A INSERÇÃO DA GEOMETRIA DINÂMICA NO ENSINO DA GEOMETRIA: um olhar didático

Vincenzo Bongiovanni[1]

RESUMO

As tecnologias são ferramentas a serviço do ensino e da aprendizagem e devem ser utilizadas para melhorar a compreensão dos alunos. Entre os recursos de informática, estão os softwares de geometria dinâmica utilizados na construção de figuras geométricas e como apoio à visualização e ao levantamento de conjeturas. Eles são utilizados no ensino com o propósito de motivar o ensino e a aprendizagem da matemática. Este texto apresenta algumas contribuições dos ambientes de geometria dinâmica no processo de aprendizagem da geometria e relata algumas mudanças trazidas pela geometria dinâmica no ensino de conceitos geométricos e na minha prática docente. Apresento alguns exemplos desenvolvidos durante a disciplina de Geometria ministrada em cursos de formação de professores em Educação Matemática. Tais exemplos privilegiam conteúdos pouco explorados no ensino: as transformações geométricas e as técnicas de representação de objetos espaciais no plano.

Palavras-chave: Ensino da geometria. Geometria dinâmica. Transformações geométricas.

ABSTRACT

Technologies are tools in the service of teaching and learning and should be used to enhance students' understanding. Among the computer resources are the dynamic geometry software used in the construction of geometric figures and as support for displaying and survey conjectures. They are used in education in order to motivate the teaching and learning of mathematics. This text presents some contributions of dynamic geometry environments in geometry learning process and reports some changes brought about by the dynamic geometry in teaching geometric concepts and in my teaching practice. I present some examples developed during the Geometry subject taught in teacher training courses in mathematics education. Such examples highlight some content explored in teaching: the geometric transformations and representation techniques of space objects in the plan.

Keywords: Teaching geometry. Dynamic geometry. Geometric transformations.

INTRODUÇÃO

Um momento ímpar na minha formação de educador foi o meu encontro com a didática francesa que me ensinou a lidar com minhas práticas – tanto no Ensino Médio

[1] Docente do Colégio Universitas, Santos/SP . E-mail vincenzo.bongiovanni@uol.com.br.

quanto no Ensino Superior – com o olhar de pesquisador. Foi esse encontro que provocou a minha entrada no mundo da geometria dinâmica e que trouxe mudanças significativas na minha postura docente. Hoje, a geometria dinâmica faz parte do meu dia a dia, tanto no meu trabalho com o ensino da geometria quanto nas minhas pesquisas. Neste texto, apresentarei algumas contribuições dos ambientes de geometria dinâmica no processo de aprendizagem da geometria e relatarei algumas mudanças trazidas pela geometria dinâmica no ensino de conceitos geométricos e na minha prática docente.

A GEOMETRIA DINÂMICA

Brandão (2002) define a Geometria Dinâmica como sendo "*a implementação, no computador, de construções com régua e compasso, na qual o estudante pode, a partir de uma construção inicial, mover com o mouse algum dos objetos iniciais*". No ensino, a denominação "*Geometria Dinâmica*" *é* utilizada para designar a utilização de programas de construções geométricas que permitem que os objetos construídos sejam modificados mantendo-se as suas propriedades inalteradas. Esses programas apresentam a característica de serem de manipulação direta, ou seja, o usuário age diretamente sobre a representação gráfica dos objetos que estão na tela ao invés de agir sobre a sua representação interna (o código). A geometria dinâmica surgiu na França e nos Estados Unidos em meados dos anos 80. A referência histórica na França é o *Cabri Géomètre* e nos Estados Unidos o *Geometer´s SketchPad*. A geometria dinâmica começou a ganhar destaque na década de 90 com a popularização desses dois programas comerciais. O termo "Dynamic Geometry" (geometria dinâmica) introduzido por Steve Rasmussen e Nick Jackiw é marca registrada da Key Curriculum Press, responsável pela comercialização do Geometer´s SketchPad. Hoje existem centenas de programas de geometria dinâmica e entre os gratuitos podem ser citados o *Geogebra, o Igeom,* o *CaRMetal, Régua e Compasso, Calques 3D, etc.*

HISTÓRICO DO PROGRAMA CABRI GÉOMÈTRE

Um breve histórico do programa *Cabri Géomètre* será apresentado tendo em vista ser um dos primeiros a ser concebido e utilizado no ensino brasileiro. Em 1985, Jean-Marie Laborde propôs a criação de um caderno de rascunho informático (Cahier de Brouillon Informatique) para a geometria. A primeira versão do software foi desenvolvida durante o período 1985/1987. Além dele, participaram desse projeto, Philippe Cayet, Y.Baulac e Franck Bellemain, no laboratório de Estruturas Discretas e de Didática do IMAG na Universidade Joseph Fourier de Grenoble com o apoio do Centro Nacional de pesquisa Científica (CNRS). Entre os pesquisadores que colaboraram na sua divulgação e nas suas aplicações pedagógicas oferecendo em diversas ocasiões conferências e mini cursos para professores e estudantes brasileiros apontamos Nicolas Balacheff e Colette Laborde. Em 1988 o software *Cabri Géomètre* recebeu na França o troféu Apple pela sua contribuição no ensino da geometria. Em 1993 foi traduzido em 25 línguas, testado na PUC-SP e difundido em vários centros de ensino e Estados brasileiros. Em 1994 uma nova versão de Cabri, o Cabri II sob a marca Texas Instruments foi apresentada nos Estados Unidos e em 1996 começou a ser comercializado assim como a calculadora TI-92, a primeira a incluir a geometria dinâmica no seu menu. Em 1999 ocorreu o primeiro Congresso Internacional Cabri-géomètre realizado no Brasil, na PUC-SP, de 9 a 12 de outubro, reunindo estudantes, professores, pesquisadores e educadores. O encontro foi coordenado por Jean Marie Laborde e Tânia Maria Mendonça Campos. Em setembro de 2004, no Congresso Internacional Cabriworld, realizado em Roma, foi lançado um programa de geometria dinâmica tridimensional de manipulação direta, o Cabri 3D desenvolvido por Eric Bainville. Esse programa, além de preservar as propriedades de objetos geométricos tridimensionais quando manipulados, permite também *mudar o ponto de vista* em relação ao objeto representado. É possível olhar os sólidos de cima, de lado, de frente, de baixo ou de qualquer ponto de vista, em diversos sistemas de representação. Essa funcionalidade do programa modifica fortemente a relação dos alunos com os objetos do espaço.

CARACTERÍSTICAS DOS AMBIENTES DE GEOMETRIA DINÂMICA

Todos os programas de geometria dinâmica, além de apresentarem para os usuários uma interface bastante intuitiva, apresentam muitas ferramentas em comum, como por exemplo, criação de objetos, construção de figuras, ajudas, edição, etc. e particularidades que os diferenciam uns dos outros. Para exemplificar as características dos ambientes de geometria dinâmica utilizaremos como referência o software Cabri Géomètre. Ao iniciar o programa aparece uma tela branca e diversos menus que permitem a criação de objetos geométricos tais como ponto, segmento, reta, semirreta, vetor, triângulo, polígono, polígono regular, circunferência, arco, cônica. O programa apresenta também outros menus com um número limitado de relações "reta perpendicular", "reta paralela", "ponto médio", "mediatriz", "bissetriz", etc. Cabri permite construir na tela uma variedade de configurações geométricas e possibilita efetuar medidas de segmentos, perímetros, ângulos, obter áreas de figuras, coordenadas de pontos, equações de retas, de circunferências e de cônicas a partir dos seus desenhos na tela. As medidas obtidas são atualizadas a partir de qualquer modificação da figura. Cabri oferece também a possibilidade de construir a imagem de um objeto por uma simetria axial, uma simetria central, uma rotação, uma translação, uma homotetia e uma inversão. Um outro recurso disponível é a possibilidade de se fazer uma construção que pode ser salva e tornar-se uma nova ferramenta de trabalho na barra do menu. É o que se chama de macro construção. Por exemplo, pode-se criar a macro "parábola" e utilizar essa macro como ferramenta para resolver problemas relacionados com as cônicas. O programa permite também esconder objetos durante ou na fase final de uma construção.

A GEOMETRIA DINÂMICA NAS PROPOSTAS CURRICULARES

Os recursos tecnológicos são enfatizados em inúmeras propostas curriculares pois dinamizam os conteúdos curriculares e potencializam o processo pedagógico. Em algumas propostas encontramos explicitado o uso da geometria dinâmica em relação ao ensino e aprendizagem da geometria. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio volume 2 encontramos a seguinte orientação:

> Para o aprendizado da Geometria, há programas que dispõem de régua e compasso virtuais e com menu de construção em linguagem clássica da Geometria- reta perpendicular, ponto médio, mediatriz, bissetriz, etc. Feita uma construção, pode-se aplicar movimento a seus elementos, sendo preservadas as relações geométricas impostas à figura - daí serem denominados programas de *geometria dinâmica*.
> (PCN, 2006, p. 88)

No Estado da Bahia, são dadas orientações Curriculares e Subsídios Didáticos para a Organização do Trabalho Pedagógico no Ensino Fundamental do 6° ao 9° anos (2013):

> Neste sentido, o(a) professor(a) deve buscar, na medida do possível, explorar softwares que possibilitem a aprendizagem de uma Geometria viva, articulada, calcada no movimento, nas transformações, de forma dinâmica, criativa e desafiante.
> Sugerimos, também, representações dinâmicas possibilitadas por softwares (tais como o CABRI, Logo, Matlab e GEOGEBRA) – recursos essenciais para a exploração da Geometria.
> (Bahia, 2013, p. 129)

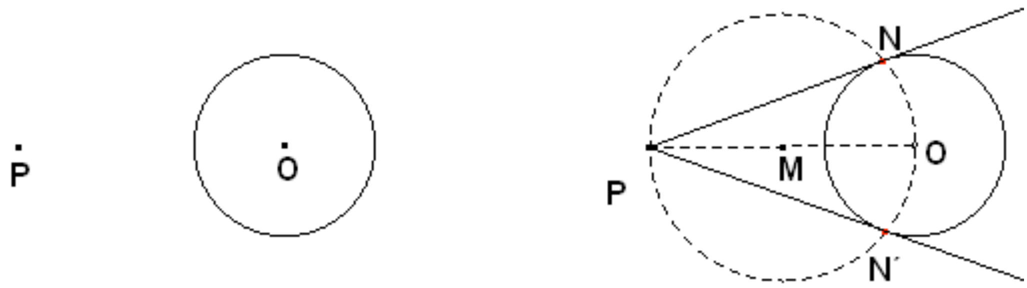
No Estado de Pernambuco encontramos nos parâmetros curriculares de Matemática (2012) a seguinte orientação:

> Apoiado no emprego dessas tecnologias, o estudante poderá ter mais oportunidade de expandir sua capacidade de resolver problemas, de fazer conjecturas, de testar um grande número de exemplos, de explorar os recursos da chamada "geometria dinâmica", em que é possível fazer variar continuamente parâmetros atrelados a figuras, operação impossível em um contexto de papel e lápis.
> (Pernambuco, 2012, p. 32)

