de que $f(x,y)$ sea continua.

CONSTRUCCIÓN DE LA EXISTENCIA POR PARTE DE CAUCHY & MOIGNO

Igualmente, trabajando bajo la misma ecuación $y' = f(x,y)$ con las condiciones iniciales (x_0, y_0) se quiere estudiar la existencia de la solución. Tomando de hipótesis que $f(x,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son funciones continuas Prácticamente los autores lo realizan en tres partes con apoyo del Cálculo Infinitesimal.

1. Primero quieren probar la convergencia de la sucesión de puntos obtenidos por el método de las quebradas.

Ilustración 06 – Lección 26 de la obra *Leçons de Calcul Différentiel et de Calcul Integral*


386 CALCUL INTÉGRAL.

n valeurs correspondantes de $y, y_1, \ldots, y_{n-1}, Y$, à l'aide des équations

$$y_1 - y_0 = (x_1 - x_0) f(x_0, y_0),$$
$$y_2 - y_1 = (x_2 - x_1) f(x_1, y_1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Y - y_{n-1} = (X - x_{n-1}) f(x_{n-1}, y_{n-1}),$$

en éliminant $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, on obtiendra une valeur de Y de la forme

$$Y = F(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, X, y_0),$$

Fonte: Cauchy & Moigno, 1844, p. 386.

2. Prueban la continuidad de esa función que corresponde a la convergencia de la sucesión.
3. Por último, comprueban que esa función cumple con la ecuación diferencial.

Para probar la primera parte, se basan en el procedimiento de las quebradas. Recuerde que con él método se tiene que

Ilustración 07 – Primera iteración del método de las quebradas

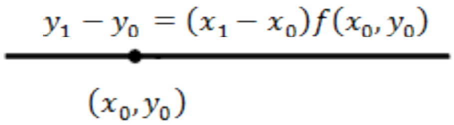
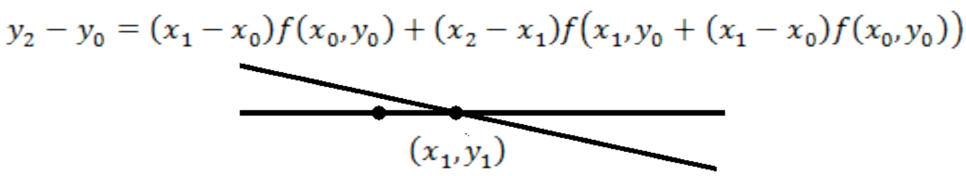


Ilustración 08 – Segunda iteración del método de las quebradas

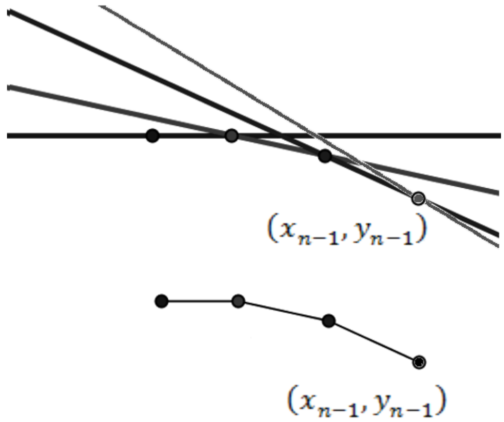


Por lo tanto, se generaliza y aproxima que $y - y_0 = \pm\Theta A(x_n - x_0)$ donde A es un promedio de las $f(x_n, y_n)$ y Θ un valor entre 0 y 1.

Entonces los autores generalizan lo anterior al asegurar que el valor:

Ilustración 09 – N-ésima iteración obteniendo una aproximación numérica de la solución

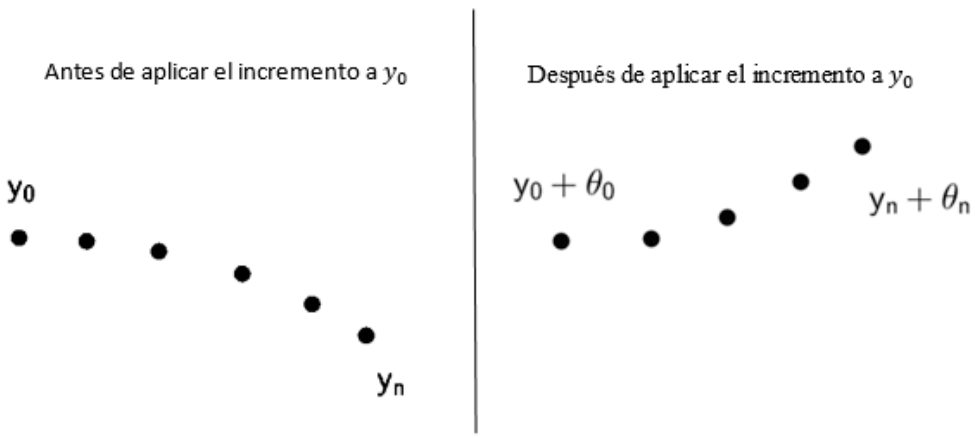
$$y_n = y_0 + (x_n - x_0)f\big(x_0 + \theta(x_n - x_0), y_0 \pm \Theta A(x_n - x_0)\big)$$



Del cual y_n corresponde prácticamente del mismo valor que y_0 si la diferencia $x_n - x_0$ es muy pequeña. En otras palabras, si $x_n \to x_0$ entonces $y_n \to y_0$.

Ahora estudian la convergencia de la siguiente manera, si se le realiza un incremento pequeño ς_0 a y_0, entonces y_n tendrá un incremento ς_n. Para que converja, este último incremento debe ser igual de pequeño que ς_0. Lo anterior pues se busca la estabilidad de la función y para asegurar existencia.

Ilustración 10 – Caso en donde el incremento de y_n cambia considerablemente con respecto al incremento de y_0.



Se estudian estos incrementos nuevamente con el método de las quebradas. Supongamos que con el cambio ς_0 a y_0 el valor de y_1 se vió afectado por un incremento ς_1. Tenemos las siguientes dos igualdades:

$$y_1 - y_0 = (x_1 - x_0)f(x_0, y_0)$$

$$y_1 + \varsigma_1 - (y_0 + \varsigma_0) = (x_1 - x_0)f(x_0, y_0 + \varsigma_0)$$

Restando la segunda igualdad de la primera se tiene

$$\varsigma_1 - \varsigma_0 = (x_1 - x_0)[f(x_0, y_0 + \varsigma_0) - f(x_0, y_0)]$$

Y utilizando la hipótesis que $\frac{df}{dy}$ es continua en un intervalo cerrado, entonces es acotada por una contante M. Tenemos que

$$[f(x_0, y_0 + \varsigma_0) - f(x_0, y_0)] < M\varsigma_0$$

Por lo anterior tenemos que

$$\varsigma_1 - \varsigma_0 < (x_1 - x_0)M\varsigma_0$$

Entonces

$$\varsigma_1 < \varsigma_0(1 + (x_1 - x_0)M) < \varsigma_0 e^{(x_1 - x_0)M}$$

En donde ς_1 será tan pequeño como sea dependiendo del valor de la diferencia $(x_1 - x_0)$. Así se prueba hasta para el valor de y_n y se estudian las diferencias $y_m - y_{m-1}$ para m natural entre 1 y n, donde a y_m se le atribuye un crecimiento $\varsigma_m e^{(x - x_m)M}$. Probando así la convergencia a una función $y = F(x)$.