CONTRIBUIÇÕES TRAZIDAS PELOS AMBIENTES DE GEOMETRIA DINÂMICA NA APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA

A ferramenta fundamental trazida pela geometria dinâmica no processo de aprendizagem da geometria é a possibilidade de o aluno poder *"arrastar"* com o mouse a figura construída. O programa altera a construção efetuada preservando as propriedades originais. O movimento da figura construída é um elemento essencial na geometria dinâmica, pois permite a passagem de uma geometria estática para uma geometria dinâmica. Em decorrência desse fato, nos ambientes da geometria dinâmica, as *atividades de construção* exigem que um novo contrato seja estabelecido entre aluno e professor: a elaboração de um procedimento de construção e *uma validação por deslocamento.* Por exemplo, ao construir uma reta tangente a uma circunferência de centro O por um ponto P externo à circunferência não basta criar uma reta passando por P e intersectando a circunferência num só ponto. Nesse novo ambiente, além de produzir um procedimento de construção (criar o segmento PO; obter o ponto médio M do segmento PO; criar uma circunferência de centro M e raio MO; obter as intersecções N e N´ das duas circunferências; criar as retas PN e PN´) é necessário validar a construção por um deslocamento, ou seja, através do mouse deve-se clicar no ponto P e arrastá-lo pela tela para observar se a construção é robusta, isto é, se a reta continua tangente à circunferência mesmo após qualquer movimento do ponto P. O aluno portanto tem meios de controlar a sua ação. As respostas obtidas, a partir do movimento de arrastar a figura construída, permitem aos alunos não somente invalidar estratégias erradas, mas também as fazer evoluir.

Figura 1- Construção de retas tangentes

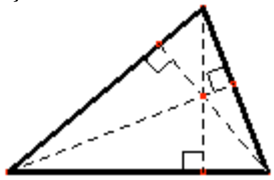


Fonte: O autor.

Dessa maneira a geometria dinâmica contribui a estabelecer uma importante distinção entre desenhar e construir. *Desenhar* é apenas reproduzir a imagem mental que temos de um objeto geométrico. É um traçado material válido para uma posição particular do objeto em questão. *Construir* é obter uma representação do objeto geométrico utilizando as suas propriedades. A construção resulta em um desenho que não perde as suas propriedades quando se usa o recurso *"arrastar"* um de seus pontos de base. A pesquisa de Restepo (2008) aponta que a apropriação do uso do recurso "arrastar" não é evidente nem para alunos e nem para professores, mas resulta de uma aprendizagem.

Outra contribuição da geometria dinâmica trazida pelo recurso "*arrastar*" é auxiliar o aluno a distinguir "propriedade de um desenho" de "propriedade de um objeto teórico construído”. Por exemplo, no desenho abaixo, realizado no ambiente papel/lápis, temos um triângulo com as suas três alturas traçadas.

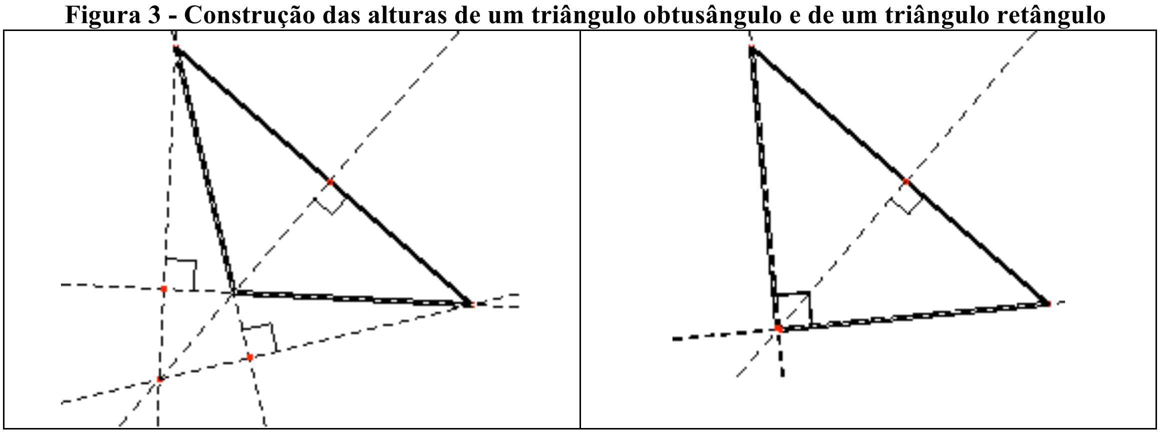
Figura 2 - Construção das alturas de um triângulo acutângulo



Fonte: O autor.

O caráter particular desse único desenho pode levar o aluno a considerar características não pertinentes ao objeto teórico denominado “ortocentro”. A observação desse desenho estático pode levar o aluno a considerar que o ortocentro tem a propriedade de *estar situado sempre no interior do triângulo*. O recurso “arrastar” permite visualizar inúmeros desenhos e perceber que o ortocentro pode se situar também no exterior do triângulo ou mesmo num dos vértices do triângulo.

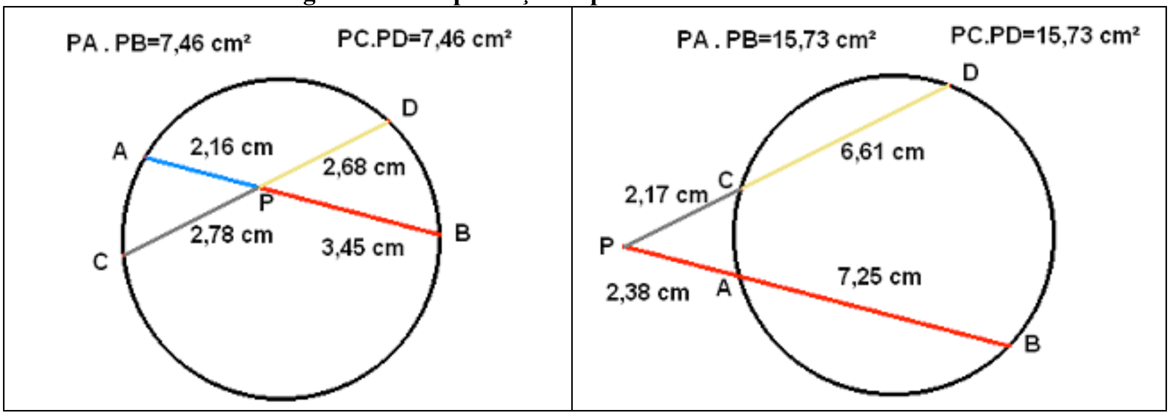
Figura 3 - Construção das alturas de um triângulo obtusângulo e de um triângulo retângulo



Fonte: O autor.

Outra contribuição que ajuda a enriquecer o processo de aprendizagem da geometria é a *comprovação experimental de teoremas*. As propriedades geométricas trabalhadas em sala de aula podem ser verificadas experimentalmente antes que a sua justificativa seja apresentada. Por exemplo, uma das relações métricas na circunferência afirma que se duas cordas AB e CD de uma circunferência, se intersectam num ponto P interno ou externo a uma circunferência, então a relação PA.PB = PC.PD é verificada. A situação pode ser comprovada experimentalmente medindo os segmentos, calculando os produtos e movimentando o ponto P. É importante dizer que numa verificação experimental os cálculos têm uma precisão limitada e os resultados são sempre aproximados. Além disso, as verificações são validadas apenas por um número grande, mas finito de tentativas, pois o número de pixels de uma tela é finito. Devemos observar também que a comprovação experimental não é uma prova e não dispensa uma prova. Ela apenas produz uma convicção no aluno da veracidade da afirmação que poderá ser validada por uma demonstração.

Figura 4 - Comprovação experimental de um teorema



Fonte: O autor

O software também permite criar instantaneamente uma tabela com as medidas de cada segmento e dos produtos PA.PB e PC.PD. À medida que o ponto P se move, todos os valores são atualizados. Os valores podem, se necessário, ser exportados numa planilha Excel para serem analisados.

Tabela 1 – Medida dos segmentos e produtos

	PA	PB	PC	PD	PA.PB	PC.PD
1	1,86	2,47	2,49	1,84	4,58	4,58
2	1,71	2,46	2,52	1,67	4,22	4,22
3	1,61	2,42	2,57	1,52	3,90	3,90
4	1,48	2,46	2,52	1,45	3,64	3,64
5	1,38	2,40	2,55	1,30	3,31	3,31
6	1,14	2,43	2,43	1,14	2,76	2,76
7	1,02	2,38	2,41	1,01	2,43	2,43
8	0,94	2,31	2,42	0,90	2,17	2,17
9	0,84	2,26	2,39	0,79	1,89	1,89
10	0,65	2,02	2,43	0,54	1,31	1,31
11	0,52	1,90	2,43	0,41	1,00	1,00
12	1,12	3,05	1,90	1,80	3,41	3,41
13	1,52	2,96	1,94	2,32	4,48	4,48
14	1,81	2,72	2,01	2,45	4,92	4,92
15	2,61	1,90	2,68	1,84	4,95	4,95

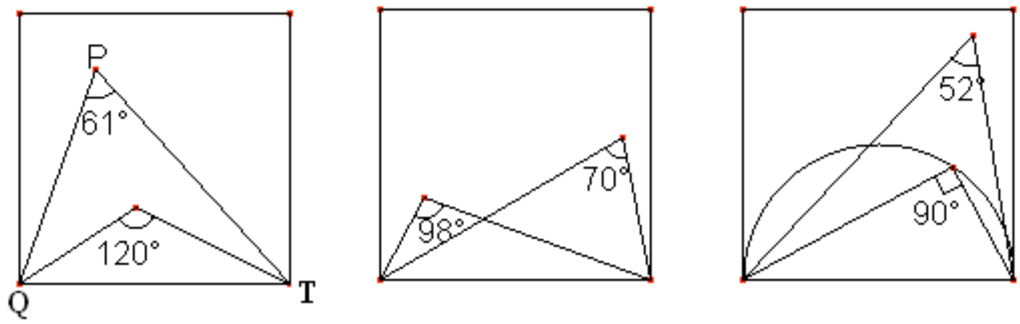
Fonte: O autor

A geometria dinâmica possibilita também a criação de situações onde os alunos movimentam a figura construída para *formular conjeturas.* É um trabalho exploratório que pode preceder a uma justificativa teórica. Por exemplo, a partir de um quadrado

RSTQ dado e de um ponto P no seu interior pede-se para investigar qual a região interna ao quadrado tal que o ponto P enxerga o lado QT sob um ângulo agudo.

Com a ajuda do software pode-se formular a conjetura que quando o ponto P é externo à semicircunferência de diâmetro QT, o ângulo QPT será agudo.