Para probar la continuidad se basan en las ideas utilizadas hoy en día, toma las siguientes igualdades

$$y_1 - y_0 = (x_1 - x_0)f\big(x_0 + \theta_1(x_1 - x_0), y_0 \pm \Theta A(x_1 - x_0)\big)$$

En donde por la continuidad de la función f se tiene

$$f\big(x_0 + \theta_1(x_1 - x_0), y_0 \pm \Theta A(x_1 - x_0)\big) < f(x_0, y_0) + \varepsilon$$

Por lo tanto

$$y_1 - y_0 < (x_1 - x_0)f(x_0, y_0) + (x_1 - x_0)\varepsilon$$

Nuevamente dependiendo del valor de la diferencia $x_1 - x_0$. En conclusión, el método de las quebradas garantiza la existencia de la solución siempre y cuando se trabaje con valores de x muy cercanos al valor inicial x_0. Además, converge a una función que es continua en un intervalo que contenga al valor inicial. Se puede visualizar con los siguientes ejemplos en donde no se puede asegurar existencia si no se trabaja con valores muy cercanos al valor inicial.

Para comprobar que satisface la ecuación diferencial utiliza la igualdad

$$F(x) = y_0 + (x - x_0)f\big(x_0 + \theta(x - x_0), y_0 \pm \Theta A(x - x_0)\big)$$

en donde

$$F(x+h) = y_0 + (x + h - x_0)f\big(x_0 + \theta(x + h - x_0), y_0 \pm \Theta A(x + h - x_0)\big)$$

concluyendo que

$$F(x+h) - F(x) = hf(x_0 + \theta h, y_0 \pm \Theta A h)$$

que en otras palabras es lo mismo que escribir

$$F'(x) = f[x, F(x)]$$

Satisfaciendo la ecuación diferencial dada.

CONSTRUCCIÓN DE LA EXISTENCIA POR PARTE DE PEANO

La idea principal del autor es determinar una solución Y_1 que acote superiormente a la solución Y de la ecuación diferencial, y una solución Y_2 que acote inferiormente a la solución Y. Es la idea mencionada sobre las súper-soluciones y las sub-soluciones.

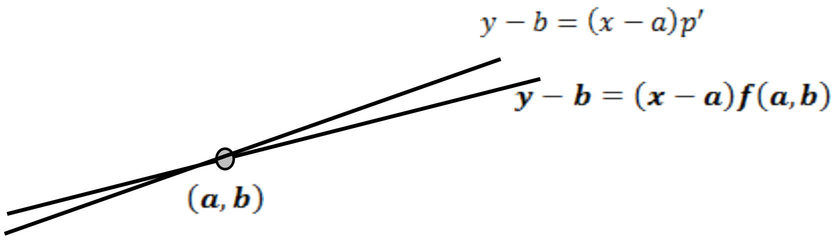
De la ecuación diferencial

$$y' = f(x, y)$$

considera de hipótesis que la función $f(x, y)$ es continua con valor inicial (a, b). Similar al método de las quebradas, pero a partir de una construcción de rectas con pendiente mayor (en el caso de las súper-soluciones) que las rectas tangentes o de pendiente menor (en el caso de las sub-soluciones).

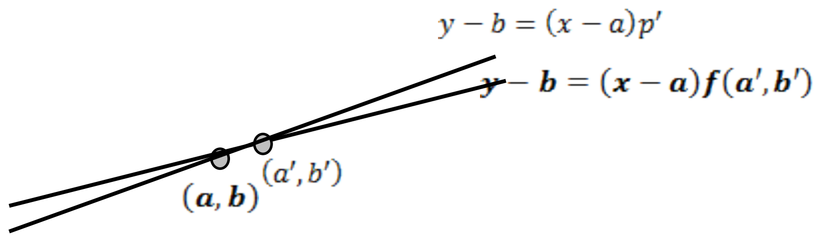
Para el caso de las súper-soluciones supone la existencia de un p' que sea mayor que $f(a, b)$, con esto se obtiene otra recta de pendiente mayor a la tangente.

Ilustración 11 – Recta con pendiente mayor a la recta tangente en el primer punto



A partir de esto se da un valor $a' > a$ y se determina su ordenada b' a partir de la imagen obtenida de a' en la recta con pendiente p'. Entonces para el siguiente punto (a', b') se considera otro valor p'' mayor que $f(a', b')$. Con esto se obtendría otra recta de pendiente mayor que la recta tangente en ese punto.