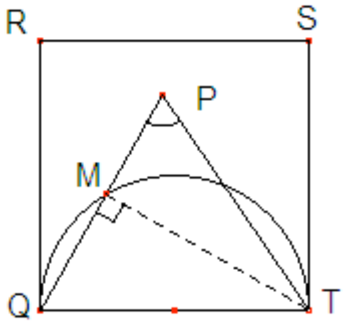
Figura 5 - Formulação de conjetura



Fonte: O autor.

Com a convicção adquirida, inicia-se a etapa da justificativa.

Figura 6 - Prova da conjetura

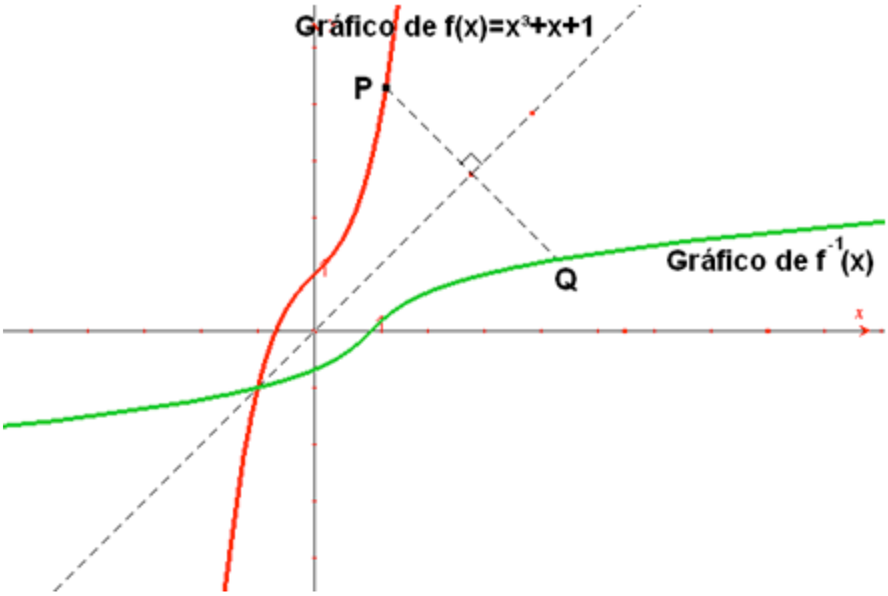


Fonte: O autor.

Usando o teorema do ângulo externo cujo enunciado é "a medida de um ângulo externo de um triângulo é maior que a medida de qualquer ângulo interno não adjacente a ele" pode-se concluir que o ângulo QMT (mede 90º) sendo externo ao triângulo MPT terá medida maior que o ângulo MPT. Logo o ângulo QPT é agudo. Os exemplos apresentados mostram que a comprovação experimental de teoremas e a formulação de conjeturas podem abrir caminhos para as justificativas teóricas.

Outra ferramenta oferecida pela geometria dinâmica muito útil na construção de curvas é o menu *lugar geométrico.* Esse recurso permite ao software apresentar de modo instantâneo a trajetória de um ponto enquanto outro ponto percorre uma curva. A geometria dinâmica permite criar lugares geométricos como verdadeiros objetos geométricos e obter as intersecções de lugares geométricos com outras curvas. Vamos dar um exemplo. Queremos construir o gráfico da função inversa de uma função f de R em R definida por f(x)= x^3+ x+1. Essa tarefa apresenta uma grande dificuldade que é obter a lei da função inversa, pois se trata de um polinômio do terceiro grau. Mas sabemos que os gráficos de uma função e de sua inversa são simétricos em relação à bissetriz y=x. Construímos o gráfico da função f, escolhemos um ponto genérico P do gráfico da função e em seguida construímos o seu simétrico em relação à bissetriz y=x obtendo o ponto Q. Clicando no ponto Q e em seguida no ponto P o software fornece rapidamente tal curva gerando um grande número de pontos (no mínimo 50) que representam as posições do ponto Q.

Figura 7 - Pesquisa de lugar geométrico

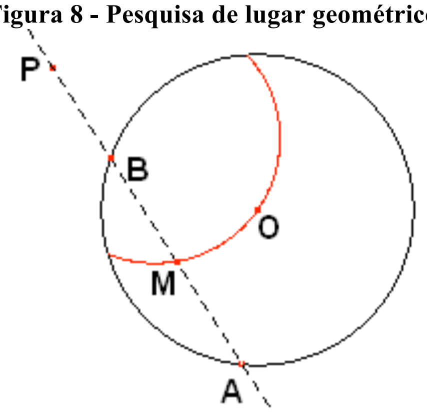


Fonte: O autor.

Outro exemplo que ilustra a ferramenta “lugar geométrico” será apresentado: *É dada uma circunferência de centro O e um ponto P no seu exterior. A todo ponto A da circunferência associa-se o ponto de intersecção B da reta PA com a circunferência. Nomeando de M o ponto médio do segmento AB e variando o ponto A sobre a circunferência, fazer uma conjetura sobre a natureza do lugar geométrico descrito pelo ponto M.*

Visualizar a curva descrita pelo ponto M é uma tarefa não muito simples pois teremos de associar a cada posição do ponto A, uma posição do ponto M e esse procedimento deverá ser repetido inúmeras vezes. O software nos apresentará de modo instantâneo o lugar geométrico que é um arco de circunferência.

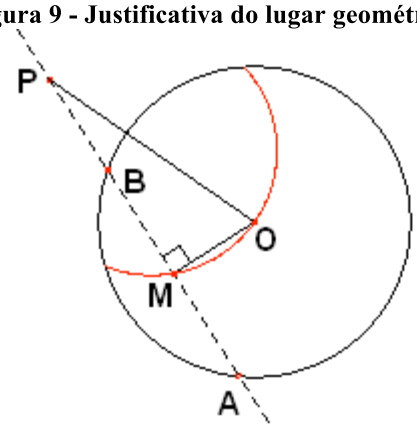
Figura 8 - Pesquisa de lugar geométrico



Fonte: O autor.

Para demonstrar o resultado obtido é suficiente observar que o triângulo BOA é isósceles e M é o ponto médio da base, logo o ângulo BMO é reto. Donde o ponto M vê o segmento fixo PO sob o ângulo de 90º. Portanto, M pertence a uma circunferência de diâmetro OP.

Figura 9 - Justificativa do lugar geométrico



Fonte: O autor.

Outra contribuição da geometria dinâmica que só tem sentido nesse tipo de ambiente é a possibilidade de apresentar certos conceitos geométricos pelo uso de *caixas pretas*. O nome caixa preta foi inicialmente atribuído por pesquisadores franceses. No ensino tradicional, um conceito matemático é inicialmente definido para, em seguida, ser aplicado em problemas. No ambiente da geometria dinâmica, podemos inverter tal procedimento apresentando o conceito a ser estudado como uma caixa preta, ou seja, o conceito proposto é apresentado a partir de uma construção sem revelar as suas características. Analisando seus efeitos a partir da movimentação dos elementos de base e explorando algumas situações, como por exemplo, o uso de medidas, é possível abrir essa caixa-preta para descobrir as características do conceito, de forma a caminhar na direção da formulação de uma definição matemática para esse objeto ou na descrição de uma possível construção. Trata-se, portanto, de uma abordagem experimental, pois é baseada na utilização de uma ferramenta com a qual se procura observar propriedades invariantes que caracterizam o conceito em jogo. Um exemplo bem simples do uso de uma caixa preta será dado. Vamos supor que no 6º ano do Ensino Fundamental o conceito de mediatriz não tenha ainda sido apresentado. Pede-se ao aluno para utilizar o menu "mediatriz" do software para criar a mediatriz de um segmento dado. O aluno não sabe ainda o que é mediatriz. Ao ativar o menu "mediatriz" e clicar no segmento aparecerá uma reta. Pede-se ao aluno para investigar as propriedades dessa reta. Ao movimentar os extremos do segmento ou ao utilizar medidas de segmentos e de ângulos ele descobrirá as características desse objeto geométrico, ou seja, que a mediatriz é uma reta que apresenta duas propriedades: é perpendicular ao segmento e passa pelo seu ponto médio. Nesse exemplo, o aluno usou inicialmente a mediatriz como ferramenta para descobrir as propriedades características do objeto teórico "mediatriz". Pode-se a partir dessa atividade propor outra sem a utilização da opção "mediatriz". O aluno deverá construir a mediatriz de um segmento dado usando apenas as características descobertas, isto é, deverá construir uma reta perpendicular ao segmento passando pelo seu ponto médio. Esse exemplo ilustra o trabalho de construção de um conceito. Tudo começa pela ação do aluno e evolui por iniciativa dele. O professor apenas auxilia o aluno a encontrar o seu caminho proporcionando condições favoráveis para a apropriação do saber.

MUDANÇAS TRAZIDAS PELOS AMBIENTES DE GEOMETRIA DINÂMICA NO ENSINO DE CONCEITOS GEOMÉTRICOS E NA MINHA PRÁTICA DOCENTE

Com a chegada da geometria dinâmica, modifiquei profundamente a minha prática de ensino de geometria. De um trabalho teórico que priorizava a organização conceitual (definições, axiomas e teoremas) passei a valorizar mais o trabalho experimental de construção, manipulação e observação, mas sem deixar de lado a dedução. Na década de 90, comecei a trabalhar em cursos de formação continuada de professores em Educação Matemática e observei que poucos eram os professores que apresentavam a seus alunos um curso "organizado" de geometria. A geometria euclidiana era apresentada apenas como uma justaposição de resultados e não como um encadeamento lógico de proposições. Essa observação me levou a oferecer, nas formações, um curso axiomático de geometria plana. Usava a axiomática do livro de geometria do Moise (1971) onde os axiomas eram explicitados no início e o desenvolvimento do curso consistia em apresentar definições e provas dos teoremas que faziam parte dos conteúdos do Ensino Básico. Cada resultado justificado se apoiava em resultados anteriores. Mas cedo constatei que a sequência de proposições era desmotivadora para muitos professores embora enriquecedora para alguns. Passei a usar a axiomática do livro de A.V. Pogorelov. Mas o curso continuava sendo árido para muitos. Finalmente me voltei para as ideias de Freudenthal (1973) que defende que no ensino da demonstração, em vez de se pretender apresentar ao aluno uma organização global da geometria (um sistema axiomático completo), devem ser apresentadas experiências de organização local, em que alguns resultados devem ser conjeturados e a seguir interligados logicamente com outros por meio de deduções. A proposta de organização local que passei a adotar consistia em assumir os 4 casos de congruência de triângulos e o fato de que duas retas paralelas intersectadas por uma transversal determinam ângulos alternos internos congruentes. Esses casos de congruência de triângulos aceitos num primeiro momento, intuitivamente, eram utilizados para provar os demais resultados. Percebi claramente que tinha sido um alívio para os participantes do curso, pois que me desobrigava de demonstrar alguns dos resultados da geometria absoluta, ou seja, dos resultados que independem do postulado das paralelas. Somente no final do curso, quando o tempo o permitia, os casos de congruência eram justificados. Durante o curso, o uso da régua e do compasso era pouco explorado.

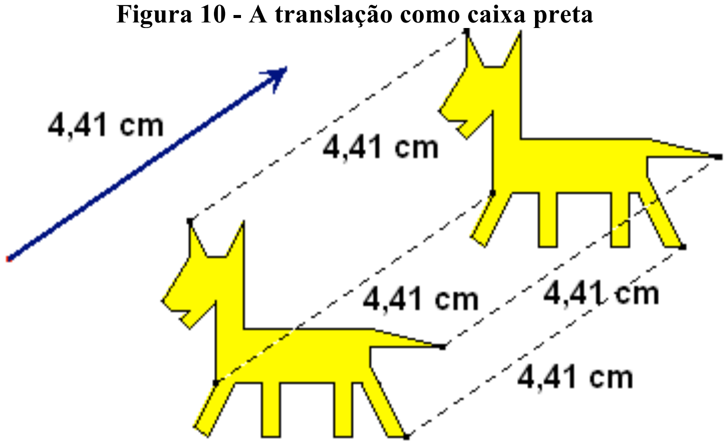
Com a inserção da geometria dinâmica no ensino, minha abordagem mudou radicalmente. As construções geométricas passaram a ter uma grande importância nas aulas, pois é na construção geométrica que se percebe a necessidade do conhecimento das propriedades geométricas do objeto teórico. A partir desse momento, comecei a trabalhar simultaneamente as propriedades dos objetos teóricos com as construções geométricas. Entre os temas que permitiam essa abordagem estavam as transformações geométricas no plano. Era um tema esquecido no ensino pela maioria dos professores, mas rico para ser abordado, pois mobiliza uma multiplicidade de noções e ferramentas geométricas e permite estabelecer conexões entre conhecimentos de diferentes domínios da matemática como, por exemplo, o estudo de gráficos de funções, dos números complexos, das cônicas, da geometria espacial, dos objetos que apresentam regularidades tais como mosaicos, ladrilhos, frisos. As transformações geométricas passaram a ser o fio condutor da minha disciplina "Tópicos de geometria". Esse estudo começou a ser formalizado em 1872 a partir das ideias apresentadas por Félix Klein.

A geometria euclidiana que é estudada no Ensino Básico e que é caracterizada por um conjunto de axiomas (Euclides, Hilbert, Birkhoff, Pogorelov) pode também ser caracterizada a partir das transformações geométricas. Podemos defini-la como o estudo das propriedades das figuras que permanecem inalteradas quando os elementos dessas figuras são submetidos às transformações isométricas e de semelhanças. O recurso oferecido pelo software para esse estudo *é o acesso automático à imagem de um objeto geométrico por uma transformação.* Essa operação é realizada de modo instantânea, bastando para isso, clicar no objeto e na transformação desejada. As isometrias, transformações geométricas que preservam distâncias, e as homotetias, transformações geométricas que preservam o paralelismo e a razão entre segmentos correspondentes permitem dar um tratamento mais geral à noção de congruência e semelhança. Até meados da década de 90, pouca ênfase era dada a essa temática porque o seu estudo realizado no ambiente convencional papel/lápis não permitia a realização imediata da tarefa da construção da imagem de um objeto. A falta desse recurso tornava o seu estudo muito limitado. A chegada da geometria dinâmica possibilitou oferecer esse conteúdo e colocá-lo numa posição central nas aulas de geometria. Em relação à sua abordagem, as transformações geométricas podem ser apresentadas como caixas pretas ou como ferramentas para resolver problemas. A inclusão das transformações geométricas no estudo de conceitos geométricos vem sendo enfatizada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais. Encontramos nos PCN (1998) a seguinte orientação:

> As atividades que envolvem as transformações de uma figura no plano devem ser privilegiadas nesses ciclos (6º ao 9º ano), porque permitem o desenvolvimento de conceitos geométricos de uma forma significativa, além de obter um caráter mais dinâmico para este estudo. Atualmente, existem softwares que exploram problemas envolvendo transformações das figuras. Também é interessante propor aos alunos situações para que comparem duas figuras, em que a segunda é resultante da reflexão da primeira (ou da translação ou da rotação) e descubram o que permanece invariante e o que muda.
> (Brasil, 1998, p. 124)

Uma grande parte do meu curso consistia no estudo das transformações geométricas no plano. Nesse estudo as transformações usuais eram apresentadas inicialmente como caixas pretas, em seguida os invariantes percebidos eram justificados e finalmente as transformações eram utilizadas como ferramentas para resolver problemas. Como exemplo, apresento uma atividade para a construção do conceito de translação. *Dada uma figura e um vetor, usar a ferramenta "translação" para transladar a figura e pesquisar os seus invariantes.* Essa apresentação é do tipo caixa preta, ou seja, a translação não é definida, mas é utilizada como ferramenta para descobrir os seus invariantes.

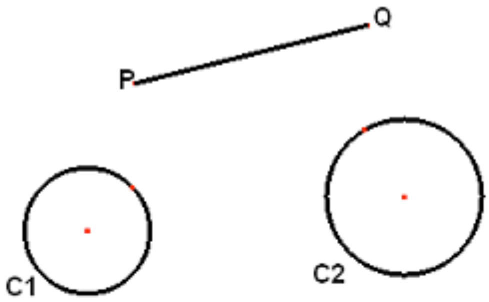
Figura 10 - A translação como caixa preta



Fonte: O autor.

Com um simples clique na figura inicial e no vetor, o software apresenta a imagem da figura. Usando o menu "medidas" e deslocando a extremidade do vetor para observar os efeitos dessa variação sobre a figura, o aluno verifica na figura e na sua transladada que a distância entre um ponto qualquer da figura inicial e de sua imagem é sempre a mesma e é igual ao comprimento do vetor que fornece a direção da translação. Outra propriedade percebida é que os segmentos que ligam cada ponto à sua imagem são paralelos entre si. Além disso, os elementos que constituem a figura sujeita a uma translação, continuam tendo as mesmas medidas e os mesmos ângulos embora a figura ocupe outra posição no plano. Dessa forma, as atividades do tipo caixa preta colaboram com o processo de formação do conceito do objeto geométrico. A etapa seguinte era provar que a translação preserva distâncias, ângulos e a colinearidade entre pontos. Portanto de um estudo exploratório passava-se a um estudo dedutivo. Finalmente, a translação era apresentada como ferramenta para resolver problemas. Como exemplo dessa última etapa apresentamos a seguinte situação: *Considere duas circunferências C1 e C2 e um segmento PQ. Construir um ponto M na circunferência C1 e um ponto N na circunferência C2 de modo que o segmento MN seja paralelo e congruente a PQ.*

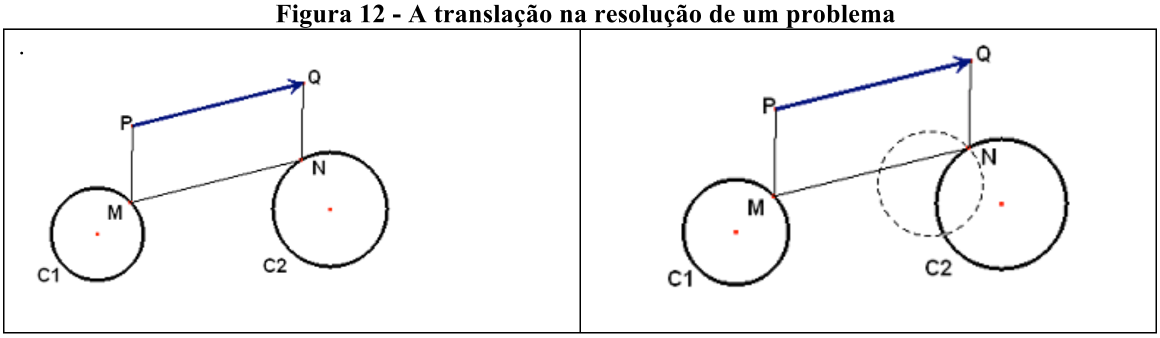
Figura 11 - A translação como ferramenta para resolver problemas



Fonte: O autor.

Na Figura 12 estamos supondo inicialmente o problema resolvido. Se tivéssemos o ponto M, bastaria transladá-lo segundo o vetor PQ. Como não temos esse ponto mas apenas a circunferência que o contém, é suficiente transladar a circunferência C_1 segundo o vetor PQ. A geometria dinâmica permite essa operação de modo instantâneo. Na intersecção das duas circunferências estará o ponto N. A construção de uma paralela possibilitará obter o ponto M.

Figura 12 - A translação na resolução de um problema



Fonte: O autor.

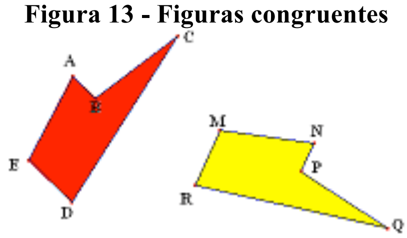
Cada uma das outras transformações geométricas era apresentada segundo essas três etapas: construção da imagem para formular conjeturas dos invariantes, prova da validade dos invariantes e o uso da transformação como ferramenta para resolver problemas. O próximo passo era utilizar essas transformações que preservam as distâncias para apresentar o conceito de congruência de figuras planas. Em relação ao estudo da congruência de figuras, encontramos nos PCNs (1998, p.124) as seguintes orientações:

ISSN 2447-6447

> O estudo das transformações isométricas (transformações do plano euclidiano que conservam comprimentos, ângulos e ordem de pontos alinhados) é um excelente ponto de partida para a construção das noções de congruência. As principais isometrias são: reflexão numa reta (ou simetria axial), translação, rotação, reflexão num ponto (ou simetria central), identidade. Desse modo as transformações que conservam propriedades métricas podem servir de apoio não apenas para o desenvolvimento do conceito de congruência de figuras planas, mas também para a compreensão das propriedades destas.
>
> (Brasil, 1998, p. 124)

No ensino usual, apresentam-se diversas definições para a palavra "congruente". Segmentos congruentes são segmentos de medidas iguais. Ângulos congruentes são ângulos de medidas iguais. Triângulos congruentes são triângulos de lados correspondentes congruentes e ângulos correspondentes congruentes. Círculos congruentes são círculos de raios iguais, etc. As transformações geométricas que preservam as distâncias (denominadas de *isometrias*) permitem dar uma definição geral de congruência que engloba todos os casos anteriores. Duas figuras são congruentes se existe uma isometria do plano no plano que transforma a primeira figura na segunda figura. Com base nos trabalhos de Vergnaud (1990), podemos classificar os problemas relacionados com as transformações em três tipos: dada uma figura inicial e uma transformação, obter a sua imagem; dada a imagem de uma figura por uma transformação e dada a transformação, obter a figura inicial; dada uma figura inicial e a sua imagem, obter a transformação que as relaciona. Esse último tipo de problema, geralmente menos presente no ensino, difere do primeiro e do segundo tipo, pois obriga o aluno a fazer hipóteses sobre a natureza da transformação. O exemplo que apresentamos a seguir é um problema do terceiro tipo que explora o conceito mais amplo de congruência. *Os polígonos ABCDE e MNPQR representados abaixo são congruentes. A tarefa consiste em deslocar o polígono inicial ABCDE até fazê-lo coincidir com o polígono MNPQR. Quais transformações podem levar o polígono ABCDE no polígono MNPQR?*

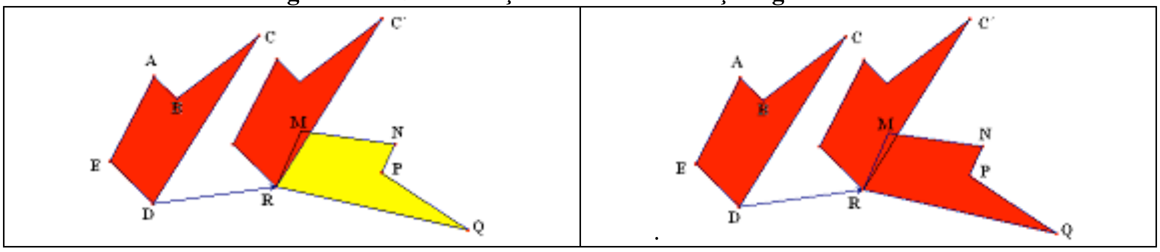
Figura 13 - Figuras congruentes



Fonte: O autor.