Ilustración 12 – Recta con pendiente mayor a la recta tangente en el segundo punto



De la misma forma se obtiene el punto (a'', b'') con $a'' > a'$ al evaluar a'' en la recta $y - b = (x - a)p$ para determinar el valor de b''. Así se sigue repitiendo este método, asegurando que la cota inferior de las super-soluciones corresponde a una función Y_1.

Este mismo procedimiento es el utilizado para determinar las sub-soluciones suponiendo ahora valores menores que $f(a, b)$, o sea, con rectas de pendiente menor que las rectas tangentes que se vayan determinando. Con esto se construye a la función Y_2 como el sup de las cotas inferiores.

Ahora se procede a demostrar que tanto Y_1 como Y_2 son soluciones de la ecuación diferencial dada. Supone que $Y_1 = F(x)$ y que $f[x_0, F(x_0)] = m$ para x_0 un valor particular de x. Entonces se debe mostrar que $F'(x)$ es igual a m para satisfacer la ecuación diferencial.

Se construye a la función $\varphi(x) = F(x_0) + (x - x_0)(m - \varepsilon)$ con ε positivo suficientemente pequeño y se observa la recta $y = b + (x - a)p'$ con $p' > m$, es mayor que $\varphi(x)$ y como Y_1 es la cota inferior de estas rectas se tiene que

$$Y_1 = F(x) > \varphi(x) = F(x_0) + (x - x_0)(m - \varepsilon)$$

Por lo tanto

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} > m - \varepsilon \tag{1}$$

Por último, se construye a la función $\psi(x) = \ F(x_0) + \delta + (x - x_0)(m + \varepsilon)$ con δ y ε positivos suficientemente pequeños. Al realizar la resta $\frac{d\psi}{dx} - f(x,\psi)$ se obtiene

$$m + \varepsilon - f[x, F(x_0) + \delta + (x - x_0)(m + \varepsilon)\ ]$$

que corresponde a una cantidad positiva.

Por lo tanto $\frac{d\psi}{dx} > f(x,\psi)$ y como $F(x)$ es el límite inferior que satisface esa condición se tiene que $F(x) < F(x_0) + \delta + (x - x_0)(m + \varepsilon)$, entonces

$$F(x) \leq F(x_0) + (x - x_0)(m + \varepsilon)$$

Es decir

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} < m + \varepsilon \tag{2}$$

Por lo tanto, por (1) y (2) se tiene que $F'(x) = m$ satisfaciendo la ecuación diferencial. De igual forma lo realiza para Y_2.

CONDICIÓN DE LIPSCHITZ Y LA UNICIDAD

Por definición una función $f(x,y)$ es Lipschitz continua cuando se cumple

$$|f(h,k) - f(h,l)| < M \cdot |k - l|$$

Donde M es conocida como la constante Lipschitz. Pero ¿cómo podemos interpretar esta condición para nuestro problema?

Esta hipótesis es fundamental para garantizar la unicidad de una solución para la EDO de primer orden. Además, simplifica el resultado de lo que se presenta en los libros de texto actualmente, pues su hipótesis es que $\frac{\partial f}{\partial y}$ debe ser continua. Por ejemplo, con respecto a la ecuación $y' = |y|$.

$y' = \lvert y \rvert$ con la condición inicial $(0,0)$	
Teorema con hipótesis de que $\frac{\partial f}{\partial y}$ debe ser continua	No se puede garantizar la unicidad
Teorema con la hipótesis que cumple la condición de Lipschitz	Si se garantiza la unicidad.

Lipschitz en su trabajo asume esta condición y perfecciona el método utilizado por Cauchy. El método utilizado es el de las quebradas, y se estudia de tal forma que dada la condición inicial (x_0, y_0) si tuviese dos soluciones entonces se tendría dos recorridos diferentes de las rectas tangentes que se van determinando, pero esta condición nos restringe a que solo puede existir un recorrido de estas rectas tangentes.