O software possibilita imediatamente obter a imagem do polígono ABCDE segundo o vetor DR. A seguir, ele permite obter a imagem do polígono transladado por uma rotação de centro R e ângulo C´RQ fazendo com que os dois polígonos coincidam.

Figura 14 - Uma solução via transformações geométricas



Fonte: O autor.

Outras atividades de superposição de figuras podem ser propostas englobando também a simetria axial. O exemplo acima ilustra a contribuição da geometria dinâmica na apropriação do conceito de congruência.

O estudo das transformações prossegue com a apresentação da homotetia como caixa preta. Em seguida os invariantes pesquisados são justificados e finalmente a homotetia é utilizada para resolver problemas. O estudo é completado com a definição mais ampla de semelhança que considera duas figuras A e B quaisquer, poligonais ou não, semelhantes se existe uma figura C homotética à figura A e congruente à figura B.

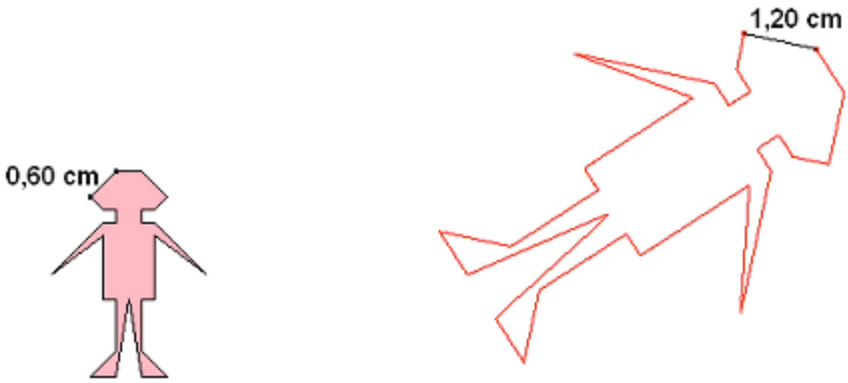
Resulta dessa definição que uma semelhança é uma composição de uma homotetia e de uma isometria.

Em relação ao estudo de figuras semelhantes, encontramos nos PCNs (1998) as seguintes orientações:

> O estudo das transformações que envolvem a ampliação e redução de figuras é um bom ponto de apoio à construção do conceito de semelhança. Porém, esse conceito é geralmente abordado apenas para os triângulos, tendo como única referência a definição que é apresentada ao aluno já na introdução desse conteúdo: dois triângulos são semelhantes quando e somente quando têm os três ângulos respectivamente congruentes ou os lados correspondentes proporcionais. Tal abordagem é limitada para uma compreensão mais ampla do conceito de semelhança. Isso pode ser favorecido se tal conceito for estudado em outras figuras, inclusive nas não-poligonais.
>
> (Brasil, 1998, p. 124)

A seguir, um exemplo que obriga o aluno a fazer hipóteses sobre a natureza da transformação e que explora o conceito mais amplo de semelhança. *As figuras representadas abaixo são semelhantes. Que transformações podem modificar a primeira figura até coincidir com a segunda figura?*

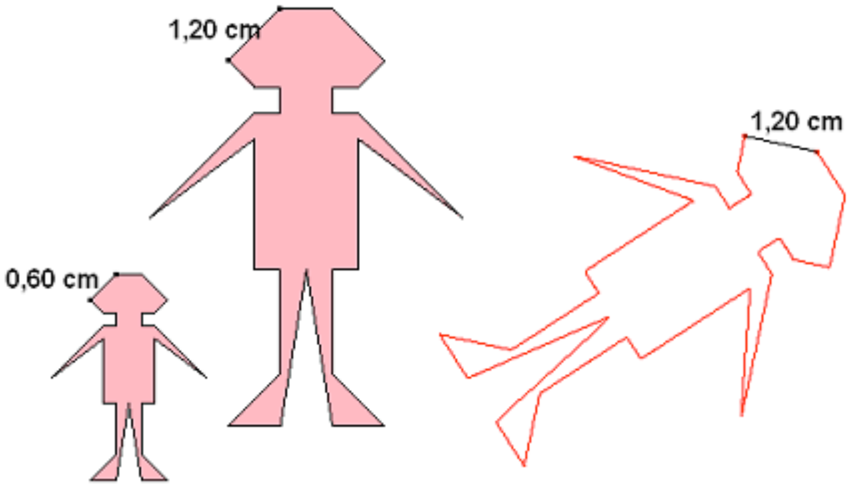
Figura 15 - Semelhança de figuras



Fonte: O autor.

Nesse exemplo a razão de semelhança é $\frac{1,2}{0,6} = 2$. Logo, para verificar se as duas figuras são semelhantes devemos fazer uma homotetia seguida de uma isometria. Para isso, escolhemos um centro O qualquer e construímos uma figura homotética à primeira de razão 2.

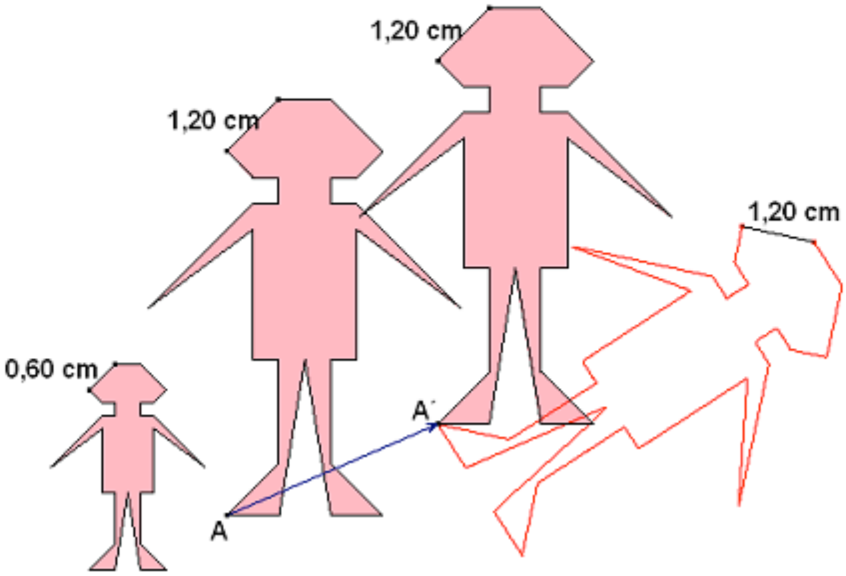
Figura 16 - Figuras homotéticas



Fonte: O autor.

A seguir recaímos no caso de congruência de figuras. Deve-se mostrar que a figura intermediária é congruente à figura final. Nesse caso é feita uma translação, por exemplo, segundo o vetor AA´.

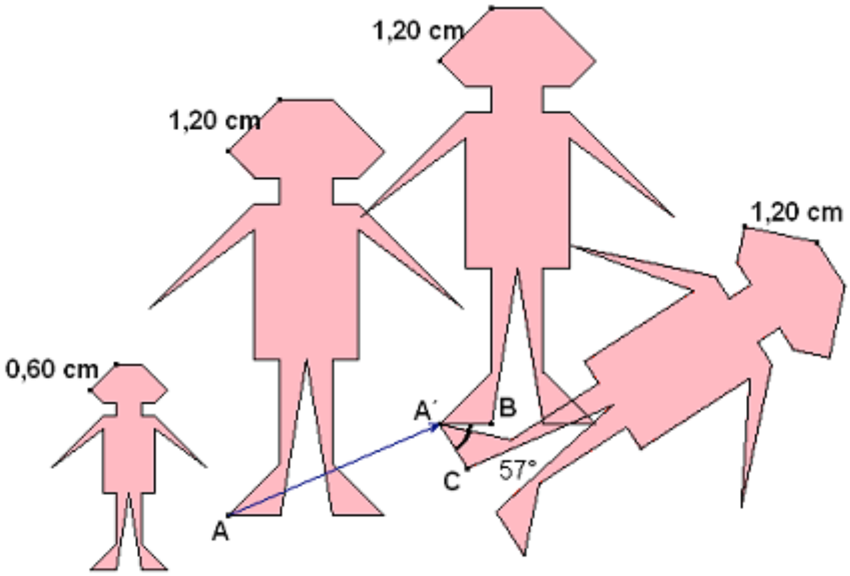
Figura 17- Figuras congruentes



Fonte: O autor.

E finalmente uma rotação de ângulo BA´C.

Figura 18 - Uma solução via transformações geométricas

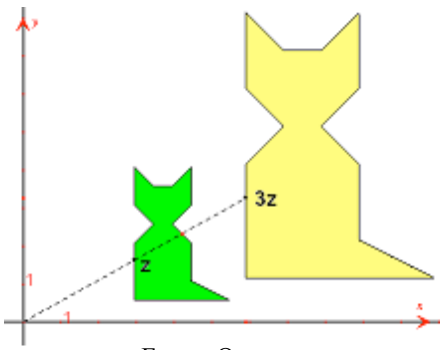


Fonte: O autor.

O exemplo acima ilustra a contribuição da geometria dinâmica na apropriação do conceito de semelhança.