Ilustración 13 – Parte del capítulo XI de la obra *Lehrbuch der Analysis*

Stetigkeit einer Function einer Variable gemacht wurde; der Kürze halber werde der absolute Werth einer Grösse w durch das Zeichen $[w]$ ausgedrückt. Es sollen der absolute Werth von (2) und von (3) die Eigenschaft haben, falls für eine hinreichend kleine Grösse δ die Ungleichheiten

$$(4) \qquad [\Delta x] < \delta, [\Delta y] < \delta, [\Delta z] < \delta$$

erfüllt sind, immer unter dieselbe beliebig kleine Grösse λ herabzusinken, oder die Ungleichheiten

$$(5) \qquad [f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)] < \lambda,$$

$$(6) \qquad [g(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - g(x, y, z)] < \lambda$$

zu befriedigen. Eine andere Voraussetzung, welche ebenfalls bei den erfahrungsmässig vorkommenden Functionen in der Regel erfüllt ist, bezieht sich auf die Differenzen (2) und (3) bei je zwei der Mannigfaltigkeit K angehörenden Werthsystemen, in denen der Werth der Variable x derselbe oder Δx gleich Null ist; sie besteht darin, dass es endliche positive Constanten $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}$ giebt, für welche die Ungleichheiten

$$(7) \quad [f(x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)] < c_{11}[\Delta y] + c_{12}[\Delta z],$$

$$(8) \quad [g(x, y + \Delta y, z + \Delta z) - g(x, y, z)] < c_{21}[\Delta y] + c_{22}[\Delta z]$$

Fonte: Lipschitz, 1880, p. 501.

Esto se expresa de la siguiente manera, si al valor y_0 le aplica un pequeño incremento, entonces esta solución a la que se converge no sufre tales cambios. Retomando el ejemplo del capítulo 1, consideremos la ecuación diferencial

$$y' = y^{\frac{1}{3}}$$

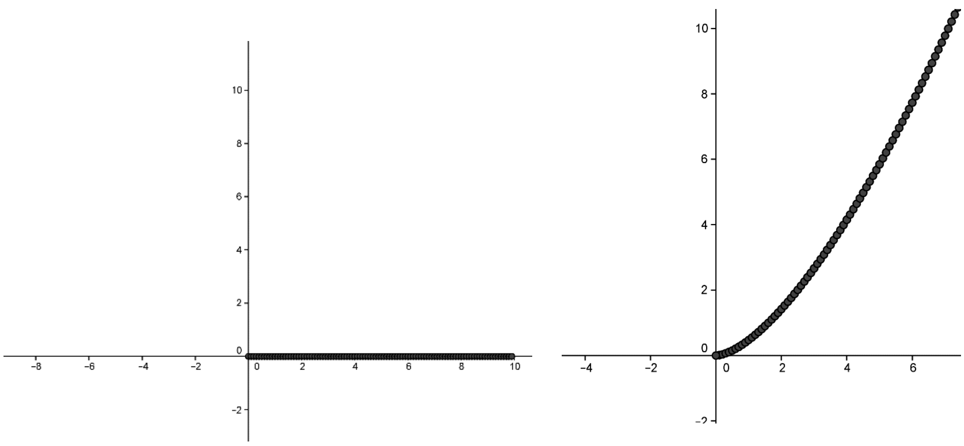
Con la condición inicial $x_0 = 0$ y $y_0 = 0$, de ella obtenemos dos soluciones las cuales corresponden a

$$y = 0, \qquad y = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}x^3}$$

Por lo tanto, la solución no es única con este valor inicial dado. La idea de Lipschitz se explica mejor al aplicar el método iterativo.

Si aplicamos el método de las quebradas considerando el punto $(0{,}0)$ obtenemos como solución a $y = 0$. En cambio, si consideramos el valor inicial $(0{,}0 + h)$ con h suficientemente pequeño, entonces la solución tiende más a $y = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}x^3}$. Ver la siguiente ilustración.