As transformações geométricas usuais foram tratadas, até esse momento, de um ponto de vista global, isto é, elas foram aplicadas sobre figuras. Uma figura é transformada em outra figura. Nesta segunda etapa, as transformações geométricas serão abordadas sob um ponto de vista pontual. Uma figura será vista como um conjunto de pontos. A geometria dinâmica traz uma ajuda importante nessa passagem do global para o pontual. Os números complexos são um terreno fértil para essa abordagem. A estratégia utilizada será de associar a cada ponto de uma figura a sua imagem. E o conjunto de todas as imagens será obtido como um lugar geométrico. Enquanto o aspecto global favorece a visualização dos invariantes associados à transformação, o aspecto pontual enfatiza o procedimento geométrico que permite associar um ponto qualquer de uma figura à sua respectiva imagem. Por exemplo, como associar uma transformação geométrica a uma aplicação que leva cada complexo z ao complexo 3z ? Para visualizar essa transformação, criamos uma figura, escolhemos um ponto genérico dessa figura que será representado pelo complexo z=(x,y), a seguir**,** construímos a imagem do complexo z pela aplicação z→3z, ou seja, construímos o ponto de coordenadas (3x,3y). Finalmente, o software nos fornecerá o lugar geométrico do ponto que representa 3z quando z percorre o contorno da figura construída. A curva descrita será uma figura homotética à primeira com centro (0,0) e razão de homotetia 3. Podemos então caracterizar uma aplicação do plano em si mesmo que associa a cada complexo z o complexo k.z, sendo k um número real diferente de zero, como *uma homotetia* de centro O(0,0) e fator k.

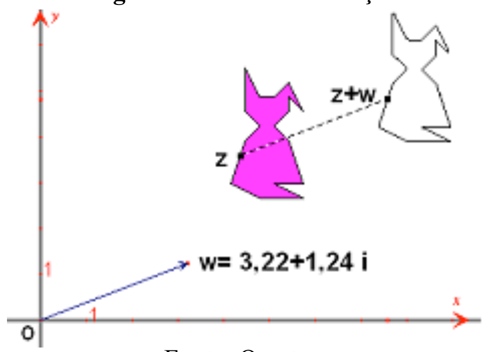
Figura 19 - Uma homotetia



Fonte: O autor.

Como tratar uma aplicação que associa a cada complexo z, o complexo z+ 3,22+1,24i ? Construímos uma figura qualquer e escolhemos um ponto genérico da figura que será indicado por z=(x,y). A seguir construímos a imagem de z pela aplicação, isto é, construímos o ponto de coordenadas (x+3,22; y+1,24). O lugar geométrico da imagem quando z percorre o contorno da figura é o polígono transladado segundo o vetor de origem O e extremidade (3,22;1,24). De um modo gral, podemos caracterizar uma aplicação do plano em si mesmo que associa a cada complexo z=x+iy, o complexo z+w, sendo w=a+bi um complexo fixo, como *uma translação* do complexo z segundo o vetor de origem (0,0) e extremidade (a,b).

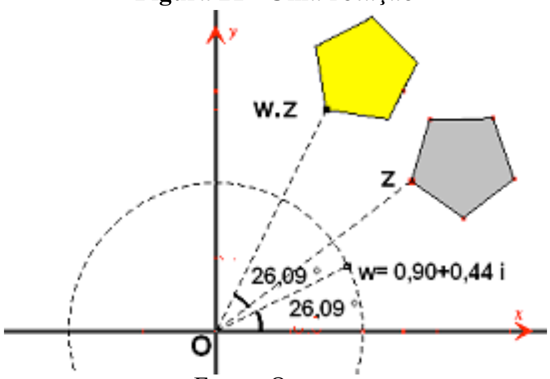
Figura 20 - Uma translação



Fonte: O autor.

Analogamente, a aplicação do plano em si mesmo que associa a cada complexo z o complexo w.z , sendo w um complexo fixo de módulo 1, como *uma rotação* de centro O e ângulo igual ao argumento de w. Na figura abaixo, quando o complexo z percorre o pentágono, o complexo w.z percorrerá o pentágono rotacionado de um ângulo de 26,09º que é o argumento do complexo w.

Figura 21 - Uma rotação



Fonte: O autor.

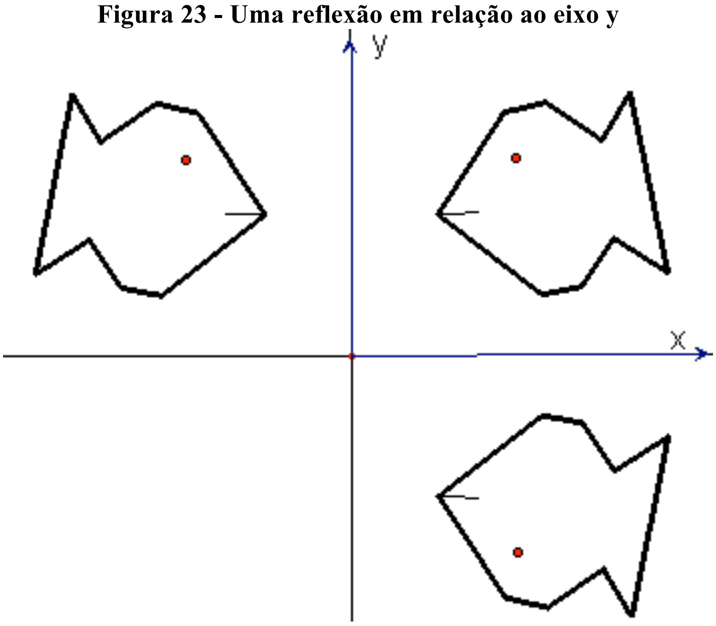
O exemplo a seguir, mostra uma aplicação que produz figuras semelhantes. A aplicação do plano em si mesmo que associa a cada complexo z o complexo w.z é *uma semelhança* de razão s onde s é o módulo de w. Essa semelhança é uma composição de uma homotetia de centro O e fator s e de uma rotação de centro O e tendo como ângulo o argumento do complexo w. Na figura abaixo, se z percorre o contorno do polígono, o complexo w.z percorre o contorno do polígono semelhante cuja razão de semelhança é igual ao módulo de w.

Figura 22 - Uma semelhança

Fonte: O autor.

Introduzindo o conceito de conjugado de um complexo z=a+bi indicado por $\bar{z}$ = a - bi, a aplicação do plano em si mesmo que associa a cada complexo z o complexo $\bar{z}$ pode ser traduzida geometricamente por *uma reflexão em relação ao eixo x* e a aplicação do plano em si mesmo que associa a cada complexo z o complexo - $\bar{z}$ pode ser traduzida geometricamente por *uma reflexão em relação ao eixo y* . Na figura abaixo, se z percorre o contorno do polígono, o complexo $\bar{z}$ percorre o contorno do polígono simétrico em relação ao eixo x e o complexo - $\bar{z}$ percorre o contorno do polígono simétrico em relação ao eixo y.

Figura 23 - Uma reflexão em relação ao eixo y



Fonte: O autor.

Os exemplos acima ilustram o ponto de vista pontual das transformações geométricas. A pesquisa de JAHN (1998) mostra que os alunos têm dificuldades para conceituar as transformações como aplicações do plano em si mesmo pois a passagem do global para o pontual marca uma ruptura entre duas concepções de plano: uma que considera o plano como um conjunto de figuras e a outra que considera o plano como um conjunto de pontos. A transposição didática habitual coloca um acento sobre os aspectos algébricos dos números complexos. Pouca ênfase é dada à interpretação geométrica das operações entre esses números. A atual disponibilidade dos ambientes de geometria dinâmica possibilita essa apresentação de forma simples, colocando o aluno no centro do processo para perceber relações e analisar as características dos objetos construídos.

Um outro tema que permite trabalhar simultaneamente propriedades geométricas com as construções geométricas é a introdução de técnicas de representação de objetos espaciais num plano. Encontramos nos PCNs (1998) a seguinte orientação em relação ao estudo da geometria espacial:

> Como campo de problemas, o estudo do espaço e das formas envolve três objetos de natureza diferente: o espaço físico, ele próprio – ou seja, o domínio das materializações; a geometria, concebida como modelização desse espaço físico – o domínio das figuras geométricas; o(s) sistema(s) de representação plana das figuras espaciais – o domínio das representações gráficas. A esses objetos correspondem três questões relativas à aprendizagem que são ligadas e interagem umas com as outras. São elas: a do desenvolvimento das habilidades de percepção espacial; a da elaboração de um sistema de propriedades geométricas e de uma linguagem que permitam agir nesse modelo; a de codificação e de decodificação de desenhos.
>
> (Brasil, 1998, p. 122)

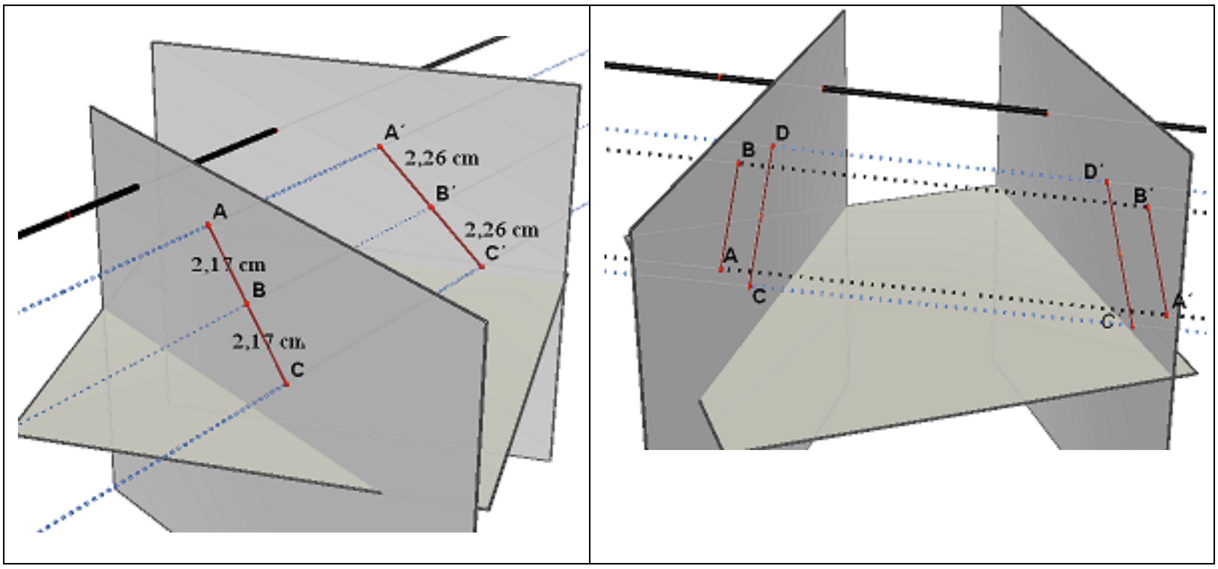
No ensino atual, a geometria espacial é abordada preferencialmente em relação ao domínio das materializações e ao domínio das figuras geométricas faltando uma ênfase ao domínio das representações gráficas. Os alunos têm reais dificuldades na elaboração de uma representação gráfica (codificação) bem como na interpretação de uma representação gráfica (decodificação). Uma das razões é que nas representações planas de objetos espaciais, o controle perceptivo do plano está ausente. As representações planas de objetos espaciais são enganosas, pois sendo de duas dimensões, elas podem induzir, por exemplo, à consideração de propriedades de intersecção ou de alinhamento não verificadas. O desafio de representar objetos tridimensionais em superfícies planas surgiu em várias civilizações e o homem criou diferentes soluções para resolver este problema. Entre as soluções criadas destacam-se para o ensino, a perspectiva paralela, a perspectiva central e a geometria descritiva.