Ilustración 14 – Aproximaciones numéricas de la solución de la ecuación diferencial alrededor de $(0{,}0)$ que da el método de las quebradas



$y_0 = 0$ $\qquad\qquad$ $y_0 = 0.0001$

Lo que en realidad está pasando es que a partir de la primera iteración se están obteniendo dos rectas tangentes que corresponden respectivamente a cada una de las dos soluciones. Por eso, en el punto (x_1, y_1) y otro muy cercano (x_1, η_1), tal que $\eta_1 - y_1$ es cercano a cero, se están determinando dos rectas tangentes, las cuales son.

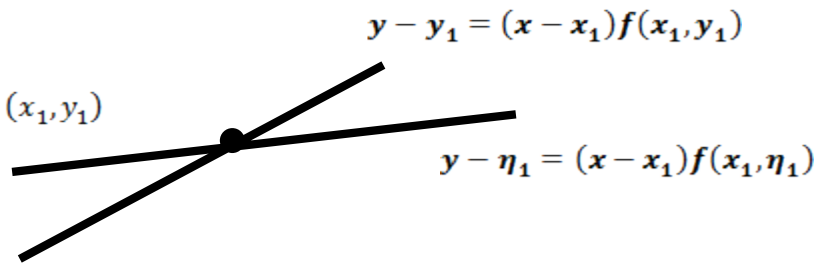
$$y - y_1 = (x - x_1) f(x_1, y_1)$$

y

$$y - \eta_1 = (x - x_1) f(x_1, \eta_1)$$

Tal y como se muestra en la siguiente representación:

Ilustración 15 – La existencia de dos soluciones para la ecuación



Entonces si estudiamos la diferencia entre estas dos rectas, vemos que es lo mismo que restar las pendientes de ambas, pues η_1 es un valor muy cercano a y_1. Observe que esta distancia entre las rectas está determinada por la resta

$$|f(x_1, \eta_1) - f(x_1, y_1)|$$

Es por eso, que la condición de Lipschitz juega un papel importante, pues esta diferencia se vería acotada por

$$|f(x_1, \eta_1) - f(x_1, y_1)| < M|\eta_1 - y_1|$$

En donde la constante M es la cota de la $\frac{\partial f}{\partial y}$ que no necesariamente es continua. Entonces si se cumple esta condición, tendríamos que $|f(x_1, \eta_1) - f(x_1, y_1)| = 0$ siendo una solución única a la ecuación. Si la condición de Lipschitz no se cumple, no se puede garantizar unicidad, puede que exista o puede que no exista.

Con $f(x, y)$ Lipschitz continua se asegura existencia y unicidad. Esto sería un ejemplo de estabilidad en donde se converge a una solución para la cual, si al valor inicial se le incrementa un pequeño valor, no se tendría diferencia del resultado.

EXISTENCIA DE LA SOLUCIÓN EN EL CAMPO COMPLEJO

Esto es algo que retoma el trabajo de Picard, en donde considerando la ecuación diferencial $y' = f(x,y)$ donde x y y pueden ser valores imaginarios. Para esto tiene de hipótesis que la función $f(x,y)$ es holomorfa alrededor del valor inicial (x_0, y_0), es decir, que son funciones descritas en el plano complejo que son infinitamente diferenciables. Esto nos asegura una aproximación de Taylor que es lo que el autor argumenta.

El desarrollo de esta serie de Taylor está garantizando la existencia de una solución que satisface las condiciones del enunciado. Entonces la serie es convergente en el interior de un círculo descrito por el punto (x_0, y_0) y que además satisface la ecuación diferencial.

CONCLUSIONES

Un dato a destacar, es que hay una ruptura entre el problema con su origen y lo que, en consecuencia, se está ofreciendo en las aulas. Por ejemplo, en los libros de texto o en el propio dME ligado a la didáctica actual, se trata de resaltar un rectángulo donde la solución va a existir y será única, hasta hay una fórmula para determinar dicha frontera. Mientras que originalmente el problema consistía en determinar la solución real dado una condición inicial, de cómo es f y sus parciales para poder deducir la existencia y unicidad de la solución. Por lo tanto, existe una ruptura entre lo que dice la escuela y lo que en realidad ocurrió, específicamente en el tema de la región en donde existe la solución única. Entonces ¿por qué se dio ese cambio? Plantando una posible hipótesis, se podría decir que la respuesta a esta pregunta es motivada por la tradición de trabajar el cálculo bajo el esquema actual de épsilon – delta, esto se va a introducir en el dME como esa atención a la región de integración.