Pesquisas apontam que a explicitação das regras de representação pode favorecer o desenvolvimento da visualização espacial. Parsysz (1989) enfatiza a importância de se ensinar as regras de representação da perspectiva paralela a alunos do Ensino Básico. O seu trabalho mostra que a explicitação dessas regras pode favorecer a compreensão de propriedades da geometria espacial. Machado (2000, p. 55) afirma:

> [...] poucos são os professores que buscam de modo consciente o desenvolvimento nos alunos da capacidade de representar. Frequentemente, os alunos são instados a desenhar sem qualquer orientação específica, e considera-se natural que 'vejam' os objetos tridimensionais através de suas representações planas, classificando os recalcitrantes como 'carentes de visão espacial'. Tal capacidade de transitar do objeto para a representação plana e vice-versa, sem dúvida é possível de ser desenvolvida, competindo à escola a realização de tal tarefa.
>
> (Machado, 2000, p. 55)

A geometria dinâmica trouxe novas possibilidades para o ensino e a aprendizagem das técnicas de representação. Assuntos como secções de sólidos, representações em perspectiva e problemas de sombra podem ser tratados nesses ambientes. Faremos a seguir, uma revisita a uma das técnicas que pode ser ensinada no Ensino Básico. Trata-se da *perspectiva cavaleira*. Ela trata da projeção de um objeto sobre um plano a partir de uma fonte colocada no infinito (os raios solares podem ser considerados como uma boa aproximação de raios paralelos), mas com os raios oblíquos ao plano de projeção. Para construir um objeto em perspectiva cavaleira é necessário o domínio das regras de representação. Uma possibilidade é obter empiricamente tais regras a partir de sombras produzidas por objetos expostos ao sol (Kodama, 2006). Outra maneira é utilizar um software de geometria dinâmica para simular as sombras produzidas pelos objetos expostos ao sol. Pode-se observar na figura abaixo duas regras, da perspectiva cavaleira, obtidas a partir da utilização software Cabri 3D: a conservação do ponto médio e a conservação do paralelismo de segmentos paralelos. O ponto médio B do segmento AC se preserva na sua projeção. Movendo as extremidades do segmento AB veremos que o ponto B´ continuará sendo ponto médio do segmento A´C´. O paralelismo entre os segmentos AB e CD também se preserva por projeção. Essas são duas regras básicas da perspectiva cavaleira.

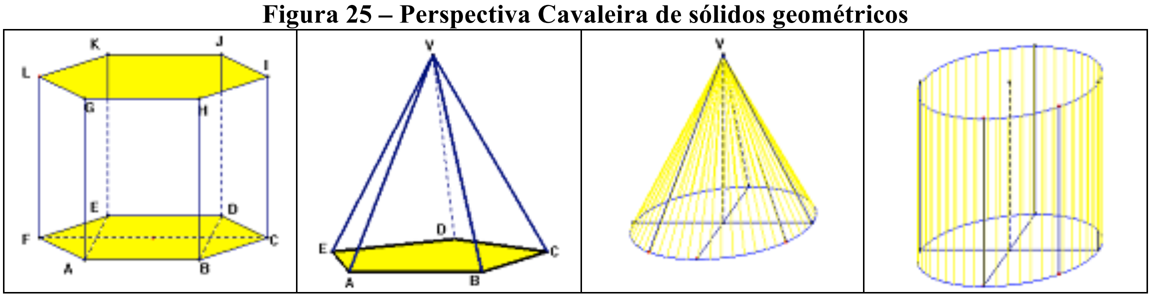
Figura 24 – Regras da perspectiva cavaleira



Fonte: O autor.

Após o estudo exploratório segue a etapa da justificativa das regras. Por exemplo, a justificativa da primeira regra se apoia na utilização do teorema de Tales pois que AA´, BB´ e CC` são retas paralelas. A justificativa da segunda regra se apoia no fato que as retas concorrentes AB e AA´ são ambas paralelas ao plano determinado por DD´CC`. Como consequência A´B´ é paralelo a C´D´. As demais regras podem ser obtidas com a ajuda do software. Uma das primeiras consequências da apropriação das regras é a possibilidade de construir a perspectiva cavaleira das principais figuras usuais da geometria espacial (prismas, pirâmide, cone, cilindro e esfera).

Figura 25 – Perspectiva Cavaleira de sólidos geométricos

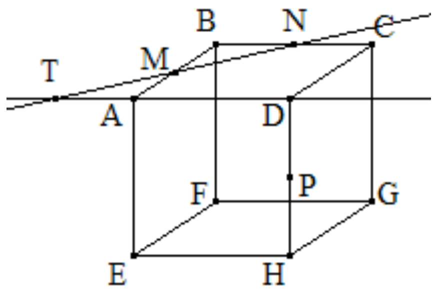


Fonte: O autor.

A partir dessas construções é possível iniciar a resolução de uma variedade de problemas de geometria espacial. O grande interesse em dominar a técnica da perspectiva cavaleira é que ela não é apenas uma ajuda visual, mas permite obter soluções reais de problemas a partir da figura construída. Vamos dar um exemplo de como utilizar a perspectiva cavaleira para resolver um problema de geometria espacial. *Qual a natureza da secção de um cubo por um plano que passa pelos pontos médios M,N e P das arestas conforme indica a figura abaixo.*

Inicialmente constrói-se um cubo em perspectiva cavaleira e marcam-se os pontos médios das arestas M, N e P. Consideramos o plano α que passa pelos pontos M,N e P. As retas MN e AD estão contidas no plano da face superior do cubo. Logo elas têm uma intersecção T. Como α contém a reta MN, o ponto T pertencerá a α.

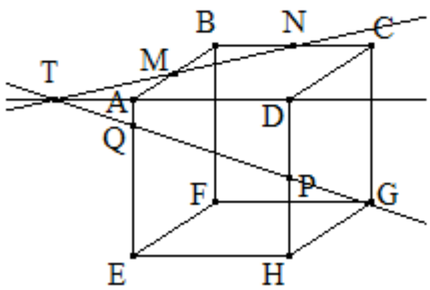
Figura 26 - Secção de um cubo



Fonte: O autor.

As retas TP e AE estão contidas no plano da face frontal do cubo. Logo elas têm uma intersecção Q. Os pontos T e P pertencem ao plano α. Logo a reta TP está contida no plano α. Como Q pertence à reta TP então Q pertence ao plano α.

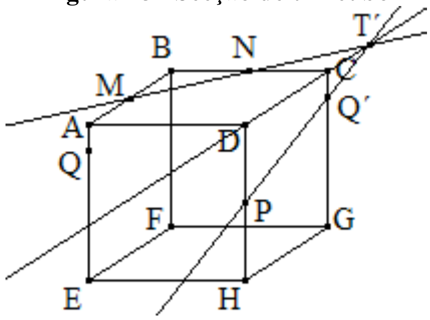
Figura 27 - Secção de um cubo



Fonte: O autor.

De modo análogo temos na figura 28 que as retas MN e DC se intersectam no ponto T´ pois estão no mesmo plano que contém a face superior do cubo. Logo o ponto T´ pertence ao plano α As retas CG e PT´ se intersectam no ponto Q´ pois estão no mesmo plano que contém a face lateral do cubo. A reta PT´ está contida no plano α Então o ponto Q´ também pertence ao plano α.

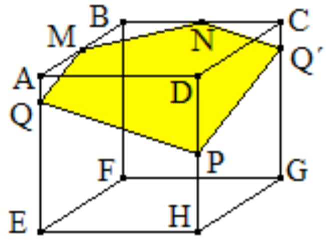
Figura 28 - Secção de um cubo



Fonte: O autor.

Finalmente temos a construção da secção do cubo pelo plano que passa pelos pontos M, N e P. É o pentágono MNQ´PQ.

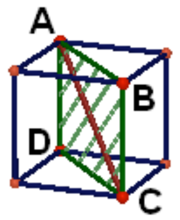
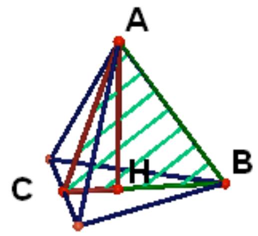
Figura 29 - Secção de um cubo



Fonte: O autor.

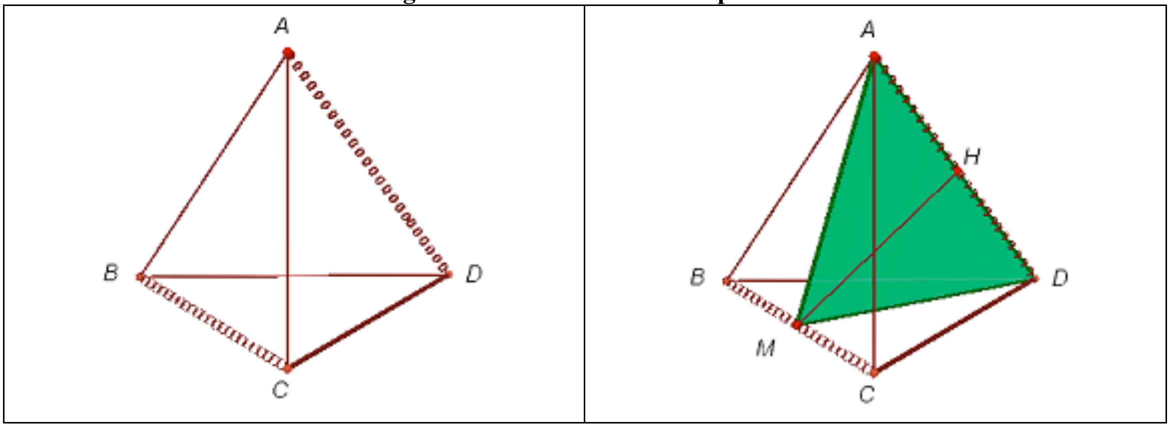
Podemos observar no exemplo acima a importância de saber discernir planos numa figura do espaço. As construções só podem ser realizadas em cada plano onde se situam as retas. A pesquisa de Rommenvaux (1999) aponta que uma das dificuldades dos alunos na resolução de um problema de geometria espacial está situada no discernimento de planos e afirma que saber discernir esses planos é um passo decisivo para a aprendizagem da geometria espacial.

Figura 30 - Discernimento de planos

Para calcular a diagonal de um cubo é necessário discernir o plano ABCD que contém a diagonal. 	Para calcular a altura AH de um tetraedro regular é necessário discernir o plano ABC que contém a altura. 