Este fenómeno puede estar ocasionando un obstáculo de orden didáctico en la comprensión de lo que se quiere entender por existencia y unicidad de la solución. Se están utilizando las nociones de la continuidad de las funciones $f(x,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ o la condición de

Lipschitz para la determinación de un rectángulo sin entender el significado de estas condiciones que tenían al origen.

Con respecto a la unicidad, en el dME actual, se acostumbra a demostrarla de la siguiente manera: se supone que hay dos soluciones que satisfacen las condiciones y se llega a una contradicción o que deben ser iguales. Diferencia al problema presentado en las obras originales, pues se utilizaban las condiciones para comprender el por qué no se podían tener más de una solución. Esto le da significado a la unicidad en lugar de ser un proceso tan mecánico presentado en el dME, como parte de un método lógico del tercero excluido, es decir, el significado de la unicidad en las obras de antaño es más constructivo al estudiar el comportamiento de la solución con la variación en la condición inicial, diferente a como se realiza actualmente por contradicción, suponiendo que son dos las soluciones de la ecuación llegando a argumentar que esto no puede suceder dadas las hipótesis del teorema.

Además, en el dME se estudia el método de cuadraturas como paso previo a la demostración de este teorema, dado que permite formular un argumento importante para comprobar la existencia de la solución, trabajando aproximaciones sucesivas conformadas de integrales y funciones. Sin embargo, no cualquier función se puede integrar, ocasionando un obstáculo de orden didáctico que impide estudiar en forma completa el significado de la ecuación diferencial, el cual corresponde a la relación entre función y derivada. En las obras originales, se utiliza el método de las quebradas donde se trabaja con variaciones en lugar de integraciones. Es “más fácil de comprender” como parte de un método dentro del pensamiento y lenguaje variacional, pues se le da una interpretación variacional a la ecuación.

Actualmente se piensa en la ecuación diferencial como una reducción a los métodos que ayudan a integrar y determinar una solución, es decir, se utiliza la integración como un método inverso a la derivación para obtención de la solución. Cuando los autores demuestran este teorema, se trabaja con variaciones, siendo algo más fácil de comprender y que a partir de la ecuación se pueden obtener argumentos variacionales para determinar su solución. Esto podría estar generando un obstáculo didáctico cuyo origen estriba en la epistemología, pues se considera que sería mejor pensar en la ecuación diferencial como el problema inverso de la recta tangente a la curva dada, esto nos genera más representaciones y justificaciones visuales.

Este estudio, desde el punto de vista socioepistemológico, amplió el conocimiento que tenemos sobre el Teorema de Existencia y Unicidad de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, pero sobre todo mostró el tipo de prácticas que se ponen en juego para justificar, por un lado, la existencia y por otro, quizá más complejo, la unicidad. El método de las quebradas, si bien ausente en los textos de Ecuaciones Diferenciales sobrevivió en los textos de métodos numéricos. Este fenómeno es la segunda que aparece en los estudios de este corte. Situación similar presentó la idea de predicción basada en la Serie de Taylor. Estos hallazgos, debemos decirlo, son fruto de una adecuada problematización del saber matemático. Dos hechos de los cuales dieron génesis y explicación a este problema, fueron la búsqueda de una formalización de la demostración del teorema y así como la determinación de la mínima cantidad de hipótesis que garantice la existencia o bien, la existencia y la unicidad.