Fonte: O autor

Figura 31 - Discernimento de planos

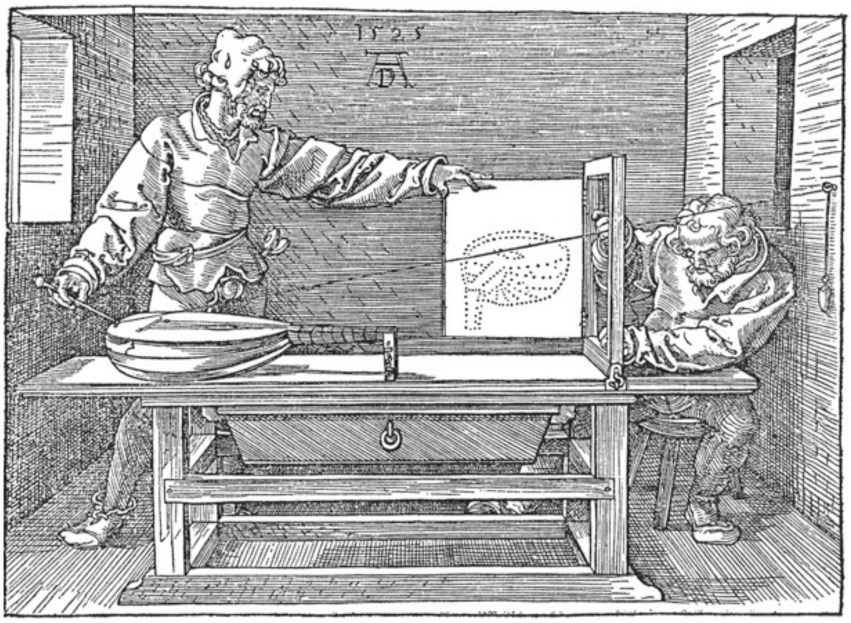


Fonte: O autor

Para obter a distância entre duas arestas opostas (BC e AD) de um tetraedro regular ABCD, é necessário discernir o plano passando pelos pontos A, M, D onde M é ponto médios da aresta BC. A altura do triângulo isósceles AMD será a distância procurada.

Outro sistema de representação pouco explorado no ensino e que permite trabalhar simultaneamente propriedades geométricas com construções geométricas é *a perspectiva central.* O software abre um campo enorme de possibilidades na exploração dessa temática. É um dos assuntos que permite a integração da matemática com as artes. A perspectiva central é a representação de um objeto tridimensional em um plano a partir de uma fonte pontual. Albrecht Durer (1471-1528) utilizava um instrumento (perspectógrafo) para representar objetos tridimensionais. A figura abaixo mostra como Durer representa um alaúde (instrumento musical) em perspectiva. As coordenadas da imagem de cada ponto do alaúde são determinadas pela posição de dois fios, um vertical e outro horizontal, presos à moldura de madeira.

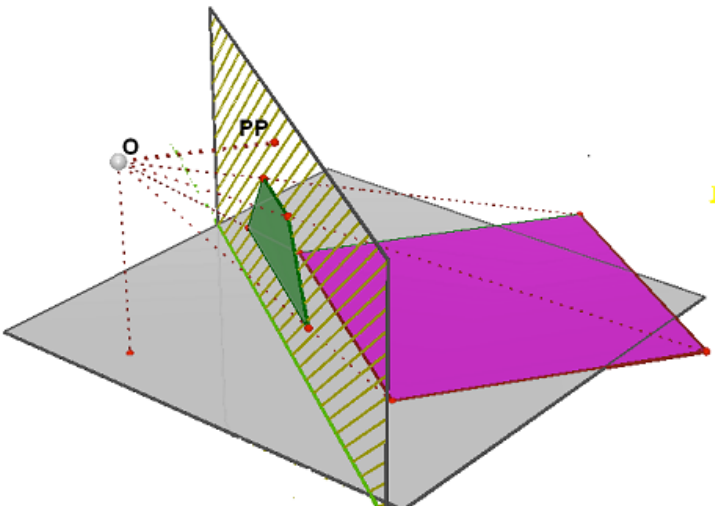
Figura 32: O desenhador de alaúdes



Fonte: disponível em http://home.fa.utl.pt/~lmmateus/1213_1_sem/Perspectiva_1213.pdf
Acesso em 10/06/2016.

A geometria dinâmica permite revisitar as técnicas desenvolvidas pelos pintores e artistas do Renascimento. Para isso o software é usado para simular o perspectógrafo de Durer. A figura abaixo ilustra que a perspectiva do quadrado contido no plano do chão é um trapézio (contido no plano vertical). O quadrado se deforma num trapézio. O olho do observador é indicado com a letra O e a projeção ortogonal do olho do observador sobre o plano vertical é denominada de ponto principal e indicada por PP. A intersecção do plano vertical com o plano do chão é uma reta denominada linha de terra.

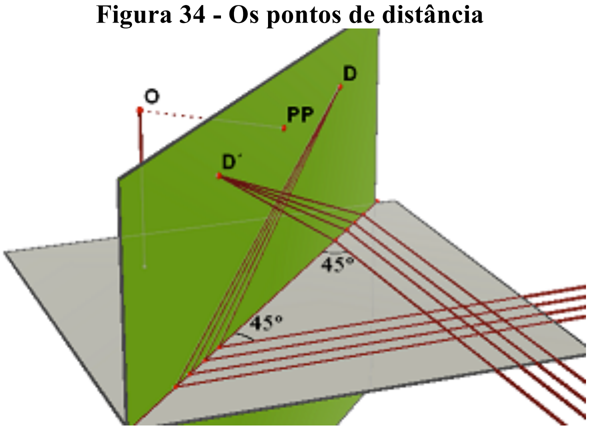
Figura 33 - A perspectiva de um quadrado



Fonte: O autor.

O software 3D possibilita obter empiricamente as regras da perspectiva central. Uma das mais utilizadas pelos pintores do Renascimento, chamada de "método dos pontos de distância" afirma que "as perspectivas de retas paralelas formando ângulos de 45º com a linha de terra se encontram, no plano vertical, em um ponto denominado ponto de distância". Há dois pontos de distância D e D´. Tais pontos têm a propriedade de estarem situados à mesma distância do ponto principal e essa distância é igual à distância entre o observador e o ponto principal.

Figura 34 - Os pontos de distância



Fonte: O autor.

A partir dessas informações é possível descobrir a que distância do plano vertical estava um pintor do século XV ao pintar o seu quadro. Vamos dar um exemplo. Escolhemos a cópia de um quadro em que seja possível encontrar o seu "ponto de distância" e o seu "ponto principal". Por exemplo, o quadro da "Anunciação com santo Emidius" de Carlo Crivelli, pintado em 1476. As medidas reais do quadro são altura 207cm e largura 146,7 cm. Abaixo temos uma cópia desse quadro.

Figura 35 - O quadro da Anunciação com Santo Emidius

Fonte: Disponível em http://www.mare.art.br/detalhe.asp?idobra=3633. Acesso em 10/6/2016.

Inicialmente obtém-se o ponto D´ e o ponto principal. A largura dessa cópia é 6,89 cm e a distância do “ponto de distância” D´ao “ponto principal” é 5,43 cm. Uma regra de três mostra que o fator de ampliação do quadro original para a cópia é $\frac{largura\ do\ quadro}{largura\ da\ cópia} = \frac{146{,}7cm}{6{,}89cm}$ = 21,28. Portanto a distância real do ponto D´ao ponto O será 21,28 vezes 5,43 =115,49 cm, ou seja, no ano de 1496 o pintor estava a uma distância de 1,15 m ao pintar o quadro original.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os ambientes de geometria dinâmica são ferramentas disponíveis para enriquecer o processo de ensino e aprendizagem da geometria. No entanto, o ensino da geometria com a inserção da geometria dinâmica ainda é pouco explorado pelos professores. Um dos motivos é a dificuldade do professor em transformar esses ambientes informáticos em instrumentos de trabalho. Isso se deve, em parte, à ausência de recursos e ajudas que lhes permitem integrar esses ambientes informáticos em seus contextos particulares de ensino. Existem muitos trabalhos envolvendo o uso da geometria dinâmica em sala de aula, mas as questões relacionadas aos problemas didáticos ou pedagógicos são pouco abordadas. Julgamos que o desenvolvimento de cenários, ou seja, da descrição de sequências de atividades articuladas, acompanhada de comentários aos professores, com o desenvolvimento de possíveis estratégias nas soluções dos problemas e de ajudas tanto do ponto de vista matemático quanto do ponto de vista informático, é um passo importante para a integração da geometria dinâmica no ensino.

REFERÊNCIAS

Bahia (2013). *Orientações curriculares e subsídios didáticos para a organização do trabalho pedagógico no ensino fundamental de nove anos.* Superintendência de Desenvolvimento da Educação Básica. Diretoria de Educação Básica. Salvador: Secretaria da Educação.

Brandão, L. O. (2002). Algoritmos e fractais com programas de geometria dinâmica. *RPM*, 49, 27-34.

Brasil. (1998). Ministério da Educação e Cultura. *Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática.* Terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental. Brasília.

Brasil. (2006). *Orientações curriculares para o Ensino Médio*. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias / Secretaria de Educação Básica. Brasília. 2.

Freudenthal, H. (1973). *Matematics as an Educational Task*.

Kodama, Y. (2006). *O estudo da perspectiva cavaleira:* uma experiência no Ensino Médio, dissertação de mestraso, PUC-SP

Jahn, A. P. (1998) *Des transformations de figures aux transformations ponctuelles* : étude d'une séquence d'enseignement avec Cabri-géomètre. Thèse de Doctorat Université Joseph Fourier, Grenoble.

Laborde, J. M. & Strasser, R. (1990). «Cabri-géomètre» a micro-world of geometry for guided discovery learning. *Zentralbaltt für Didaktik der Mathematic*, 90(5), 171-190.

Laborde, C. (1993). Apprendre à voir et manier l'objet géométrique au delà du tracé dans Cabri-géomètre. In: *Université d'Eté Apprentissage et Enseignement de la Géométrie avec Ordinateur; utilisation du logiciel Cabri-géomètre en classe*. 87-97. IUFM, IREM, LSD2 (IMAG), Grenoble: França.

Machado, N. (1995). *Epistemologia e didática*, As concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente. Cortez editora.

Moise & Downs. (1971). *Geometria moderna*. Editora Edgard Blucher Ltda.

Parzysz, B. (1991). Espace Géometrie et Dessin. Une Ingènierie didactique pour l'aprentissage, l'enseignement et l'utilisation de la pespective parallèle au lycée. *Recherches em Didactique des Mathématiques.* 11(23), 211-240.

Pernambuco. (2012). Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco. Parâmetros Curriculares de Matemática. Educação de Jovens e Adultos.

Pogorelov, A.V. (1974). *Geometria Elemental* Editorial Mir. Moscou.

Restrepo, A. M. (2008). *Génèse instrumentale du déplacement em géométrie dynamique chez les élèves de 6eme*. Thèse de Doctorat. Université Joseph Fourier, Grenoble.

Rommevaux, M. P. (1999). Le discernement des plans dans une situation tridimensionnelle. Educação Matemática Pesquisa – Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP, 1, 13-65.

Vergnaud, G. (1990) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Matématiques*, 10(23), 133-170.