Adicionalmente, dimos respuesta a las preguntas iniciales referidas al problema inverso de la tangente y de los diversos ejemplos que están presentes en el dME, pero esta vez con apoyo de una multipicidad de recursos: lo variacional, lo numérico, lo analítico y lo visual. Todo ello se obtuvo de un análisis documental sobre obras originales de matemáticas. Por otra parte, se significaron otros constructos, como la convergencia, la condición de Lipschitz y la continuidad de las funciones $f(x,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$, respecto de *y*.

En este estudio no se hizo explicitó el que la unidad de medida con la que se trabaja es el tiempo infinitesimal. Pero lo asumimos, pues una ecuación diferencial y sus orígenes tratan de describir situaciones a partir del tiempo (variable independiente), esto como parte de un modelo predictivo que representa la ecuación diferencial. Vemos que la noción de temporalidad está muy influenciada con la estabilidad a obtener (convergencia a una solución), pues depende de los intervalos de tiempo (distancia entre los nodos del intervalo de existencia) con los que se estudia algún fenómeno, es que se puede hablar de una solución a la ecuación, asegurando su existencia y estudiando su unicidad.

También, al estudiar el método de las quebradas utilizado para el estudio de la existencia y unicidad, se observa que se está aproximando algo que no se puede medir, esto como parte del pensamiento proporcional, comparando estados puntuales, para analizar que la convergencia de la aproximación depende del intervalo tiempo (distancia entre los nodos). Luego, se trabaja con la variable tiempo para determinar la longitud de tiempo a utilizar en el proceso iterativo.

Un problema de orden metodológico que encontramos, lo podríamos tipificar como de documentación historiográfica, o sea, se desconocen los documentos que han de estudiar. Después de localizarlos y organizarlos conceptualmente, sigue el problema de qué documentos se estudian pues se presenta la dificultad de encontrar los documentos originales, leerlos e interpretarlos. Es una limitante que queremos evidenciar sobre esta clase de trabajos, un trabajo colectivo de localización de las obras originales y los textos antiguos hace falta para la investigación.

Nuestra idea es que tuvimos aportaciones reportadas del estudio de la construcción del teorema a lo largo de este trabajo, el investigador vive en sí mismo un proceso de empoderamiento pues modifica su relación al conocimiento. Al realizar un estudio como el actual, emergen diversas racionalidades que servirán al momento de diseñar situaciones de aprendizaje mediante el empleo de variables didácticas o variables de control para modificarlas, manteniendo presente la construcción de estos significados. Al reconstruir estas significaciones, nos ayudaron a comprender otros más problemas relacionados con las ecuaciones diferenciales, como su estabilidad en un sistema de ecuaciones diferenciales, y construir para ello, otras interpretaciones visuales.

REFERÊNCIAS

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento.* Barcelona: Gedisa.

Cauchy, A., & Moigno. (1844). *Lecons de Calcul Différentiel et de Calcul Integral*. Paris: Libraire de École Polytechnique.

Lipschitz, R. (1868). Disamina della possibilità d' integrare completamente un dato sistema di equazioni differenziali ordinarie. *Ann. Mat. Pura Appl.*, *2*(2), 288–302.

Lipschitz, R. (1880). *Lehrbuch der Analysis*. Bonn. Deutschland: Verlag Von Max Cohen & Sohn.

Molero, M. et al. (2012). Ecuaciones diferenciales ordinarias. *Análisis Matemático Para Ingeniería*, 365–406.

Nápoles, J., & Negrón, C. (2002). La historia de las ecuaciones diferenciales ordinarias contadas por sus libros de texto. *Revista Electrónica de Didáctica de Las Matemáticas. Universidad Autónoma de Querétaro.*, *3*(2), 33–57.

Peano, G. (1973). Sull' integrabilità delle equazioni differenziali di primo ordine. Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino 21 (1885-1886): 677-685. *Hamburger Which Was Reprinted in Peano 1957-1959.*, *1*, 74–81.

Picard, E. (1886). *Cours D' Analyse*. Faculté des Sciences de Paris.

Zill, D. (1997). *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones* (3rd ed.). México: Grupo Editorial Iberoamérica.